



ÇOXÖLÇÜLÜ OBLASTIN SƏRHƏDİ VASİTƏSİLƏ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRT

RUSLAN ALLAHVERƏN OĞLU HƏMİDOV

Lənkəran Dövlət Universiteti
rqamidov@mail.ru

İş elliptik tip tənliklər üçün çoxölçülü oblastın sərhədi vasitəsi ilə optimal idarəetmə məsələsinin həlli üçün zəruri şərtin tədqiqinə həsr olunmuşdur. Baxılan məsələ üçün keyfiyyət meyarının birinci variasiyasının ifadəsi və variasional bərabərsizliyi şəkilində zəruri şərt tapılmışdır [1,2].

Tytar ki, D n - ölçülü R^n Evklid fəzasında kifayət qədər hamar Γ sərhədinə malik məhdud oblastdır və D' $n-1$ ölçülü R^{n-1} fəzasında D - nin ortoqonal proyeksiyasıdır. Tutaq ki, $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, y) \in D$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $x' \in D' \subset R^{n-1}$ və

$$Au \equiv - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \quad \text{ikinci tərtib elliptik operator,}$$

$a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, $c(x)$ - ölçülən məhdud əmsallardır.

$$Au = f(x), \quad x \in D \quad (1)$$

tənliyi üçün 1-ci və 2-ci sərhəd şərtləri verilmişdir:

$$u|_{\Gamma} = g_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial N}|_{\Gamma} = g_2(x), \quad x \in \Gamma, \quad (2)$$

burada $f(x) \in L_2(D)$, $g_1(x) \in W_2^{1/2}(\Gamma)$, $g_2(x) \in L_2(\Gamma)$ - verilmiş funksiyalar, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$

, $0 < \mu_2 \leq c(x) \leq \mu_3$, $\mu_0 \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \zeta_i \zeta_j \leq \mu_1 \sum_{i=1}^n \zeta_i^2$, $\forall \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in R^n$, $\forall i, j = \overline{1, n}$, μ_i -

$i = 0, 1, 2, 3$ - müsbət ədədlərdir. Sadəlik üçün (2) sərhəd şərtlərini bircins qəbul edək, yəni $g_1(x) = g_2(x) = 0$. Əgər bu funksiyalar sıfırdan fərqli olarsa, onda əvəzetmə ilə onları bircins şəkllə gətirmək olar [3]. Tənliyin birinci sərhəd şərtini ödəyən həllini $u_1(x)$, ikinci sərhəd şərtini ödəyən həllini isə $u_2(x)$ ilə işarə edək. (1), (2) sərhəd məsələlərinin həlli aşağıdakı integral bərabərliyi ödəyən funksiya başa düşülür:

$$\int_D \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_k(x)}{\partial x_i} + \left[\sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_i} + c(x)u_k(x) - f(x) \right] \eta_k(x) \right\} dx = 0, \quad (3)$$

burada $k = 1, 2$, $u_1(x)$ və $u_2(x)$ isə $\overset{\circ}{W}_2^1(D)$ və $W_2^1(D)$ fəzalarındandır, $\eta_1(x)$ və $\eta_2(x)$ isə, uyğun olaraq, bu fəzalar-lardan olan ixtiyari elementlərdir.

İndi isə oblastın sərhədi vasitəsilə optimal idarəetmə məsələsinə baxaq. Tutaq ki,

$V = \left\{ v : v = v(x') \in W_{\infty}^1(D'), 0 < v_0 \leq v(x') \leq v_1, |v_x(x')| \leq v_2, \forall x' \in D' \right\}$ mümkün idarəedicilər

çoxluğunda aşağıdakı funksionalın minimumunu tapmaq tələb olunur:

$$J_{\alpha}(v) = \|\omega(v)(u_1 - u_2)\|_{L_2(D)}^2 + \alpha \|v - \bar{v}\|_{L_2(D)}^2 \rightarrow \inf, \alpha \geq 0, \quad (4)$$

burada $\omega(v)$ funksiyası $[v_0, v_1]$ parçasında kəsilməz diferensiallanan funksiya, $\bar{v} \in L_2(D)$ fəzasında verilmiş element, $\alpha \geq 0$ ədədi parametrdir. (1) - (4) məsələsi D oblas-tının Γ sərhədi vasitəsilə optimal idarəetmə məsələsidir. D oblastının Γ sərhədi vasitəsilə optimal idarəetmə məsələsinin həlli üçün zəruri şərtin tədqiqi üçün əvvəlcə koordinat sisteminin çevirməsinə baxılır. Tutaq ki, $a_{ij}(x, v, v_x)$, $b_i(x, v, v_x)$, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, $c(x, v)$ əmsalları hər bir $v = v(x) \in V$ üçün müntəzəm elliptiklik şərtini ödəyir. Sadəlik üçün əvvəlki işarələr saxlanılır.

