



SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN VƏ ONUN TÖRƏMƏLƏRİNİN QIYMƏTLƏNMƏLƏRİ

HƏYAT İNTİQAM QIZI İSRAYILOVA

Bakı Dövlət Universiteti
israyilova.hayat@adpk.edu.az

Aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$Ly \equiv y' + p(x)y' - q(x)y = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$L_j y \equiv \alpha_j y - (-1)^j \beta_j y' = \alpha_j, \quad x = j, \quad j = 0, 1, \quad (2)$$

burada $0 \leq \alpha_j \leq 1$, $\alpha_j + \beta_j = 1$, $\alpha_0 + \alpha_1 > 0$, $p(x), q(x) \geq 0$ ($0 \leq x \leq 1$), $f(x)$ -isə $[0, 1]$ parçasında verilmiş kəsilməz funksiyalardır, α_j verilmiş kəsilməz funksiyalardır, $f^{(m)}(x)$ $[0, 1]$ parçasında kəsilməz olarsa, onda deyəcəyik ki, $f \in C_m[0, 1]$

Lemma 1.1 Fərz edək ki, $y \in C_2[0, 1]$ (1), (2) məsələsinin həllidir, belə ki, $f(x) \leq 0$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 0, 1$, onda $y(x) \geq 0$ ($0 \leq x \leq 1$).

İsbati. Tutaq ki, $\min_{0 \leq x \leq 1} y(x) = y(x_0) = -\varepsilon_0 < 0$, $0 \leq x_0 \leq 1$. Sərhəd şərtlərindən alırıq ki, əgər $\alpha_j > 0$ olarsa, onda $[0, 1]$ parçasının sonunda $x = j$ olduqda y özünün minimal mənfəi qiymətini ala bilməz. Əgər $\alpha_j = 0$ olarsa, onda $y'(j) = 0$ zəruridir, belə ki, $y(j) = -\varepsilon_0$. Ona görə də $y'(x_0) = 0$ və deməli

$$y'(x) = r^{-1}(x) \int_{x_0}^x r(\eta) (f(\eta) + q(\eta) (\int_{x_0}^{\eta} y'(t) dt - \varepsilon_0)) d\eta, \quad (3)$$

burada $r(x) = \exp \left\{ \int_{x_0}^x p(t) dt \right\}$. Həm də $\alpha_0 + \alpha_1 > 0$ olduğundan,

yuxarıda deyilənlərə əsasən ziddiyət alırıq, yəni $y(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$.

Nəticə 1.1 Əgər $f(x) \equiv 0$, $\alpha_j = 0$, $j = 0, 1$ olarsa, onda (1), (2) məsələsinin $C_2[0, 1]$ -də yalnız trivial həlli var. Buradan alırıq ki, (bax: [2]) ixtiyari α_j , $j = 0, 1$, və $f \in C_0[0, 1]$ üçün (1), (2) məsələsi $C_2[0, 1]$ -də birqiymətli həll edilir.

Fərz edək ki, $p, q, f \in C_n[0, 1]$, $n \geq 0$, onda (1)-dən alırıq ki, (1), (2) məsələsinin həlli $y \in C_{n+2}[0, 1]$, belə ki,

$$y^{(\mu)}(x) = \alpha^\mu(x)y(x) + \beta^\mu(x)y'(x) + t^\mu(x), \quad 2 \leq \mu \leq n+2, \quad (4)$$

Lemma 1.1-ə əsasən:

$$Y^{(0)} \leq Z^{(0)} \quad (5)$$

burada z aşağıdakı sərhəd məsələsinin həllidir:



$$L^* z \equiv z'' + p(x)z' = -F, \quad 0 < x < 1, \quad l_j z = |a_j|, \quad j = 0, 1.$$

Alınan bərabərsizlikləri birləşdirərək və (5)-i nəzərə alaraq:

$$Y^{(0)} \leq Y^{*(0)} \quad (6)$$

qiymətlənməsinə gəlirik, burada

$$Y^{*(0)} = \begin{cases} \psi_0, & x_0 \geq 0, \\ \psi_1, & x_1 \geq 0, \quad x_0 < 0, \\ \min\{\phi_0, \phi_1\}, & \max\{x_0, x_1\} < 0. \end{cases} \quad (7)$$

İndi $Y^{(1)}$ -i qiymətləndirək. Məlumdur ki,

$$Y^{(1)} \leq 2Y^{(0)} / \tau + Y^{(2)} \tau / 2, \quad 0 < \tau \leq 1. \quad (8)$$

Əgər $\tau < 2/P$, $0 < \tau \leq 1$, olarsa, onda (1), (6), (8)-dən alarıq:

$$Y^{(1)} \leq (4Y^{*(0)} + \tau^2(QY^{*(0)} + F)) / (2 - P\tau)\tau. \quad (9)$$

(9)-un sağ tərəfini minimallaşdırsaq alarıq:

$$Y^{(1)} \leq Y^{*(1)}, \quad (10)$$

$$\text{burada } Y^{*(1)} = (4Y^{*(0)} + \tau_0^2(QY^{*(0)} + F)) / (2 - P\tau_0)\tau_0, \quad (11)$$

$$\tau_0 = \begin{cases} \min\{1, 2\tau^* / \Omega\}, & \Omega > 0, \\ \min\{1, 1/P\}, & \Omega = 0, \end{cases}$$

$$\tau^* = \sqrt{(PY^{*(0)})^2 + \Omega Y^{*(0)} - PY^{*(0)}}, \quad \Omega = QY^{*(0)} + F,$$

belə ki, $\tau_0 < 2/P$.

Əgər $p, q, f \in C_n[0, 1], n \geq 0$, onda (4), (6), (10)-dan aşağıdakı qiymətlənmələr alınar:

$$Y^{(\mu)} \leq Y^{*(\mu)}, \quad 2 \leq \mu \leq n+2, \quad (12)$$

burada

$$Y^{*(\mu)} \leq A^\mu Y^{*(0)} + B^\mu Y^{*(1)} + T^\mu, \quad (13)$$

$Y^{*(0)}, Y^{*(1)}$ isə (7), (11) kəmiyyətləridir.

Ədəbiyyat

1. Е.А. Волков . Разностный метод получения оценок погрешности численных решений краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения. — Докл. АН СССР, 1971, 197, № 4, 758—761.
2. Ф. Трикоми . Дифференциальные уравнения. ИЛ, 1962.