



QABARIQ MINİMALLAŞDIRMA MƏSƏLƏSİNDƏ STABİL MƏSƏLƏ

MİSRƏDDİN ALLAHVERDİ OĞLU SADİQOV, AHUNƏ MANOLİS QIZI NƏBİYEVƏ

Bakı Dövlət Universiteti
a.manoliszade@gmail.com

1. Stabil məsələ. Tutaq ki, V və Y banax fəzalarıdır və V^* fəzası V banax fəzasına qoşma fəza, Y^* fəzası Y banax fəzasına qoşma fəzadır. V fəzasının elementləri $u, v, \dots$, V^* fəzasının elementləri $u^*, v^*, \dots$ şəklində işarə olunur. $F: V \rightarrow \bar{R} = R \cup \{\pm\infty\}$ hər hansı funksiyadır.

Aşağıdakı minimallaşdırma məsələsinə baxaq:

$$\inf_{u \in V} F(u). \quad (P)$$

(P) məsələsi əsas məsələ adlanır. Bu məsələnin aşağı dəqiq sərhəddini $\inf P$ ilə işarə etsək, $F(u) = \inf P$ bərabərliyini ödəyən hər bir $u \in V$ elementi (P) məsələsinin həlli adlanır.

Tutaq ki, (P) məsələsi trivial olmayan məsələdir. $\Phi(u, 0) = F(u)$ şərtini ödəyən $\Phi: V \times Y \rightarrow \bar{R}$ funksiyasını götürək və ixtiyari $p \in Y$ üçün aşağıdakı minimallaşdırma məsələsinə baxaq:

$$\inf_{u \in V} \Phi(u, p) \quad (P_p)$$

Aydındır ki, $p = 0$ olduqda (P_p) məsələsi (P) məsələsinə çevrilir. (P_p) ümümləşmiş məsələlər toplusu, (P) məsələsi həyacanlanmış məsələ adlanır.

$p \in Y$ olduqda $h(p) = \inf_{u \in V} P_p = \inf_{u \in V} \Phi(u, p)$ işarə edək. Əgər Φ qabarıq olarsa, onda $h: Y \rightarrow \bar{R}$ funksiyası qabarıqdır (bax [1]). Əgər Φ məxsusi qabarıq aşağıdan yarımkəsilməz funksiya olarsa, ümumiyyətlə h məxsusi qabarıq aşağıdan yarımkəsilməz funksiya olmur.

Əgər $p^* \in Y^*$ olarsa, $h^*(p^*) = \sup\{\langle p^*, p \rangle - h(p)\}$ işarə etsək, $h^*(p^*) = \Phi^*(0, p^*)$ olduğunu alırıq.

$$\sup_{p^* \in Y^*} \{-\Phi^*(0, p^*)\} \quad (P^*)$$

məsələsi ikili məsələ adlanır.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $\sup P^* \leq \inf P$ ödənilir. Əgər h sıfırda sonlu və aşağıdan yarımkəsilməzdirsə, onda (P) məsələsi normal məsələ adlanır. Əgər $h(0)$ sonlu və h sıfırda subdiferensiallanan olarsa, (P) məsələsi stabil məsələ adlanır.

Teorem 1. Fərz edək ki, $\inf P$ sonludur, $\Phi(u, p)$ qabarıq funksiyadır, Y fəzasında sıfırın elə $\gamma(0)$ ətrafı, elə $M > 0$ ədədi və hər bir $p \in \gamma(0)$ üçün elə u_p var ki,



$\Phi(u_p, p) \leq M < +\infty$ bərabərsizliyi ödənilir. Onda h sıfırda subdiferensiallananandır, yəni (P) məsələsi stabil məsələdir.

