



MÜXTƏLİFLİKLƏRİN ULTRAHASİLLƏRİNİN TƏTBİQLƏRİ HAQQINDA

OQTAY MÜBARƏK OĞLU MƏMMƏDOV, AYSEL SAMİR QIZI NİFTƏLİYEVƏ

Bakı Dövlət Universiteti

okmamedov@gmail.com, ayselniftaliyeva906@gmail.com

Buradakı bütün zəruri anlayışlar [2] kitabından tapmaq olar. Heterogen cəbrlər keçən əsrin 70-ci illərindən məlumdur. Onlardan, müxtəlifliklərdən heterogen klonlara keçid zamanı istifadə edilir. Heterogen tip elə $\tau = (\alpha, T, r)$ üçlüyünə deyilir ki, α və T çoxluqlardır, r isə ixtiyari $r: T \rightarrow \bigcup \{\alpha^n: n = 1, 2, \dots\}$ funksiyasıdır. τ tipli heterogen cəbr elə $\mathbb{A} = (A_i; F_t)_{i \in \alpha, t \in T}$ cəbrinə deyilir ki, burada bütün $A_i \neq \emptyset$ və F_t elə $F_t: A_{i_1} \times A_{i_2} \times \dots \times A_{i_s} \rightarrow A_{i_{s+1}}$ funksiyasıdır ki, $r(t) = (i_1, i_2, \dots, i_s, i_{s+1})$. Əgər $s = 0$ olarsa, yəni $r(t) = (i)$ olarsa, onda F_t sadəcə A_i -də hər hansı bir konstantdır. F_t funksiyaları $\mathbb{A}$ -nın heterogen əməliyyatlarıdır. Eyni tipli heterogen cəbrlər üçün altcəbr, homomorfizm, hasil və ümumiyyətlə, aksiomatik siniflər standart təyin olunur. Eləcə də, alt-düz ayrılış haqqında məlum Birkhoff teoremi də doğrudur; onu xatırladaq.

Birkhoff teoremi. İxtiyari heterogen $\mathbb{A}$ cəbri üçün hər hansı bir alt-düz $\mu: \mathbb{A} \rightarrow \prod \{\mathbb{A}_i: i \in I\}$ ayrılışı var və burada bütün $\mathbb{A}_i$ -lər alt-düz ayrıl-mayandır.

Xüsusi növ heterogen cəbrlər müxtəlifliyinə baxaq. Onun tipi $\tau_0 = (\alpha, T, r)$ bu şəkildədir: $\alpha = \{1, 2, \dots\}$ (hesabidir);

$$T = \{(0, m, n): m, n \in \alpha\} \cup \{(1, i, n): 1 \leq i \leq n \in \alpha\};$$

$$r(0, m, n) = (n, m, m, \dots, m) \in \alpha^{n+2}; \text{ və } r(1, i, n) = (n), n \in \alpha.$$

$F_{(0, m, n)}$ funksional simvolunu C_m^n kimi (kompozit), $F_{(1, i, n)}$ funksional simvolunu isə e_i^n kimi (proyeksiya) işarə edək. Aşağıdakı eyniliklərlə təyin olunan τ_0 tipli heterogen cəbrlər müxtəlifliyi K_0 -a baxaq:

$$\begin{aligned} C_m^p(z, C_m^n(y_1, x_1, \dots, x_n), \dots, C_m^n(y_p, x_1, \dots, x_n)) &= \\ &= C_m^n(C_m^p(z, y_1, \dots, y_p), x_1, \dots, x_n), \quad m, n, p = 1, 2, \dots, \\ C_m^n(e_i^n, x_1, \dots, x_n) &= x_i, \quad m = 1, 2, \dots, 1 \leq i \leq n < \omega; \\ C_n^n(y, e_1^n, \dots, e_n^n) &= y, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Teylor (1973) göstərmişdir ki, K_0 -dakı qeyri-izomorf heterogen cəbrlərlə qeyri-ekvivalent (adi cəbrlər) müxtəliflikləri arasında elə $C\ell(M) \leftrightarrow M$ biyeksiyası var ki, bu iki şərt ödənilir: (1) $M \simeq M' \Leftrightarrow C\ell(M) \cong C\ell(M')$ və (2) əgər MM' -in altmüxtəlifliyidirsə, onda süryektiv $C\ell(M') \rightarrow C\ell(M)$ homomorfizmi var. Burada

