



## FUNKSIONAL MƏHDUDIYYƏTLƏR OLAN BİR OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ

MAMMƏD HAQVERDİ OĞLU YAQUBOV, Aysel EMİN QIZI SÜLEYMANOVA

Bakı Dövlət Universiteti  
suleymanova.aysel.e@gmail.com

Tutaq ki, proses

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} = f(x, z, z_x) + \sum_{j=1}^r a_j(x) u_j(x), x \in B(x^0, r) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \nu} + \beta(x)z = \alpha(x), x \in S \end{cases} \quad (2)$$

məsələsi ilə təsvir olunur, burada  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $z_x=(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n})$ ,  $B(x^0, r)$ -mərkəzi  $x^0$  nöqtəsində, radiusu  $r$  olan kürədir,  $S$ -onun sərhədidir,  $\nu$ - $S$ -ə çəkilən xarici normal,  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $f(x, z, p)$ ,  $a_j(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  verilmiş funksiyalardır,  $u(x)=(u_1(x), u_2(x), \dots, u_r(x))$ -idarəedici funksiyadır, belə ki, mümkün idarəedici funksiyalar olaraq mərkəzi  $x^0$  nöqtəsində, radiusu  $r$  olan  $B(x^0, r)$  kürəsində ölçülən, məhdud və qiymətləri  $R^r$  fəzasının  $U$  çoxluğundan olan funksiyalar götürülür.

Elə mümkün idarəedici tapmaq tələb olunur ki, (1), (2) məsələsinin ona uyğun olan  $z=z(x)$  həlli ilə birlikdə

$$J_i(u) = \int_B F_i(x, z(x), z_x(x), u(x)) dx = c_i, i = -1, 1, \dots, m \quad (3)$$

bərabərliklərini ödəsin və

$$J_0(u) = \int_B F_0(x, z(x), z_x(x), u(x)) dx \quad (4)$$

funksionalı ən kiçik qiymət alsın.

Bu funksionallar əsasında  $U$ -nu  $R^{m+2}$ -yə inikas etdirən

$$J(u) = (J_{-1}(u), J_0(u), J_1(u), \dots, J_m(u))$$

inikasını təyin edək və bütün mümkün idarələrə uyğun olan qiymətlər çoxluğunu  $v$  ilə işarə edək.

Tutaq ki,  $u^0(x)$  verilmiş mümkün idarə,  $z^0(x)$  isə (1),(2) məsələsinin ona uyğun həllidir,  $u^1, u^2, \dots, u^l$  isə  $U$ -dan,  $x^1=(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1), \dots, x^l=(x_1^l, x_2^l, \dots, x_n^l)$  nöqtələri  $B(x^0, r)$ -dən ixtiyari nöqtələrdir və  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l$  müsbət ədədləri o qədər kiçikdirlər ki,  $B(x^0, r)$ -də yerləşən  $B_j(x^j, \varepsilon_j^{\frac{1}{n}})$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$  kürələri kəsişmirlər.

$$u^\varepsilon(x) = \begin{cases} u^j, x \in B_j, & j = 1, 2, \dots, l & \text{olduqda} \\ u^0(x), & x \notin \bigcup_{j=1}^l B_j & \text{olduqda} \end{cases}$$

mümkün idarəedicisi təyin edək.

$$\begin{aligned} H_0(x, z, z_x, \Psi, u) &= F_0(x, z, z_x, u) + \Psi_0 f(x, z, z_x, u), \\ H_i(x, z, z_x, \Psi, u) &= F_0(x, z, z_x, u) + \Psi_i f(x, z, z_x, u), \\ i &= -1, 1, \dots, m \end{aligned}$$

işarə edək, belə ki,  $\Psi_0(x), \Psi_i(x), i = -1, 1, \dots, m$  funksiyaları götürülmüş  $(z^0(x), u^0(x))$  cütü üçün,

$$\begin{cases} \Delta \Psi_0 = \frac{\partial H_0}{\partial z} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial H_0}{\partial z_{x_k}} \right), & x \in B(x^0, r), \\ \frac{\partial \Psi_0}{\partial v} + \beta \Psi_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_0}{\partial z_{x_k}} \cos(v, x_k) = 0, & x \in S \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \Delta \Psi_i = \frac{\partial H_i}{\partial z} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial H_i}{\partial z_{x_k}} \right), & x \in B(x^0, r) \\ \frac{\partial \Psi_i}{\partial v} + \beta \Psi_i + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_i}{\partial z_{x_k}} \cos(v, x_k) = 0, & x \in S \end{cases} \quad (6_i)$$

məsələlərinin həlli kimi təyin olunur.  $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$  və burada  $H_0, H_i$  funksiyaları  $(z^0(x), u^0(x))$  cütü üçün hesablanır.

