



PAULİ OPERATORUNUN MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİNİN FUNKSIYASI ÜÇÜN MİNİMALLAŞDIRMA MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMAL HƏLLİN VARLIĞI HAQQINDA

NATƏVAN ƏHMƏDƏLİ QIZI ALLAHVERDİYEVA, AYNURƏ RUSLAN QIZI ƏLİYEVƏ

Sumqayıt Dövlət Universiteti
aaliyeva88@mail.ru

Burada Şredinger operatorunun ümumiləşməsi olan və kvant mexanikasında geniş tətbiq edilən Pauli operatorunun məxsusi ədədlərinin funksiyası üçün qoyulmuş oblasta nəzərən minimallaşdırma məsələsinə baxılır. Baxılan məsələ üçün varlıq məsələləri araşdırılır və uyğun teoremlər isbat edilir.

Məlumdur ki, müxtəlif operatorların məxsusi ədədləri müxtəlif fiziki proseslərin və təbiət hadisələrinin müəyyən parametrlərini təsvir edir [5]. Belə məsələlər dəyişən oblastlı məsələlər adlanır. Prosesin hansısa parametrlərini oblasta nəzərən minimallaşdırmaq (maksimallaşdırmaq) tələb edildikdə isə belə məsələlər oblasta görə optimallaşdırma məsələləri (shape optimization) adlanırlar [3]. Bu zaman baxılan funksionalın arqumentində ənənəvi hallardan fərqli olaraq funksiyalar deyil, oblast dayandığından, belə məsələlərin həlli ciddi riyazi çətinliklərlə bağlıdır [1, 2, 4, 6, 7]. Bəzən isə sadəcə bu operatorların məxsusi ədədlərini (və ya onların xarakterizə etdikləri uyğun fiziki-mexaniki kəmiyyətləri) deyil, onlardan birindən və ya bir neçəsindən asılı olan funksiyaları və yaxud funksionalları araşdırmaq lazım gəlir. Baxılan prosesin baş verdiyi oblast dəyişən kəmiyyət kimi götürüldükdə isə bu funksionallar son nəticədə oblastdan asılı olur. Beləliklə, biz oblastdan asılı məxsusi ədəd məsələlərinə gəlirik. Belə məsələlərin həllinin varlığı, ekstremal həllərin tapılması, ədədi həll alqoritmlərin qurulmasına müxtəlif müəlliflərin çoxlu sayda işləri həsr edilmişdir. Lakin hələ də nə dəyişən oblastlı məsələlərin analitik həlli, nə də bu həllərin ədədi olaraq qurulması üçün ümumi üsullar işlənib, hazırlanmamışdır [6].

Burada biz Pauli operatorunun məxsusi ədədlərinin funksiyası üçün qoyulmuş oblasta nəzərən minimallaşdırma məsələsinə baxacağıq. Aşağıdakı məxsusi ədəd məsələsinə baxaq

$$P\varphi = \lambda\varphi, \quad x \in D, \quad (1)$$

$$\varphi = 0, \quad x \in S_D. \quad (2)$$

Burada P aşağıdakı kimi təyin edilmiş Pauli operatorudur.

$$P = P(a, v) \cdot J + \sigma B, \quad (3)$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = (a, v) = (-i\nabla - a)^2; \quad i - \text{xəyali vahid}; \quad \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\};$$

$a = (a_1, a_2) \in R^2$ - vektor potensial; B isə a vektor potensialın doğurduğu maqnit sahəsidir



$$B = \frac{\partial}{\partial x} a_2 - \frac{\partial}{\partial y} a_1 \quad (4)$$

Ω ilə R^2 -nin verilmiş məhdud açıq altçoxluluğunu, K ilə isə Ω -nın bütün kvazi açıq altçoxluluqları çoxluğunu işarə edək. Tutaq ki, K_c çoxluğu Ω -nın Lebeq ölçüsü c olan altçoxluluqları çoxluğudur.

Biz burada K_c çoxluğunda Pauli operatorunun ilk iki məxsusi ədədindən asılı olan funksiya üçün aşağıdakı məsələyə baxacağıq:

$$\min \{F(K), K \in K_c\}. \quad (5)$$

Burada

$$F(K) = f(\lambda_1(K), \lambda_2(K)),$$

harada ki, f kəsilməz, mənfi olmayan funksiya, $\lambda_1(K)$ və $\lambda_2(K)$ isə P operatorunun K oblastında uyğun olaraq birinci və ikinci məxsusi ədədləridir. R^2 -nin aşağıdakı altçoxluluğunu daxil edək

$$E_c = \{(x, y) \in R^2 : x = \lambda_1(K), y = \lambda_2(K), K \in K_c\}.$$

Yəni faktiki olaraq E_c çoxluğu R^2 -nin elə altçoxluluğudur ki, onun elementləri (2) sərhəd şərti ilə verilmiş Pauli operatorunun birinci və ikinci məxsusi ədədlərindən formalaşdırılmış cütlərdir. Onda (5) məsələsini bu formada yazmaq olar

$$\min \{f(x, y) : (x, y) \in E_c\}.$$

Buradan alınır ki, E_c çoxluğunun R^2 -də qapalı olması çox vacib informasiya verə bilər, çünki bu halda (5) məsələsinin həllinin olması buradan birbaşa nəticə kimi çıxır. Aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem. Tutaq ki, $c \in [0, |\Omega|]$. Onda E_c qapalı çoxluqdur.

Ədəbiyyat

1. ASHBAUGH M.S., BENGURIA R.D. Proof of the Payne-Polya-Weinberger conjecture. Bull. Amer.Math.Soc., 25 (1991), pp.19-29.
2. BROCK F. Continuous Steiner-symmetrization. Math. Nachr., 172 (1995), pp. 25-48.
3. BUTTAZZO G., DAL MASO G. Shape optimization for Dirichlet problems: Relaxed formulation and optimality conditions. Apply. Math. Optim., 23 (1991), pp.17-49.
4. BUTTAZZO G., DAL MASO G. An existence result for a class of shape optimization problems. Arch. Rational Mech. Anal., 122 (1993), pp.183-195.
5. CYCON H.L., FROESE R.G., KIRSCH W., SIMON, B. Schrödinger Operators: With Application to Quantum Mechanics and Global Geometry. Springer, 2009.
6. GASIMOV Y.S. Some shape optimization problems for the eigenvalues. J. Phys. A: Math. Theor., Vol.41, No.5, 2008, pp.521-529.
7. GASIMOV Y.S. On a shape design problem for one spectral functional. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, Vol.21, No.5, 2013, pp.629-637.