



CIRLAŞAN ELLİPTİK TƏNLİKLƏRİN MÜSBƏT HƏLLƏRİNİN ARAŞDIRILMASI

MURĞUZALI İSLAM OĞLU ƏLİYEV

Bakı Dövlət Universiteti
aliyevm@list.ru

Tutaq ki, D oblastı sərhədi x oxunun AB parçası və $y > 0$ yarımüstəvisində yerləşən ucları A və B nöqtələrinə söykənən σ əyrisindən ibarətdir. Bu oblastda

$$yu_{yy} + u_{xx} + ku_y + f(x, y, u) = 0 \quad (1)$$

Tənliyinə baxaq. Burada $k < 1$ sabit, f isə öz argumentlərinə nəzərən verilmiş funksiyadır. (1) tənliyi D oblastında elliptik olmaqla, oblastın sərhədinin AB hissəsində parabolik cırışır.

D oblastı normal olaraq oblast adlanan oblastı götürəcəyik. Bu oblastda σ əyrisi tənkiyi $x^2 + 4y = a^2$ şəklində olan və ucları $A(-a, 0)$ və $B(a, 0)$ nöqtələrində yerləşən əyridir.

Normal D oblastında (1) tənliyinin iki dəfə kəsilməz törəmələrə malik elə həllini tapmalı ki. Bu həll qapalı $\bar{D}$ oblastında kəsilməz olsun və oblastın $\partial D = \sigma + [-a, a]$ sərhəddində verilmiş qiymətləri almış olsun.

Ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, ∂D sərhədinə sıfır qiymətləri verilmişdir.

İsbat etmək olur ki, əgər f funksiyası $(x, y) \in D$ və istənilən u üçün

$$\frac{\partial f}{\partial u} \leq 0 \quad (2)$$

Şərtini ödəyirsə, onda (1) tənliyi üçün Dirixle məsələsinin birdən çox həlli ola bilməz.

Əvvəlcə

$$Tu \equiv yu_{yy} + u_{xx} + ku_y = F(x, y) \quad (3)$$

tənliyinə baxaq və bu tənliyin normal D oblastının $\partial \Omega = \sigma + AB$ sərhədində sıfır çevrilən həllini quraq. Lagranj mənadı Tu operatoru ilə qoşma operator

$$T^*v \equiv yv_{yy} + v_{xx} + (2 - k)u_y \quad (4)$$

operatorudur. Məlumdur ki, [1] $k < 1$ olduqda

$$g(x, y; \xi, t) = jr_1^{-2\beta} F(\beta, \beta, 2\beta, 1 - \frac{r^2}{r_1^2}) \quad (5)$$

funksiyası (x, y) və (ξ, t) dəyişənlərinə nəzərən $T^*v = 0$ tənliyinin həllidir və $x = \xi, y = t > 0$ nöqtəsində loqarifmik məxsusiyyəti var, burada

$$\left. \begin{matrix} r_1^2 \\ r^2 \end{matrix} \right\} = (x - \xi)^2 + 4(\sqrt{y} \pm \sqrt{t})^2, \quad \beta = \frac{3}{2} - k,$$

F - hiperhəndəsi funksiya, j - isə hər hansı ədəddir. (3) və (4) bərabərliklərində istifadə edərək, göstərək ki,

$$T(y^{1-k}u) = y^{1-k}T^*u \quad (6)$$

münasibəti doğrudur.

$$\begin{aligned} T(y^{1-k}u) &= y(y^{1-k}u)_{yy} + y^{1-k}u_{xx} + k(y^{1-k}u)_y = \\ &= y[(1-k)y^{-k}u + y^{1-k}u_y]_y + y^{1-k}u_{xx} + \\ &+ k[(1-k)y^{-k}u + y^{1-k}u_y] = y[-k(1-k)y^{-k-1}u + \\ &+ (1-k)y^{-k}u_y + y^{1-k}u_{yy}] + y^{1-k}u_{xx} + k(1-k)y^{-k}u + \\ &+ ky^{1-k}u_y = y^{2-k}u_{yy} + 2(1-k)y^{1-k}u_y + y^{1-k}u_{xx} = \\ &= y^{1-k}[yu_{yy} + u_{xx} + (2-k)u_y] = y^{1-k}T^*u \end{aligned}$$

(6) bərabərsizliyindən alınır ki, (5) bərabərliyi ilə təyin olunmuş $g(x, y; \xi, t)$ funksiyası üçün $y^{1-k}g(x, y; \xi, t)$ funksiyası (x, y) dəyişənlərinə nəzərən $Tu = 0$ tənliyinin həllidir. Digər tərəfdən göstərmək olar ki, $w(x, y)$ funksiyası $T^*w = 0$ tənliyinin həllidirsə, onda

$$v(x, y) = \left(\frac{R}{a}\right)^{2k-3} w\left(\frac{a^2x}{R^2}, \frac{a^4y}{R^4}\right), \quad R^2 = x^2 + 4y$$

funksiyası da $T^*v = 0$ tənliyinin həllidir. Bu isə o deməkdir ki,

$$y^{1-k}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2k-3} g\left(x, y; \frac{a^2\xi}{\rho^2}, \frac{a^4t}{\rho^4}\right), \quad \rho^2 = \xi^2 + 4t$$

Funksiyası da (ξ, t) dəyişənlərinə nəzərən $T^*v = 0$ tənliyi, (x, y) dəyişənlərinə nəzərən isə $Tu = 0$ tənliyini ödəyəcək.

İndi

$$G(x, y; \xi, t) = y^{1-k}g(x, y; \xi, t) - y^{1-k}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2k-3} g\left(x, y; \frac{a^2\xi}{\rho^2}, \frac{a^4t}{\rho^4}\right) \quad (7)$$

funksiyası düzəldək. Bu funksiya aşağıdakı xassələri ödəyir.

