



ÜMUMİLƏŞMİŞ MƏNADA TÖRƏMƏNİN RIYAZI ANALİZ KURSUNDA TƏLİMİ

ELŞAD AĞAYEV, SAHİB ƏLİYEV

Naxçıvan Dövlət Universiteti
elsad.agayev.56@mail.ru, sahibaliyev60@mail.ru

Riyazi analiz kursunda kəsilmə funksiyaların törəmələrinin tapılması məsələsini klassik funksiyanın törəməsi anlayışı çərçivəsində həll etmək mümkün olmur. Ancaq ümumiləşmiş törəmə anlayışından istifadə etməklə bu məsələni həll etmək olur. Bu nöqteyi nəzərdən məqalədə Delta funksiyasının tətbiqi ilə birinci növ izolə edilmiş kəsilmə nöqtəsinə malik olan funksiyaların törəmələrinin tapılması məsələsi tədqiq edilmişdir. Baxılan məsələnin həllində hissə-hissə kəsilməz funksiyaların birinci tərtib törəmələri üçün riyazi fizikadan məlum olan düsturdan köməkçi riyazi aparat kimi istifadə edilmişdir (5.s.24-28)

Açar sözlər : diferensial tənliklər, elliptik, qeyri xətti, klassik həll

1. Əsas anlayışlar və təriflər.

Ali təhsilin bakalavr pilləsinin Riyaziyyat, Riyaziyyat-İnformatika və Fizika ixtisaslarında tədris olunan "Riyazi analiz" kursunda klassik funksiya anlayışı daxilində birinci növ kəsilmə nöqtəsi olan funksiyaların törəmələrinin tapılması məsələsi mümkün olmadığından ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsindən köməkçi riyazi aparat kimi istifadə etmək məqsədəuyğun hesab edilir.

Ümumiyyətlə, $\delta(x)$ - Dirak funksiyasının tətbiqi ilə kəsilmə funksiyaların törəmələrinin tapılması məsələsi xüsusi elmi maraq doğurur.

İndi isə kəsilmə funksiyaların törəmələrinin tapılması məsələlərinə baxaq.

Tutaq ki, $f(x)$ elə hissə-hissə kəsilməz funksiya ki,

$$f \in C'(x < x^0) \cap C'(x > x^0)$$

munasibəti ödəyir.

Onda $D'(R')$ ümumiləşmiş funksiyalar fəzasında

$$f' = \{f'(x)\} + [f]_{x^0}^0 \delta(x - x^0) \quad (1)$$

bərabərliyi doğrudur. Burada $[f]_{x^0}^0 = f(x^0+0) - f(x^0-0)$ f funksiyasının x^0 nöqtəsindəki sıçrayışıdır, x^0 isə bu funksiyanın 1-ci növ izolə edilmiş kəsilmə nöqtəsidir. $\{f'(x)\}$ simvolu isə (x_0 nöqtəsi istisna olmaqla) klassik mənada törəməni göstərir.

Doğrudan da, əgər $\varphi \in D(R')$ olarsa, $(D(R'))$ əsas funksiyalar fəzasıdır, onda ümumiləşmiş funksiyanın törəməsinin tərifinə əsasən alırıq:

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{x^0} f(x) \varphi'(x) dx - \int_{x^0}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = i_1 + i_2$$



Buradan

$$i_1 = - \int_{-\infty}^{x^0} f(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{x^0} f(x) d\varphi(x) = - f(x) \cdot \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{x^0} + \int_{-\infty}^{x^0} f'(x) \varphi(x) dx =$$

$$- f(x^0 - 0) \varphi(x^0) + \int_{-\infty}^{x^0} \{ f'(x) \} \varphi(x) dx$$

$$i_2 = - \int_{x^0}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = - \int_{x^0}^{+\infty} f(x) d\varphi(x) = - f(x) \cdot \varphi(x) \Big|_{x^0}^{+\infty} + \int_{x^0}^{+\infty} \{ f'(x) \} \varphi(x) dx =$$