Sonra  $z^0(x), u^0(x)$  cütü və  $\Psi_0(x), \Psi_i(x), i = -1, 1, \dots, m$  üçün  $J_i(u^\varepsilon) - J_i(u^0)$  artımları

$$J_i(u^\varepsilon) - J_i(u^0) = \sum_{j=1}^l \varepsilon_j \{ \Psi_i(x^j) \sum_{p=1}^r a_j(x^j) (u_p^j - u_p^0(x^j)) + F_i(x^j, z^0(x^j), z_x^0(x^j), u^j) - F_i(x^j, z^0(x^j), z_x^0(x^j), u^0(x^j)) \} + \sum_{j=1}^l 0(\varepsilon_j)$$

şəklinə gətirilir, hər bir  $\bar{u} \in U$  və  $u^0(x)$ -in hər bir  $x$  requlyar nöqtəsi üçün  $K = \{k: k = (k^{-1}(x, \bar{u}), k^0(x, \bar{u}), \dots, k^m(x, \bar{u}))\}$  çoxluğu təyin edilir; burada

$$k^i(x, \bar{u}) = \Psi_i(x) \sum_{j=1}^r a_j(x) (\bar{u}_j - u_j^0) + F_i(x, z^0(x), z_x^0(x), \bar{u}) - F_i(x, z^0(x), z_x^0(x), u^0(x))$$

$K$  çoxluğuna, [1]-ə əsasən, törəmə çoxluq deyərək göstərilir ki, hamısı birdən sıfır olmayan  $\lambda_{-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_m$  ədədləri var ki,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\hat{J}(u^\varepsilon) - \hat{J}(u^0)}{\varepsilon} \leq 0, \text{ burada } \mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l),$$

$$\hat{J}(u) = \lambda_{-1} J_{-1}(u) + \lambda_0 J_0(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i J_i(u).$$

Bu bərabərsizlik isbat olunduqdan sonra, götürülmüş  $(z^0(x), u^0(x))$  cütünün köməyi ilə  $\Psi^0(x)$  funksiyası

$$\begin{cases} \Delta \Psi = \sum_{i=-1}^m \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial z} + \Psi \frac{\partial f}{\partial z} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sum_{i=-1}^m \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial z_{x_k}} + \Psi \frac{\partial f}{\partial z_{x_k}} \right), & x \in B(x^0, r) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial v} + \beta \Psi + \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=-1}^m \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial z_{x_k}} + \Psi \frac{\partial f}{\partial z_{x_k}} \right) \cos(v, x_k) = 0, & x \in S \end{cases} \quad (7)$$

məsələsinin həlli kimi təyin olunur; burada  $\lambda_{-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_m$  sabitlərdir və aşağıdakı teorem isbat olunub:

**Teorem(Maksimum prinsipi):** Tutaq ki,  $(z^0(x), u^0(x))$  optimal cütdür. Onda hamısı birdən sıfır olmayan  $\lambda_{-1}^0, \lambda_0^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0, \lambda_i^0 \leq 0, 0 \leq i \leq m$  ədədləri var ki,

$$\Psi^0(x) \sum_{j=1}^r a_j(x) u + \sum_{i=-1}^m \lambda_i^0 F_i(x, z^0(x), z_x^0(x), u)$$

funksiyası  $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$  idarəedicisinin funksiyası kimi sanki bütün  $x \in B(x^0, r)$  üçün

$$\max_{u \in U} \left[ \Psi^0(x) \sum_{j=1}^r a_j(x) u + \sum_{i=-1}^m \lambda_i^0 F_i(x, z^0(x), z_x^0(x), u) \right]$$



$$= \Psi^0(x) \sum_{j=1}^r a_j(x) u^0(x) + \sum_{i=-1}^m \lambda_i^0 F_i(x, z^0(x), z_x^0(x), u^0(x))$$

maksimum şərtini ödəyir, burada  $\Psi^0(x)$  funksiyası (7) məsələsinin  $z^0(x), u^0(x), \lambda_{-1}^0, \lambda_0^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$  –a uyğun həllidir.

### Ədəbiyyat

1. Hestenes M.R. Calculus of variations and optimal control theory-N.Y.Waley, 1966, 402pp
2. Вишик М.И. Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму. Труды Московского математического общества, 1963, Т.12, с. 125-184.