

HAMAR OLMAYAN FUNKSIYANIN SUBDİFERENSİALİ HAQQINDA

MİSRƏDDİN ALLAHVERDİ OĞLU SADİQOV, ELTAC VÜQAR OĞLU QASIMLI

Bakı Dövlət Universiteti
eltacqasimli2@gmail.com

İşdə funksiyanın nöqtədə istiqamətə görə törəməsinə baxılır, onun köməyi ilə subdiferensial tərif olunur və onun xassələri öyrənilir.

Tutaq ki, X banax fəzasıdır, $\bar{R} = R \cup \{\pm\infty\}$, $R_{+\infty} = R \cup \{+\infty\}$, $f : X \rightarrow \bar{R}$, $\text{dom } f = \{x \in X : |f(x)| < +\infty\}$, $x_0 \in \text{dom } f$. Aşağıdakı işarələmələri edək:

$$f^+(x_0; x) = \limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t}, \quad -f^+(x_0; -x) = \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - tx)}{t},$$

$$f^\uparrow(x_0; x) = \max\{f^+(x_0; x), -f^+(x_0; -x)\}.$$

$\partial^\uparrow f(x_0) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle \leq f^\uparrow(x_0; x), x \in X\}$ çoxluğu f funksiyanın x_0 nöqtəsində subdiferensialı adlanır (bax [1]).

$$E(f) = \{(x, \alpha) \in X \times R : f(x) \leq \alpha\}, \quad H(f) = \{(x, \alpha) \in X \times R : f(x) \geq \alpha\},$$

$$M(f, x_0) = (E(f) - (x_0, f(x_0))) \cap \{-(H(f) - (x_0, f(x_0)))\}, \quad g(x) = f(x_0 + x) - f(x_0) \text{ işarə edək.}$$

Tutaq ki, $C \subset X$ və $x_0 \in C$. Əgər elə $\alpha_0 > 0$ ədədi varsa ki, $\alpha \in (0, \alpha_0)$ olduqda $x_0 + \alpha x \in C$ olsun, x vektoru C çoxluğuna x_0 nöqtəsində mümkün istiqamət adlanır. C çoxluğuna x_0 nöqtəsində mümkün istiqamətlər çoxluğu $\gamma(x_0; C)$ ilə işarə olunur. Bundan sonra sadəlik üçün $\gamma((0, 0); M(f, x_0))$ çoxluğu $\gamma(M(f, x_0))$ şəklində işarə olunur.

$$f'(x_0; x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t}, \quad f^-(x_0; x) = \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t}$$

işarə edək.

Lemma 1. $\gamma(M(f, x_0)) \subset E(f^\uparrow(x_0; \cdot))$ daxil olması doğrudur. Əgər $x \in X$ olduqda $f'(x_0; x)$ istiqamətə görə törəmə varsa, onda $\text{int } E(f^\uparrow(x_0; \cdot)) = \text{int } \gamma(M(f, x_0))$ münasibəti ödənilir.

Lemma 2. Əgər f qabarıq (çökük) funksiya və $f(0) = 0$ olarsa, onda $M(f, 0) = E(f)$ ($M(f, 0) = -H(f)$) olur.

Lemma 3. Əgər f məxsusi qabarıq funksiya və $x_0 \in \text{dom } f$ olarsa, onda $x \in X$ olduqda $f^\uparrow(x_0; x) = f'(x_0; x)$ olur.

$\partial f(x_0) = \{x^* \in X^* : f'(x_0; x) \geq \langle x^*, x \rangle, x \in X\}$ işarə edək. Əgər f məxsusi qabarıq funksiya və $x_0 \in \text{dom } f$ olarsa, onda lemma 3 –dən $\partial^\uparrow f(x_0) = \partial f(x_0)$ olduğu alınır.

Lemma 4. Əgər $f : X \rightarrow R \cup \{-\infty\}$ çökük funksiya və $x_0 \in \text{dom } f$ olarsa, onda $x \in X$ olduqda $f^\uparrow(x_0; x) = -f'(x_0; -x)$ olur.

Əgər $C \subset X$ olarsa, $d_C(x) = \inf \{\|y - x\| : y \in C\}$ işarə edək. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $d_C^+(x_0, x) = d_C^+(x_0, x)$ bərabərliyi ödəyir.

$N_1(M(f, x_0)) = \{(x^*, \beta) \in X^* \times \mathbb{R} : \langle x^*, x \rangle + \alpha\beta \leq 0, (x, \alpha) \in \gamma(M(f, x_0))\}$, işarə edək.

Teorem 1. $\partial^\uparrow f(x_0) \subset \{x^* : (x^*, -1) \in N_1(M(f, x_0))\}$ daxil olması ödəyir. Əgər $f'(x_0; x)$ varsa və $\text{cl int } E(f^\uparrow(x_0; \cdot)) \supset E(f^\uparrow(x_0; \cdot))$ olarsa, onda $\partial^\uparrow f(x_0) = \{x^* : (x^*, -1) \in N_1(M(f, x_0))\}$.

Teorem 2. Əgər $f'(x_0; x)$ varsa, onda $\partial^\uparrow(-f)(x_0) = -\partial^\uparrow f(x_0)$. f funksiyasının x_0 nöqtəsində Klark mənadı (bax [2]) subdiferensialını $\partial_c f(x_0)$ ilə və

$$f^\circ(x_0; x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x_0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{f(y + \lambda x) - f(y)}{\lambda},$$

$\partial_c f(x_0) = \{x^* \in X^* : f^\circ(x_0; x) \geq \langle x^*, x \rangle, x \in X\}$ işarə edək.

Teorem 3. Əgər f funksiyası x_0 nöqtəsinin ətrafında Lipşis şərtini ödəyərsə, onda $\partial^\uparrow f(x_0) \subset \partial_c f(x_0)$.

Əgər f funksiyası x_0 nöqtəsində Qato mənadı diferensiallanandırırsa, onda $f'(x_0; x) = f^+(x_0; x) = f^-(x_0; x) = \langle f'_\Gamma(x_0), x \rangle$ olur. Ona görə də $f^\uparrow(x_0; x) = \langle f'_\Gamma(x_0), x \rangle$ olur. Buradan $\partial^\uparrow f(x_0) = \{f'_\Gamma(x_0)\}$ bərabərliyi alınır.

Qeyd edək ki, yuxarıdakı verilən subdiferensial Klark mənadı subdiferensiala daxildir. Əgər f funksiyası x_0 nöqtəsində ciddi diferensiallanandırırsa, onda $\partial^\uparrow f(x_0) = \partial_c f(x_0) = \{D_s f(x_0)\}$ olur.

Əgər f ixtiyari funksiyadırsa, onda $\partial_D f(x_0) = \{x^* \in X^* : (x^*, -1) \in \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial^\uparrow d_{M(f, x_0)}(0, 0)\}$ çoxluğu f funksiyasının subdiferensialı adlanır.

Ədəbiyyat

1. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация. Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014, 359 p.
2. Clarke F. Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control. London: Springer-Verlag, 2013. 591 p.