Ü.N.Həsənova
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
ulviyyehesenova547@gmail.com

BİRDƏYİŞƏNLİ CƏBRİ TƏNLİKLƏRİN HƏLL ÜSULLARI

Xülasə

Məqalə məktəb riyaziyyat kursunda birdəyişənli cəbri tənliklərin həlli metodikasına həsr olunub. Məqalənin əsas mahiyyəti məktəb riyaziyyat kursunda birdəyişənli cəbri tənliklərin mümkün ola biləcək həllərin araşdırılmasına həsr olunub.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Резюме

Статья посвящена методике решения алгебраических уравнений с одной переменной в школьном курсе математики. Основная суть статьи посвящена исследованию возможных решений алгебраических уравнений с одной переменной в школьном курсе математики.

SOLVİNG METHODS OF UNİVARİATE ALGEBRAİC EQUATİONS

Summary

The article is dedicated to the methodology of solving univariate algebraic equations in the school mathematics course. The main essence of the article is devoted to the investigation of the possible solutions of univariate algebraic equations in the school mathematics course.

Açar sözlər: *tənlik, məchul, dəyişən, kök, həllər çoxluğu, parametr*

Ключевые слова: *уравнение, неизвестная, переменная, корень, множество решений, параметр*

Key words: *equation, unknown, variable, root, set of solutions, parameter*

Məktəb riyaziyyat kursunda öyrənilən ən geniş mövzulardan biri tənliklərdir. Tənliklərin öyrənilməsi hələ ibtidai sinifdən başlanır. Tənlik anlayışına pedaqoji ədəbiyyatda müxtəlif cür təriflər verilir. Bunlardan bir neçəsinə baxaq: 1) Tənlik - məchulu (dəyişəni) olan bərabərlikdir; 2) Bir və bir neçə dəyişənli iki riyazi ifadənin bərabərliyinə tənlik deyilir. Tənliklərin yazılmasında istifadə olunan hərflərin 2 növü olur: qiymətlərinin tapılması tələb olunan hərflərə - məchullar və ya dəyişənlər deyilir. Digərləri isə əmsallar və ya parametrlər adlanır. Dəyişənlərinin sayından asılı olaraq tənliyi bir, iki və s. dəyişənli adlandırırlar. Dəyişəni doğru ədədi bərabərliyə çevirən qiymətlərinə tənliyin kökləri deyilir. Tənliyin kökləri çoxluğuna onun həlləri çoxluğu deyilir. Tənlikdə iştirak edən funksiyaların təyin oblastlarının kəsişməsindən alınan çoxluğa tənliyin təyin oblastı deyilir. Ümumiyyətlə, tənliyi həll etmək onu həllər çoxluğunu tapmaq və ya həllər çoxluğunun olmadığını göstərmək deməkdir. Əgər tənliyin sağ və sol tərəfləri rasional ifadələr olarsa, belə tənliyə rasional tənlik deyilir. Rasional tənliyin sağ və sol tərəfləri tam ifadələr olarsa, ona tam tənlik, sağ və sol tərəflər kəsr ifadələr olarsa, ona kəsr tənlik deyilir. Ümumi şəkildə tənlik f(x)=0 kimi yazılır. Burada f(x)-x dəyişənindən asılı hər hansı funksiyadır. İndi isə ayrılıqda nəzər salaq:

Sadələşmələr aparıldıqdan sonra ax=b şəklində olan tənliyə birməchullu xətti tənlik deyilir. a və b ədədlərindən asılı olaraq birməchullu xətti tənliyin həllərinin sayı müxtəlif olur. Aşağıdakı hallara baxaq:

I hal. $a \neq 0$, b isə istənilən ədəd olarsa, onda tənliyin yeganə $x = \frac{b}{a}$ kökü var.

Misal 1. 4x = 8 tənliyində a$= 4 \neq 0$ olduğundan onun kökü x = 2 olar.

II hal. a = 0, b$\neq 0$ bu halda tənliyin kökü yoxdur, çünki tənlik 0$\cdot x = b$ şəklinə düşür, 0 – da istənilən ədədə vurduqda sıfır alınar. Bu isə, b$\neq 0$ şərtinə ziddir.