$$f(x^0 + 0) \varphi(x^0) + \int_{x^0}^{+\infty} \{ f'(x) \} \varphi(x) dx$$

i_1 və i_2 ifadələrinin yuxarıdakı qiymətlərini nəzərə alsaq alırıq:

$$(f', \varphi) = i_1 + i_2 = - f(x^0 - 0) + \int_{-\infty}^{x^0} \{ f'(x) \} \varphi(x) dx + f(x^0 + 0) \cdot \varphi(x^0) + \int_{x^0}^{+\infty} \{ f'(x) \} \varphi(x) dx =$$

$$[f(x^0 + 0) - f(x^0 - 0)] + \int_{-\infty}^{x^0} \{ f'(x) \} \varphi(x) dx + \int_{x^0}^{+\infty} \{ f'(x) \} \varphi(x) dx = [f(x)]_{x=x^0} \varphi(x^0) +$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{ f'(x) \} \varphi(x) dx = (\{ f'(x) \} + [f(x)]_{x=x^0} \cdot \delta(x - x^0), \varphi(x))$$

Deməli, $f' = \{ f'(x) \} + [f]_{x^0} \delta(x - x^0)$ bərabərliyi doğrudur.

Xüsusi halda, $f(x) = \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ Hevisayda funksiyası olursa, onda alırıq:

$$\theta'(x) = \{ \theta'(x) \} + [\theta(x)]_{x^0=0} \cdot \delta(x) = 0 + (1 - 0) \delta(x) = \delta(x)$$

olar.

Burada $\delta(x - x^0)$ -tərpənmiş Delta(və ya dirak) funksiyası olub, aşağıdakı qaydada təyin olunur:

$$(\delta(x - x^0), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x + x^0)) = \varphi(x^0), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^1)$$

Başqa sözlə,

$$\theta'(x) = \delta(x) \quad (2)$$

Burada $\delta(x)$ – Dirak funksiyasıdır. Bu funksiya $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$ bərabərliyi ilə təyin olunur və hər bir sonlu a ədədi üçün

$$\int_{-a}^a \delta(x) dx = \int_{-a}^a \delta(x) \cdot 1 dx = 1(0) = 1$$

olur.

$\delta(x)$ funksiyası aşağıdakı xassələrə malikdir:

$$1) \delta(-x) = \delta(x)$$

$$2) \delta(\alpha x) = \frac{1}{\alpha} \delta(x)$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \delta(x - x^0) dx = \varphi(x^0)$$

$$4) \delta'(x) = -\frac{1}{\alpha} \delta(x)$$

$$5) \frac{d^n}{dx^n} \delta(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^n} \delta(x)$$



Elektrik döviyyəsi nəzəriyyəsində Hevisayda funksiyası birpilləli funksiya, $\delta(x)$ isə vahid impuls adlanır.

$\theta'(x) = \delta(x)$ düsturu təsdiq edir ki, vahid impuls bir pilləli funksiyanın törəməsinə bərabərdir.

2. Kəsilən funksiyaların törəmələrinin hesablanması

Misal 1 : $(\operatorname{sgn} x)^{(m)}$, $m \geq 1$ törəməni tapaq.

Bunun üçün (1) düsturunu tətbiq edək:

$$(\operatorname{sgn} x)' = \{\operatorname{sgn} x\}' + [\operatorname{sgn} x]_{x=0} \cdot \delta(x) = 0 + (1 - (-1)) \cdot \delta(x) = 2 \cdot \delta(x)$$

$$(\operatorname{sgn} x)'' = 2 \delta'(x)$$

$$(\operatorname{sgn} x)''' = 2 \delta''(x)$$

$$\text{-----}$$

$$(\operatorname{sgn} x)^{(m)} = 2 \delta^{(m-1)}(x)$$

Misal 2: $|x|^{(m)}$, $m \geq 2$ törəməni tapaq.