Fərz edək ki, $W_2^1(D)$ fəzasında $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ funksiyaları, uyğun olaraq, hər bir $v = v(x) \in V$ üçün $u_k \equiv u_k(x) \equiv u_k(x; v)$, $k = 1, 2$ əsas sərhəd məsələsinə uyğun aşağıdakı məsələnin ümümləşmiş həlləridir:

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, v, v_x) \frac{\partial \psi_k(x)}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i(x, v, v_x) \cdot \psi_k(x)) + c(x, v) \psi_k = 2v(x) \cdot (u_1(x) - u_2(x)), \quad (5)$$

$$\psi_1|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial N} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (6)$$

Bu məsələ qoşma məsələ adlanır.

Teorem 1. Tutaq ki, yuxarıda qeyd olunan şərtlərlə yanaşı aşağıdakı şərtlər də ödənilir: 1) $a_{ij}(x, v, w)$, $b_i(x, v, w)$, $i, j = \overline{1, n}$ funksiyaları, v və w dəyişənlərinə görə birinci tərtib törəmə-lərilə birgə kəsilməzdirlər və $x \in D$, $(v, w) \in R^2$ olduqda bu dəyişənlərə görə Lipşis şərtini ödəyir; 2) $c(x, v)$ və $f(x, v)$ funksiyaları və onların v dəyişəninə görə birinci tərtib törəməsi kəsilməzdir və bu dəyişənlərə görə $x \in D$, $v \in V$ olduqda Lipşis şərtini ödəyir. Onda $J_{\alpha}(v)$ funksionalının V çoxluğunda birinci variasiyası var və aşağıdakı şəkildədir:

$$\begin{aligned} \delta J_{\alpha}(v, \Delta v) = & - \int_D \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}(x, v, v_x)}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial a_{ij}(x, v, v_x)}{\partial w} \Delta v_x \right) \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} - \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_j} \right) + \right. \\ & + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial b_i(x, v, v_x)}{\partial v} \cdot \Delta v + \frac{\partial b_i(x, v, v_x)}{\partial w} \cdot \Delta v_x \right) \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \psi_1 - \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \psi_2 \right) + \\ & + \frac{\partial c(x, v)}{\partial v} (u_1 \psi_1 - u_2 \psi_2) \Delta v - \frac{\partial f(x, v)}{\partial v} (\psi_1 - \psi_2) \Delta v \Big\} dx + \\ & + \int_D (u_1 - u_2)^2 \cdot \Delta v(x) dx + 2\alpha \int_D (v - \bar{v}) \cdot \Delta v(x) dx, \end{aligned} \quad (6)$$

burada $\alpha > 0$, $\Delta v \in W_{\infty}^1(D)$ və $v + \Delta v \in V$.



Teorem 2. Tutaq ki, teorem 1-in şərtləri ödənilir. Onda $v^* \in V$ idarəedicinin optimallığı üçün aşağıdakı variasional bərabərsizliyinin ödənilməsi zəruridir.

$$- \delta J_{\alpha}(v, \Delta v) \geq 0,$$

burada $v = v^* \in V$, $\alpha > 0$, $\Delta v \in W_{\infty}^1(D)$ и $v + \Delta v \in V$.

Ədəbiyyat

1. Искендеров А.Д., “Об условной корректности задач с неизвестной границей области” – ДАН СССР, 1990, т.314, № 5, с.1061-1064
2. Искендеров А.Д., Гамидов Р.А., “Корректность задачи оптимального управления границей области для эллиптических уравнений” – ЛГУ, «Научные Вести», серия естественных наук, 2018, № 2, стр.220-229
3. Ладыженская О.А., Уралъцева Н.Н. “Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа” – М.: Наука, 1964, 664 с.