



TƏRS TRIQONOMETRİK FUNKSIYALAR ARASINDA ƏLAQƏ

ELNARƏ M.OSMANOVA

elnare.osmanova.96@gmail.com

Funksiya verildikdə onun tərsi olan funksiyasını (əgər varsa) tapmaq mümkündür. Tərs triqonometrik funksiyaların tapılmasının da böyük əhəmiyyəti var. Onları qısaca arksinüs, arqsinüs, arqcosinus, arctanüs adlandırırlar.

Triqonometrik funksiyalara bütün ədəd oxu üzərində deyil, monoton olduqları hər hansı parçada baxıldıqda onların tərs funksiyalarının birqiymətli olmasını söyləmək olar.

Teorem. Hər hansı intervalda birqiymətli monoton funksiyanın tərsi var və tərs funksiya birqiymətli və monotondur.

$y = \sin x$ ($|y| \leq 1$) bərabərliyində (x – bucaq və ya qövsdür) x bucağı $-\frac{\pi}{2}$ -dən $+\frac{\pi}{2}$ -yə qədər dəyişərsə, həmin bərabərlik hər bir y üçün ancaq bir x bucağını müəyyən edir. Bu bucağa y ədədinin arksinusu demək və $y = \arcsin x$ şəklində yazmaq qəbul edilmişdir.

$y = \arcsin x$ funksiyası $y = \text{Arcsin } x$ funksiyasının baş qiyməti adlanır. Bunun kimi də, $\arccos x$, $\arctg x$, $\text{arccotg } x$ funksiyaları uyğun olaraq, $\text{Arc cos } x$, $\text{Arctg } x$, $\text{Arcctg } x$ funksiyalarının baş qiymətləridir.

Yuxarıda verdiyimiz tərifdən alınır ki, $y = \arcsin x$ bərabərliyi aşağıdakı yazılışlarla eynigüclüdür:

$$1) -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \quad (|x| \leq 1), \quad 2) \sin y = x.$$

$0 \leq x \leq 1$ olduqda $y = \arcsin x$ bərabərliyi

$$2) 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \quad 2) \sin y = x \text{ yazılışı ilə,}$$

$-1 \leq x \leq 0$ olduqda $y = \arcsin x$ bərabərliyi

$$3) -\frac{\pi}{2} \leq y \leq 0; \quad 2) \sin y = x \text{ yazılışı ilə eynigüclüdür.}$$

Eləcə də $y = \arccos x$ və $y = \arctg x$ bərabərlikləri uyğun olaraq,

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \pi \\ \cos y = x \end{cases} (|x| \leq 1) \text{ və } \begin{cases} 0 \leq y < \frac{\pi}{2}, \\ \text{tg } y = x \end{cases} (x \geq 0) \quad \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < y \leq 0, \\ \text{tg } y = x \end{cases} (x \leq 0)$$

yazılışları ilə eynigüclüdür.

Əgər $y = f(x)$ və $y = \varphi(x)$ funksiyaları qarşılıqlı tərs funksiyalardırsa, onda



$$f[\varphi(y)] = y \text{ və } \varphi[f(x)] = x.$$

Buna görə də aşağıdakıları yazmaq olar:

$$\sin(\arcsin x) = x, \cos(\arccos x) = x, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x. \quad (2)$$

Burada (1) bərabərlikləri $|x| \leq 1$ olduqda, (2) bərabərlikləri isə x -in istənilən həqiqi qiymətlərində ödənilir.

Arkfunksiyalar üzərində triqonometrik əməllər. Tutaq ki, F , hər hansı triqonometrik funksiyanın xarakteristikasıdır. Yuxarıdakı (1) və (2) bərabərliklərindən istifadə edərək.

$F(\arcsin x)$, $F(\arccos x)$, $F(\operatorname{arctg} x)$, $F(\operatorname{arcctg} x)$ şəklində ifadələri hesablayaq.

1. $\cos(\arcsin x)$. Məlumdur ki, $\cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 y}$. Bu bərabərlikdə $y = \arcsin x$ qəbul edərək,

$$\cos(\arcsin x) = \pm \sqrt{1 - [\sin(\arcsin x)]^2} = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Burada, $y = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olduğunu və həmin parçada $\cos y \geq 0$ olmasını nəzərə alsaq:

$$\cos(\arcsin x) = \pm \sqrt{1 - x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

2. Yuxarıdakı bərabərliklərdən istifadə etsək:

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3. (2) bərabərliyindən istifadə etsək:

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\arcsin x)} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

Eyni qayda ilə aşağıdakı bərabərlikləri də isbat etmək olar:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, \sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}.$$

Bu düsturların isbatını oxuculara həvalə edirik.

Tamamlayıcı bucaqların triqonometrik funksiyaları arasındakı əlaqədən istifadə edərək, aşağıdakı teoremi isbat etmək olar.

Teorem. x -in $[-1, 1]$ parçasındakı bütün qiymətlərində

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \text{ münasibəti doğrudur.}$$

İsbatı. Teoremin şərtini ödəyən hər bir x üçün



$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$ olduğundan $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$ ədədi $[0, \pi]$ parçasında yerləşir:

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin x \leq \pi.$$

Onda $\cos\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right] = \sin(\arcsin x) = x.$

Ədəbiyyat

1. Abdullayeva C. N. Tərs triqonometrik funksiyalar. Dərs vəsaiti. Bakı-2021, 181 s.
2. Quliyev A, Abdullayeva C.N. və b. Triqonometriya. Bakı-2017, 352 s.
3. Kolmoqorov A.N., Abramov A.N. və b. Cəbr və analizin başlanğıcı. Ümumtəhsil məktəblərinin 10-cu sinif dərsləri, 341 s.
4. Məmmədov R., Xəlilov və b. Riyaziyyat. I hissə. Abituriyentlər və hazırlıq şöbəsinin dinləyiciləri üçün. Maarif-1993, 425 s.
5. Фалин Г.И., Фалин А.И. Обратные тригонометрические функции. 10.М.: Экзамен, 2012. 221с.