



BİR SİNİF REKURRENT ARDICILLIQLARIN TƏDQIQI

ƏLİ MUSTAFA OĞLU ƏHMƏDOV, SÜLEYMAN HAFİZ OĞLU BAĞIROV

Bakı Dövlət Universiteti
ali.akhmedov@rambler.ru, suleymanbagirov5@gmail.com

Bu işdə rekurrent ardıcılıqların köməyi ilə müxtəlif ardıcılıqların hədləri cəmini hesablamaq üçün n nömrəsindən asılılıq ifadələrinin alınması üsulu göstərilmişdir.

Tərif 1. Tutaq ki, $q_1, q_2, \dots, q_k (q_k \neq 0)$ kompleks ədədləri üçün $\{a_n\}$ ardıcılığı

$$a_{n+k} = q_1 a_n + q_2 a_{n+1} + \dots + q_k a_{n+k-1} \quad (1)$$

münasibətilə əlaqələndir. Onda $\{a_n\}$ ardıcılığına k tərtibli qayıdan (rekurrent) ardıcılıq deyilir.

Bu tip ardıcılıqlar Ə.M. Əhmədov tərəfindən tədqiq olunmuşdur [1],[2].

Qayıdan ardıcılığın hədləri cəmi

Fərz edək ki bizə, k tərtibli qayıdan $\{a_n\}$ ardıcılığı verilmişdir. Bu ardıcılığın hədləri

$$a_{n+k} = q_1 a_n + q_2 a_{n+1} + \dots + q_k a_{n+k-1} \quad (1)$$

münasibəti ilə bir-biri ilə bağlıdır. Bu ardıcılığın hədlərindən düzəldilmiş sonlu cəmlər ardıcılığına baxaq:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Alınmış yeni ardıcılığın hədləri üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$S_1 = a_1, S_2 - S_1 = a_2, \dots, S_{n+k} - S_{n+k-1} = a_{n+k} \quad (2)$$

(2)-ni (1)-də yerinə yazdıqda alırıq,

$$S_{n+k} - S_{n+k-1} = q_1(S_n - S_{n-1}) + q_2(S_{n+1} - S_n) + \dots + q_k(S_{n+k-1} - S_{n+k-2})$$

Alınmış ifadəni sadələşdirsək,

$$S_{n+k} = -q_1 S_{n-1} + (q_1 - q_2) S_n + \dots + (q_k + 1) S_{n+k-1} \quad (3)$$

münasibətini alırıq.

(3) münasibəti göstərir ki, k tərtibli qayıdan ardıcılığın sonlu cəmlərindən ibarət ardıcılıq $k+1$ tərtibli qayıdan ardıcılıqdır.

$\sigma_m(n) = 1^m + 2^m + \dots + n^m$ cəmi üçün rekurrent münasibəti təyin edək. Burada m natural ədəddir.

Nyuton binomuna əsasən yazsaq bilirik:

$$(n+1)^m = n^m + C_m^1 n^{m-1} + C_m^2 n^{m-2} + \dots + C_m^{m-1} n + C_m^m;$$

$$((n-1)+1)^m = (n-1)^m + C_m^1 (n-1)^{m-1} + \dots + C_m^{m-1} (n-1) + C_m^m;$$

.....

$$(2+1)^m = 2^m + C_m^1 2^{m-1} + C_m^2 2^{m-2} + \dots + C_m^{m-1} 2 + C_m^m;$$

$$(1+1)^m = 1^m + C_m^1 1^{m-1} + C_m^2 1^{m-2} + \dots + C_m^{m-1} 1 + C_m^m.$$

Alınmış bərabərlikləri alt-alta toplayaq və oxşar hədləri islah edək.



$$(n+1)^m = 1 + C_m^1 \sigma_{m-1}(n) + C_m^2 \sigma_{m-2}(n) + \dots + C_m^{m-1} \sigma_1(n) + C_m^m \sigma_0(n).$$

Beləliklə,

$$\sigma_{m-1}(n) = \frac{1}{C_m^1} \left((n+1)^m - 1 - C_m^2 \sigma_{m-2}(n) - \dots - C_m^{m-1} \sigma_1(n) - C_m^m \sigma_0(n) \right).$$

Aşkardır ki,

$$\sigma_0(n) = 1^0 + 2^0 + \dots + n^0 = n, \quad \sigma_1(n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\begin{aligned} \sigma_2(n) &= \frac{1}{C_3^1} \left((n+1)^3 - 1 - C_3^2 \sigma_1(n) - C_3^3 \sigma_0(n) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left((n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Anoloji olaraq $\sigma_3(n) = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ olduğunu alırıq. Daha yüksək dərəcəli cəmlər də eyni üsulla tapılır.

Göründüyü kimi bu üsulla tapılan $\{a_n\}$ ardıcılığının hədləri cəmi məlum digər üsullardan daha az vaxt tələb edir. Arximed tərəfindən verilən hədlərin cəmi üçün həndəsi üsul çox vaxt aparır. Riyazi induksiya metodu ilə istənilən həll üsulu isə ifadənin əvvəlcədən məlum olmasını tələb edir. Yəni, riyazi induksiya üsulunda məlum düsturun doğruluğu göstərilir, lakin ifadənin hardan alınması aydın olmur.

Ədəbiyyat

1. Akhmedov A.M. On recurrent processes and associated with them spectral problems. Proceedings of the Intern. COIA, Vol 1, July, 2018, Baku.
2. Akhmedov A.M., I.V.Safarli. On the Recurrence Sequence and Their Applications, News of Baku University, pp.7, 2020