III hal. a = 0, b = 0 halında isə tənlik 0 $\cdot x = 0$ şəklinə düşür. X- in istənilən qiymətində doğrudur.

Elə birməchullu tənliklər var ki, onlarda a və b ədədlər deyil, parametrdən asılı ifadələr olur. Məsələn, (a+1)x=7 tənliyində a kəmiyyəti parametrdir.

Misal 2. k parametrinin hansı qiymətində (3k+1)x = 10 tənliyinin yeganə kökü var?

Yuxarıda qeyd etdiyimizə görə, 3k+1$\neq 0$ olarsa, tənliyin yeganə həlli olar onda k$\neq -\frac{1}{3}$.

İndi isə xətti tənliyə gətirilən tənliklərə baxaq. Burada modul daxil olan tənliklərin həllini nəzərdən keçirək:

Məchulu modul işarəsi daxilində olan tənliklərin ümumi üsulu ədədin modulunun tərifinin köməyi ilə verilmiş tənliyi onunla eynigüclü olan tənliklə əvəz etməkdir. Ümumi şəkildə modul tənlik belə yazılır:

$$|f\,(x)| = b$$

Burada f(x) verilmiş funksiya, b isə verilmiş ədəddir. Burada bəzi hallara baxaq:

1) $b < 0$. Bu halda, modulun xassəsinə görə həlli yoxdur.

2) b = 0. Bu halda tənlik f(x) = 0 tənliyi ilə eynigüclüdür.

3) $b > 0$. Bu halda $\left|f(x) = b \ tənliyi \begin{Bmatrix} f(x) = -b \\ f(x) = b \end{Bmatrix}\right|$ tənliklər küllisi ilə eynigüclüdür və $|f(x) = b|$ tənliyin həllər çoxluğu olur. İndi isə xüsusi hallara baxaq:

a) $|f(x)| = |g(x)|$ tənliyi verilib. Məlumdur ki, modulları bərabər olan iki ədəd ya bərabərdir, ya da əks ədədlərdir.

$\begin{bmatrix} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{bmatrix}$ tənliklər küllisi ilə eynigüclüdür.

b) $|f(x)| = g(x)$ tənliyinin həlli $g(x) \geq 0$ şərtini ödəməlidir. Beləliklə, tənliyin həlli

$$\begin{Bmatrix} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} f(x) = -g(x) \\ g(x) \leq 0 \end{Bmatrix}$$

sistemlər küllisi ilə eynigüclüdür.

Misal 3. $|2x^2 + x + 7| = 5x + 9$ tənliyini həll edək.

Həlli: Yuxarıdakı deyilənlərə görə, bu tənliyin həlli

$$\begin{cases} 2x^2 + x + 7 = 5x + 9 \\ 5x + 9 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 + 5x + 7 = -5x - 9 \\ 5x + 9 \geq 0 \end{cases}$$

bu sistemlərin küllisi ilə eynigüclüdür. Bu sistemlərdən birincinin həlli (-1,1)-dir. İkinci sistemin isə həqiqi həlli yoxdur. Deməli, buradan alınır ki, tənliyin həlli (-1,1) olar.

Kvadrat tənliklər

a,b,c verilmiş əmsallar, həmçinin $a \neq 0$, x isə məchul olduqda $ax^2 + bx + c = 0$ şəklində tənliyə kvadrat tənlik deyilir. Məsələn, $7x^2 + 3x + 5 = 0$, $-1{,}3x^2 + 5x - 2 = 0$ kvadrat tənliklərdir.

Kvadrat tənlikdə b və c əmsallarından heç olmasa biri sıfıra bərabər olarsa, ona natamam kvadrat tənlik deyilir. İndi isə halları nəzərdən keçirək:

Teorem 1. $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tənliyində c=0 olarsa, tənliyin köklərindən biri sıfıra bərabər olar. Yəni, tənlik $ax^2 + bx = 0$ şəklində olur. O zaman x(ax+b)=0 şəklində yazsaq, açıq şəkildə tənliyin bir kökünün sıfıra bərabər olduğunu görərik.

Teorem 2. b=c=0 olduqda, $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tənliyin hər iki kökü sıfıra bərabər olar. Yəni, kvadrat tənlik $ax^2 = 0$ şəklində olar. Buradan da $x_1 = x_2 = 0$ alınar.

