



KƏSİLƏN HƏLLƏ MALİK İKİTƏRTİBLİ HİPERBOLİK TƏNLIYIN BAŞ ƏMSALININ TAPILMASI MƏSƏLƏSİ

HAMLET FƏRMAN OĞLU QULİYEV, İDRAK MİRZƏBABA OĞLU ƏSGƏROV

Bakı Dövlət Universiteti, Lənkəran Dövlət Universiteti
hamletquliyev51@gmail.com, idrakasgerov@gmail.com

Tutaq ki, $Q = \Omega \times (0, T)$ oblastında idarə olunan proses

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - u^3 = f(x, t), \quad (x, t) \in Q \quad (1)$$

hiperbolik tənliyi,

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u|_{\Sigma} = 0 \quad (3)$$

başlanğıc və sərhəd şərtləri ilə təsvir olunur.

Burada Ω hamar Γ sərhəddinə malik R^n -də ($n \leq 3$) məhdud oblastdır, $T > 0$ verilmiş müsbət ədəddir, $Q = \Omega \times (0, T)$ oblastı R^{n+1} -də silindir, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ - Q silindirin yan səthi, $f(x, t) \in L_2(Q)$, $u_0(x) \in W_2^1(\Omega)$, $u_1(x) \in L_2(\Omega)$ isə məlum funksiyalardır.

Tutaq ki,

$$V = \left\{ v(x) : v(x) \in W_2^1(\Omega), \quad v_0 \leq v(x) \leq \mu_0, \quad \left| \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right| \leq \mu_i, \quad i = \overline{1, n} \right\}, \quad (4)$$

$v_0, \mu_0, \mu_i, i = \overline{1, n}$ -verilmiş müsbət ədədlərdir.

Əgər $v \in V$, $u \in L_6(Q)$ isə onda (1)-(3)-dən alınır ki, bu məsələnin

$$u \in U = \left\{ u : u \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \right\}$$

həlli $u(x, 0) = u_0(x)$ şərtini və $\forall \eta(x, t) \in C^1(\overline{Q})$, $\eta(x, T) = 0$ üçün

$$\int_Q \left[-\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right] dx dt - \int_Q u^3 \eta dx dt = \int_Q f \eta dx dt + \int_\Omega u_1(x) \eta(x, 0) dx$$

integral eyniliyini ödəyir [bax 1]. Belə $\{v, u\}$ cütünə mümkün cüt deyilir. Fərz edək ki, mümkün cütlər çoxluğu boş deyil, yəni $\{v, u\} \neq \emptyset$. Mümkün cütlər çoxluğunda aşağıdakı funksionalın minimallaşdırılması məsələsinə baxaq:

$$J(v, u) = \frac{1}{6} \|u - u_d\|_{L_6(Q)}^6 + \frac{N}{2} \|v\|_{W_2^1(\Omega)}^2. \quad (5)$$

Burada $u_d \in L_6(Q)$ - verilmiş funksiya və $N > 0$ verilmiş müsbət ədəddir.

İşdə baxılan məsələdə optimal cütün varlıq teoremi isbat edilmişdir.



Teorem 1. Fərz edək ki, (1)-(5) məsələsinin verilənləri üzərinə qoyulmuş yuxarıdakı şərtlər ödənilir. Onda bu məsələdə $\{\tilde{v}, \tilde{u}\}$ optimal cüt var. Yəni

$$J(\tilde{v}, \tilde{u}) = \inf J(v, u), \quad (6)$$

burada $\{v, u\}$ -mümkün cütlərdir.

Teorem 1-dən istifadə edərək adaptə olunmuş cərimə üsulunun yığılmasının göstərilməsi üçün aşağıdakı teorem isbat edilmişdir.

Teorem 2. Tutaq ki, $\{\tilde{v}_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon\}$ -cütü $J_\varepsilon^a(\tilde{v}_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon) = \inf J_\varepsilon^a(v, u)$ məsələsinin həllidir. Onda $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda

$$\tilde{v}_\varepsilon \rightarrow \tilde{v} \quad L_2(\Omega) \text{-da,} \quad (7)$$

$$\tilde{u}_\varepsilon \rightarrow \tilde{u} \quad L_6(Q) \text{-də,} \quad (8)$$

burada $\{\tilde{v}, \tilde{u}\}$ -seçilmiş optimal cütdür. Burada [bax 2]

$$J_\varepsilon^a(v, u) = \frac{1}{6} \|u - u_d\|_{L_6(Q)}^6 + \frac{N}{2} \|v\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - u^3 - f \right\|_{W_2^1(Q)}^2 + \frac{1}{2} \|u - \tilde{u}\|_{L_2(Q)}^2 + \frac{1}{2} \|v - \tilde{v}\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \quad (10)$$

Sonda optimallıq üçün variasional bərabərsizlik şəklində aşağıdakı zəruri şərt çıxarılmışdır.

Teorem 3. Tutaq ki, $\{\tilde{v}, \tilde{u}\}$ -optimal cütdür. Onda

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{v}(x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \right) - \tilde{u}^3 = f(x, t), \quad (x, t) \in Q,$$

$$\tilde{u}(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad \tilde{u}|_\Sigma = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{v}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) - 3\tilde{u}^2 \psi = (\tilde{u} - u_d)^5,$$

$$\psi(x, T) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, T) = 0 \quad \Omega \text{-da,} \quad \psi|_\Sigma = 0,$$

$$\tilde{u} \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)),$$

$$\psi \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \in L_\infty(0, T; W_2^{-1}(\Omega)),$$

şərtlərini və

$$\int_Q \left(N\tilde{v} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \right) (v - \tilde{v}) dx dt \geq 0, \quad \forall v \in V$$

integral bərabərsizliyini ödəyən $\{\tilde{v}, \tilde{u}, \psi\}$ üçlüyü var.

Ədəbiyyat

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 407 с.
2. Лионс Ж.П. Управление сингулярными распределенными системами, М., Мир, 1987, 367 с.