

KAPUTO TÖRƏMƏLİ XƏTTİ DİFERENSİAL TƏNLIYIN HƏLLİNİN GÖSTƏRİLİŞİ

ŞAKİR ŞIXI OĞLU YUSUBOV, AĞAMALI QULU OĞLU AĞAMALIYEV

Bakı Dövlət Universiteti
yusubov_shakir@mail.ru, a_agamali@mail.ru

İşdə dəyişən əmsallı Kaputo törəməli xətti diferensial tənlik üçün qoyulmuş Koşi məsələsinin həllinin göstərilişi alınmışdır.

Bu işdə Kaputo törəməli dəyişən əmsallı xətti bircins olmayan

$$({}^c D_{0+}^{\alpha} x)(t) = a_1(t)x(t) + a_2(t)({}^c D_{0+}^{\beta} x)(t) + f(t), \quad (1)$$

$$t \in [0, T],$$

diferensial tənliyinin

$$x(0) = x_0 \quad (2)$$

Koşi başlanğıc şərtini ödəyən həllinin göstərilişi məsələsi araşdırılır. Burada $a_i(\cdot) \in L_{\infty}([0, T], R^{n \times n}), i = 1, 2, f(\cdot) \in L_{\infty}([0, T], R^n)$, verilmiş funksiyalar, $T > 0, \alpha, \beta$ ($0 < \beta < \alpha < 1$) qeyd olunmuş həqiqi ədədlər, $x_0 \in R^n$ qeyd olunmuş nöqtə,

$$\begin{aligned} ({}^c D_{0+}^{\gamma} x)(t) &= \frac{d}{dt} (I^{1-\gamma} (x(\cdot) - x(0))) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\gamma} (x(\tau) - x(0)) d\tau, \\ 0 < \gamma < 1, \quad \gamma \in \{\alpha, \beta\}, \end{aligned}$$

Kaputo kəsir törəməsidir, $\Gamma(\cdot)$ -qamma funksiyadır. $AC_{\infty}^{\alpha}([0, T], R^n)$ ilə

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + (I_{0+}^{\alpha} \varphi)(t) = x(0) + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

şəklində göstərilə bilən funksiyalar çoxluğunu işarə edək, burada $\varphi(\cdot) \in L_{\infty}([0, T], R^n)$.

(1), (2) məsələsinin həlli dedikdə $[0, T]$ parçasında (1) tənliyini sanki hər yerdə və (2) başlanğıc şərtini adi mənada ödəyən $x(\cdot) \in AC_{\infty}^{\alpha}([0, T], R^n)$ funksiyası başa düşülür.

$(n \times n)$ ölçülü $F(t, \tau)$ matris funksiyasını

$$\begin{aligned} F(t, \tau) &= E + \frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau}^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\alpha-1} F(t, s) a_1(s) ds \\ &+ \frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_{\tau}^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\alpha-\beta-1} F(t, s) a_2(s) ds, \quad 0 \leq \tau \leq t, \end{aligned} \quad (3)$$

tənliyinin həlli kimi, $(n \times n)$ ölçülü $F_1(t)$ matris funksiyasını isə

$$F_1(t) = E + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F(t, \tau) a_1(\tau) d\tau \quad (4)$$



münasibəti ilə təyin edək, burada $E - (n \times n)$ ölçülü vahid matrisdir.

Qeyd edək ki, (3) tənliyinin yeganə kəsilməz $F(t, \tau)$, $(t, \tau) \in Q = \{(t, \tau) \in [0, T] \times [0, T] \mid t \geq \tau\}$ həllinin olduğu isbat olunur.

Teorem. Əgər $a_i \in L_\infty([0, T], R^{n \times n})$, $i = 1, 2$, $f(\cdot) \in L_\infty([0, T], R^n)$, $x_0 \in R^n$ olarsa, (1), (2) məsələsinin

$$x(t) = F_1(t)x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} F(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

şəklində göstərilə bilən yeganə həlli var, burada $F(t, \tau)$ matris funksiyası (3) matris tənliyinin həlli kimi, $F_1(t)$ isə (4) münasibəti ilə təyin olunur.