Teorem 2. Əgər teorem 1-in şərtləri ödənersə, $\Phi: V \times Y \rightarrow \bar{R}$ məxsusi qabarıq aşağıdan yarımkəsilməz funksiya olarsa və (P) məsələsinin həlli varsa, onda (P^*) məsələsinin həlli var və

$$\inf P = \sup P^* \quad (1)$$

bərabərliyi ödənilir. Bundan əlavə P məsələsinin hər bir $\bar{u}$ və P^* məsələsinin hər bir $\bar{p}^*$ həlləri aşağıdakı ekstremal münasibətlərlə bağlıdır:

$$\Phi(\bar{u}, 0) + \Phi^*(0, \bar{p}^*) = 0 \quad \text{və ya} \quad (0, \bar{p}^*) \in \partial\Phi(\bar{u}, 0). \quad (2)$$

Əksinə, əgər $\bar{u} \in V$, $\bar{p}^* \in Y^*$ (1) ekstremal münasibətini ödəyərsə, onda $\bar{u}$ P məsələsinin, $\bar{p}^*$ isə P^* məsələsinin həllidir və (2) ödənilir.

2. Mühüm xüsusi hallar. Fərz edək ki, V -dən Y -ə təsir edən kəsilməz xətti Λ operatoru verilib və Λ^* operatoru Λ -ə qoşma olan operatorudur, yəni $\Lambda \in L(V, Y)$ və $\Lambda^* \in L(Y^*, V^*)$ (bax [1]).

Fərz edək ki, minimallaşdırılan funksiya $F(u) = J(u, \Lambda u)$ şəklindədir, burada J funksiyası $V \times Y$ -dən R -ə təsir edir. Bu halda (P) məsələsi

$$\inf_{u \in V} J(u, \Lambda u) \quad (3)$$

şəklindədir, Φ funksiyasını isə $\Phi(u, p) = J(u, \Lambda u - p)$ şəkilində götürmək olar. Onda ikili məsələni asanlıqla təyin etmək olar. Tutaq ki,

$J^* \in \Gamma(V^* \times Y^*)$ funksiyası J -yə qoşma funksiyadır (bax [1]). Onda

$$\begin{aligned} \Phi^*(0, p^*) &= \sup_{u \in V, p \in Y} [\langle p^*, p \rangle - J(u, \Lambda u - p)] = \\ &= \sup_{u \in V, p \in Y} [\langle \Lambda^* p^*, u \rangle - \langle p^*, p \rangle - J(u, p)] = J^*(\Lambda^* p^*, -p^*) \end{aligned}$$

alınır. Beləliklə, (P^*) məsələsini $\sup_{p^* \in Y^*} [-J^*(\Lambda^* p^*, -p^*)]$ şəklində yazmaq olar.

Teorem 3. Tutaq ki, $\inf P$ sonludur, $(u, v) \rightarrow J(u, v)$ qabarıqdır, Y fəzasında sıfırın elə $\gamma(0)$ ətrafı və elə $M > 0$ ədədi, hər bir $p \in \gamma(0)$ üçün elə $u_p \in V$ var ki, $J(u_p, \Lambda u_p - p) \leq M$ bərabərsizliyi ödənilir. Onda (3) məsələsi stabildir, $\inf P = \sup P^*$ və (P^*) məsələsinin ən azı bir $\bar{p}^*$ həlli var.

Əgər $F: V \rightarrow R$ və $G: Y \rightarrow R$ olarsa, $J(u, \Lambda u) = F(u) + G(\Lambda u)$ işarə edək. Bu halda (P) məsələsini $\inf P = \inf_{u \in V} [F(u) + G(\Lambda u)]$ şəklində yazmaq olar. Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$J^*(u^*, p^*) = F^*(u^*) + G^*(p^*)$, burada $F^* \in \Gamma(V^*)$ və $G^* \in \Gamma(Y^*)$ uyğun olaraq F və G -yə qoşma funksiyalardır. Bu halda (P^*) məsələsi $\sup P^* = \sup_{p^* \in Y^*} [-F^*(\Lambda^* p^*) - G^*(-p^*)]$ şəklində olar.

Teorem 4. Fərz edək ki, $\inf P$ sonludur, F və G qabarıq funksiyalardır, Y fəzasında sıfırın elə $\gamma(0)$ ətrafı, elə $M > 0$ ədədi və hər bir $p \in \gamma(0)$ üçün elə $u_p \in V$ var ki, $F(u_p) + G(\Lambda u_p - p) \leq M$ bərabərsizliyi ödənilir, onda (P) məsələsi stabildir, $\inf P = \sup P^*$ və (P^*) məsələsinin ən azı bir həlli var.