- 1) (x, y) dəyişənlərinə nəzərən $Tu = 0$ tənliyini, (ξ, t) dəyişənlərinə nəzərən $T^*v = 0$ tənliyini ödəyir.
- 2) $x = \xi, y = t > 0$ nöqtəsində loqarifmik məxsusiyyəti var;
- 3) $(x, y) \in \sigma$ və $y = 0$ üçün $G = 0$

Asanlıqla göstərmək olar ki, hissə-hissə hamar sərhədi olan D oblastı üçün

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} (vTu - uT^*v) d\xi dt &= \int_{\Gamma_1} \left(v \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) dt - \\ &- \int_{\Gamma_1} \left[t \left(v \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial t} \right) + (k-1)uv \right] d\xi \end{aligned} \quad (8)$$



Grin düsturu doğrudur. Normal oblastın ixtiyarı daxili nöqtəsinin kiçik ε ətrafını ayıraq:

$$d_\varepsilon : (x - \xi)^2 + 4\left(\sqrt{y - \sqrt{t}}\right)^2 \leq \varepsilon \text{ və } D - d_\varepsilon$$

Oblastına (8) düsturunu tətbiq edək.

Bu zaman u funksiyası olaraq (3) tənliyinin ∂D üzərində sıfıra bərabər olan həlli $v(\xi, t)$ olaraq, $G(x, y; \xi, t)$ götürək. Bu bərabərlikdə $\varepsilon \rightarrow 0$ şərtlə limitə keçsək

$$u(x, y) = - \int_D \int G(x, y; \xi, t) F(\xi, t) d\xi dt \quad (9)$$

alırıq.

Lemma. Əgər $F(x, y)$ funksiyası $\bar{D}$ oblastından kəsilməz, D oblastında kəsilməz törəmələrə malikdirsə, onda (9) bərabərliyinin təyin etdiyi $u(x, y)$ funksiyası (3) tənliyinin ∂D sərhədində sıfıra bərabər olan həllidir.

(9) bərabərliyi ilə təyin olunan funksiyanın (3) tənliyini ödəməsi və σ sərhədi üzərində sıfıra çevrilməsi potensiallar nəzəriyyəsində olan kimi göstərilir. Göstərək ki, (9) bərabərliyi ilə təyin olunan $u(x, y)$ funksiyası $y = 0$ olduqda sıfıra çevrilir. (9) bərabərliyində G əvəzinə (7) ifadəsini yazsaq integral iki integrala bölünür. Bu bərabərliyin ikinci integralı $y \rightarrow 0$ -da y^{1-k} kimi sıfıra yaxınlaşır. Birinci toplanana uyğun integrala baxaq.

$$J(x, y) = y^{1-k} \int_D \int g(x, y; \xi, t) F(\xi, t) d\xi dt.$$

(5) ifadəsini nəzərə alsaq,

$$|J| \leq j M y^{1-k} \int_D \left| r_1^{-2\beta} F(\beta, \beta, 2\beta, 1 - \frac{r^2}{r_1^2}) \right| d\xi dt$$

yaza bilərik, burada

$$M = \max_{\bar{D}} |F(x, y)|.$$

Kafi qədər kiçik y -lər üçün

$$|J| \leq O(1) y^{1-k} \int_D \int r_1^{-2k-3} d\xi dt$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Buradan

$$|J_1| \leq a(1) y^{1-k} \int_0^{\frac{a^2}{4}} \left\{ \int_{-\sqrt{a^2-4t}}^{\sqrt{a^2-4t}} \left[(x - \xi)^2 + 4(\sqrt{y} + \sqrt{t})^2 \right] \frac{2k - \xi}{2d\xi} \right\} dt,$$

burada $\xi = x + 2(\sqrt{y} + \sqrt{t})\lambda$ əvəz etsək,



$$\begin{aligned}
 |J| &\leq O(1)y^{1-k} \int_0^{a^2/4} (\sqrt{y} + \sqrt{t})^{2k-2} \times \\
 &\times \left\{ \int_{\frac{-x+\sqrt{a^2-4t}}{2(\sqrt{y}+\sqrt{t})}}^{\frac{-x+\sqrt{a^2-4t}}{2(\sqrt{y}+\sqrt{t})}} (1+\lambda)^{\frac{2k-3}{2}} d\lambda \right\} dt \leq \\
 &\leq O(1)y^{1-k} \int_{-\infty}^{\infty} (1+\lambda^2)^{\frac{2k-3}{2}} d\lambda \int_0^{a^2/4} (\sqrt{y} + \sqrt{t})^{2k-2} dt \leq \\
 &\leq O(1)y^{1-k} \int_{\sqrt{y}}^{\frac{a}{2}+\sqrt{y}} z^{2(k-1)} (z - \sqrt{y}) dz
 \end{aligned}$$

alırıq. Bir sözlə

$$|u| \leq \begin{cases} O(1)(y^{1-k} + y) & k \neq 0 \\ O(1)(y \ln y + y) & k = 0 \end{cases}$$

Bununla, lemma isbar olunur.

Lemmanın kəməyilə (1) tənliyinin oblastın sərhədində sıfıra bərabər olan Dirixle məsələsinin həllini

$$u(x, y) = - \int_D G(x, y; \xi, t) f(\xi, t; u) d\xi dt \quad (10)$$

Şəklində yazı bilərik.

Teorem. Normal D oblastında $(x, y) \in D$ və ixtiyari u üçün $\frac{\partial f}{\partial u} \leq 0$ və $f(x, y, u) \leq 0$ şərtləri daxilində (1) tənliyi üçün Dirixle məsələsinin yeganə müsbət həlli var.