$C\ell(M) = \langle A_n = F_n(M); C_m^n, e_i^n \rangle_{n \in \alpha, (0, m, n) \in T, (1, i, n) \in T}$, $F_n(M)M$ -də n sayda sərbəst doğurarı olan sərbəst cəbrin daşıyıcısıdır, $e_i^n = x_i$ və $C_m^n(\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sigma(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Teylorun göstərmiş olduğu biyeksiyadan istifadə edərək bir çox halda müxtəlifliklərin aksiomlanan sinifləri üçün uyğun teoremləri almaq olar. Tutaq ki, $\mathcal{FI}$ çoxluğu üzərində hər hansı bir filtdir. Heterogen klonların $\mathcal{F}$ -ə nəzərən filtrlənmiş hasil $\prod_i C\ell(M_i) / \mathcal{F}$ yenə K_0 -da olacaq. Ona görə də $M = \times \{M_i: i \in I\}$ müxtəlifliyinin elə $M_{I, \mathcal{F}}$ altmüxtəlifliyi var ki,



$C\ell(M_{I,\mathcal{F}}) \cong \prod_i C\ell(M_i)/\mathcal{F}$. Bu $M_{I,\mathcal{F}}$ müxtəlifliyinə $\{M_i\}_{i \in I}$ ailəsinin $\mathcal{F}$ -ə nəzərən filtrlənmiş hasili deyilir. Onda təbii olaraq ultrahasillər və ultradərəcələr təyin olunur. Müxtəlifliklərin ultra-hasillərini Maltsev siniflərinin alternativ təsvirində istifadə etmək olar; məsələn, güclü Maltsev sinifində (S -sinifində), xüsusi Maltsev sinifində (S_δ -sinifində), ümumiləşmiş Maltsev sinifində (S_σ -sinifində) və $S_{\delta\Sigma}$ -sinifində.

Teorem 1. Müxtəlifliklər sinifi K yalnız və yalnız o zaman ümumi-ləşmiş Maltsev sinifidir (yəni, S_σ -sinifidir) ki, K aşağıdakı şərtləri ödəsin:

- (a) K filtrlənmiş dərəcələrə nəzərən qapalı olsun,
- (b) K altmüxtəlifliklərə nəzərən qapalı olsun,
- (c) K genişlənmələrə nəzərən qapalı olsun, və
- (d) K ultrahasillərə nəzərən qapalı olsun.

Teorem 2. Müxtəlifliklər sinifi K yalnız və yalnız o zaman $S_{\delta\Sigma}$ -sinifi-dir ki, K aşağıdakı şərtləri ödəsin:

- (a) K filtrlənmiş dərəcələrə nəzərən qapalı olsun,
- (b) K altmüxtəlifliklərə nəzərən qapalı olsun,
- (c) K genişlənmələrə nəzərən qapalı olsun, və
- (d) $\overline{K}$ ultradərəcələrə nəzərən qapalı olsun.

Qeyd 1. Burada $\overline{K}$ sinifi K -nın bütün müxtəlifliklər sinifində tamam-layıcısıdır.

Qeyd 2. K genişlənmələrə nəzərən qapalıdır şərti o deməkdir ki, ixti-yari $M \in K$ üçün əgər M hər hansı bir M' müxtəlifliyinin M -ə qədər reduktu ilə dogurulursa, onda $M' \in K$.

Nəticə 1. Müxtəlifliklər sinifi K yalnız və yalnız o zaman S -sinifidir ki, $KS_{\delta\Sigma}$ -sinifi olsun, K filtrlənmiş hasillərə nəzərən qapalı olsun və $\overline{K}$ ultrahasillərə nəzərən qapalı olsun.

Nəticə 2. Müxtəlifliklər sinifi K yalnız və yalnız o zaman S -sinifidir ki, K eyni zamanda həm S_δ -sinifi, həm də S_σ -sinifi olsun.

Nəticə 2 tamamilə fərqli texnika vasitəsilə Bolduin və Bermam [1] tərəfindən isbat edilmişdir.

Ədəbiyyat

1. J.Baldwin and J.Berman. A model theoretic approach to Malcev conditions. The Journal of Symbolic Logic, v.42, №2, 1977, 277-288.
2. C.Bergman. Universal Algebra. London, CRC Press, 2012, 308 pp.