Bunun üçün $|x|' = \operatorname{sgn} x$ ($x \neq 0$) doğru bərabərliyindən istifadə edib (1) düsturunu tətbiq edək. Onda alırıq:

$$|x|'' = (\operatorname{sgn} x)' = \{\operatorname{sgn} x\}' + [\operatorname{sgn} x]_{x=0} \cdot \delta(x) = 2 \cdot \delta(x)$$

$$|x|''' = 2 \cdot \delta'(x)$$

$$|x|^{(IV)} = 2 \cdot \delta''(x)$$

$$\text{-----}$$

$$|x|^{(m)} = 2 \cdot \delta^{(m-2)}(x)$$

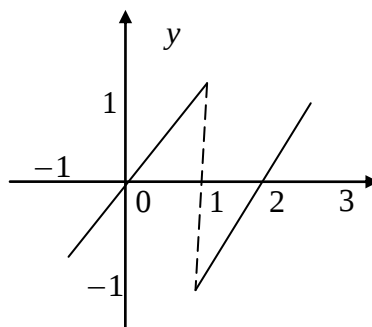
Misal 3. $y = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x-2 & x > 1 \end{cases}$ funksiyasının törəməsini hesablayaq:

Həlli:

Göründüyü kimi bu funksiya $x = 1$ nöqtəsində kəsilir və bu kəsilmə nöqtəsində sıçrayışı

$$[f]_{x=1} = y(1+0) - y(1-0) = 1 - 2 = -1$$

olur. (1)



düsturunu tətbiq etsək alırıq:



$$\frac{dy}{dx} = 1 - 2 \cdot \delta(x-1)$$

Misal 4. $y = \begin{cases} -x^2, & x < 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$ funksiyasının törəməsini hesablayaq:

Həlli:

Bu funksiyanın klassik mənada törəməsi

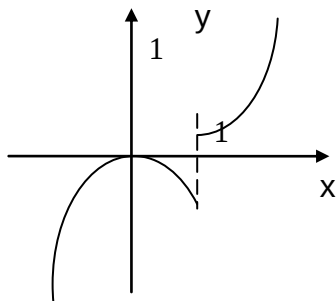
$$y' = \begin{cases} -2x, & x < 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases} \text{ olar.}$$

Baxılan funksiya $x = 1$ nöqtəsində kəsilir və bu kəsilmə nöqtəsində funksiyanın sıçrayışı

$$[f] = y(1+0) - y(1-0) = 1 - (-1) = 2$$

İndi isə biz $x = 1$ nöqtəsini oblastın sol hissəsinə birləşdirə bilərik.

Onda alırıq:



$$y' = \begin{cases} -2x + 2\delta(x-1), & x \leq 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

Digər variantla $x = 1$ nöqtəsini oblastın sağ hissəsinə birləşdirsək alırıq.

$$y' = \begin{cases} -2x, & x < 1 \\ 2x + 2\delta(x-1), & x \geq 1 \end{cases}$$

Beləliklə, baxılan funksiyanın birinci tərtib törəməsini $y' = \varphi(x) + 2\delta(x-1)$ şəklində yazmaq olar.

Burada,

$$\varphi(x) = \begin{cases} -2x, & (x < 1) \\ 2x, & (x > 1) \end{cases}$$

Ədəbiyyat

1. В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. Москва 1998, 512 с.
2. В.Я. Арсенин. Методы математической физики и специальные функции. Москва 1988, 382 с.



3. E.V.Ağayev, S.H.Vəliyev. Riyazi fizikanın üsulları. Metodik vəsait. Bakı 1999, 46 s.
4. S.H.Vəliyev, E.V.Ağayev. Diferensial tənliklər. Metodik vəsait. Naxçıvan 2001.
5. E.V.Ağayev, N.S.Məmmədova. Dirak funksiyasının tətbiqi ilə n tərtibli sabit əmsallı xətti diferensial tənliklərin fundamental həllinin qurulması. NMI, Xəbərlər, 2009 № 2 (18),
6. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике [Текст] / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981.
7. Владимиров, В.С. Обобщенные функции и их применение [Текст] / В.С. Владимиров. – М.: Знание, 1990.
8. Дирак, П. Принципы квантовой механики [Текст] / П. Дирак. - М.: Наука, 1979.