Ümumiyyətlə, $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$, kvadrat tənliyin hər iki tərəfini a - ya bölüb, $\frac{b}{a} = p, \frac{c}{a} = q$ işarə etsək, $x^2 + px + q = 0$ çevrilmiş kvadrat tənliyini alarıq.

$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ kvadrat tənliyinin kökləri x = $\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ düsturu ilə tapılır, burada D = $b^2 - 4ac$.

D-yə kvadrat tənliyin **diskriminantı** deyilir. D-nin işarəsindən asılı olaraq kvadrat tənliyin köklərinin olub-olmaması və köklərinin sayı araşdırılır.

1. D > 0 olduqda kvadrat tənliyin iki həqiqi müxtəlif kökü var:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

2. D=0 olduqda kvadrat tənliyin bir-birinə bərabər olan iki həqiqi kökü var:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

3. D< 0 olduqda kvadrat tənliyin iki qoşma kompleks kökləri var, həqiqi kökləri yoxdur.

Misal 1. $3x^2 + 5x - 2 = 0$ kvadat tənliyini həll edin.

Həlli: Bu tənlikdə a = 3, b = 5, c = -2 olduğnu bilərək, D=$b^2 - 4ac$ düsturunda bu qiymətləri nəzərə alsaq,
D = $5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49$ alarıq. D = 49 > 0 olduğundan, tənliyin 2 kökü var:

$$x_1 = \frac{-5-7}{6} = \frac{-12}{6} = -2, x_2 = \frac{-5+7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$ alarıq.

Kvadrat tənliyin köklərinin tapılması üsullarından biri də Viyet teoremidir.

Teorem. Çevrilmiş kvadrat tənliyin köklərinin cəmi əks işarə ilə götrülmüş ikinci həddin əmsalına, hasili isə sərbəst həddə bərabərdir. Yəni, x_1 *və* x_2 ədədləri $x^2 + px + q = 0$ çevrilmiş kvadrat tənliyinin kökləridirsə, $x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q$.

Əgər kvadrat tənlik $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ şəklindədirsə, onda onun cəmi $-\frac{b}{a}$ - ya, hasili isə $\frac{c}{a}$ – ya bərabər olar. Yəni, $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ kvadrat tənliyinin kökləri x_1 *və* x_2 olarsa, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ olar.

Misal. $3x^2 + 8x - 1$ tənliyini həll etmədən $x_1^2 + x_1^2$ ifadəsinin qiymətini tapın.

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

Biz bilirik ki, $x_1 + x_2 = -\frac{8}{3}, \quad x_1x_2 = -\frac{1}{3}$ bunları isə yuxarda nəzərə alsaq,

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-\frac{8}{3})^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{64}{9} + \frac{2}{3} = \frac{64+6}{9} = \frac{70}{9}.$$

Rasional tənliklər

Birməchullu $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \quad P(x) \neq 0$ şəklində olan tənliyi rasional cəbri tənlik adlandırırlar. Qeyd edək ki, burada P(x) və Q(x) tam cəbri çoxhədlilərdir.

$\frac{P(x)}{Q(x)}=G(x)$ şəklində olan tənliyi həll etmək üçün onu aşağıdakı şəkilə gətirmək lazımdır:

$$\frac{P(x)}{G(x)}-G(x)=0 \Leftrightarrow \frac{P(x)-G(x)Q(x)}{G(x)}=0 \Leftrightarrow \frac{\overline{P(x)}}{Q(x)}=0$$

Burada, $\widetilde{P(x)}$ = P(x)−$G(x)$Q(x) -dir.

Bu şəkildəki kəsr - rasional cəbri tənliklərin əsas həll üsulu bundan ibarətdir. Bu tip tənlik özü ilə eynigüclü olan bir tənlik və bir bərabərsizlikdən ibarət aşağıdakı sistemə gətirilir:

$$\begin{cases} P(x)=0 \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$$

İrrasional tənliklər

İfadələrdən biri və ya hər ikisi dəyişənə nəzərən irrasional ifadə olarsa, belə bərabərliyə irrasional tənlik deyilir. Məsələn, $\sqrt{x-2}=4$, $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-1}=6$ tənlikləri irrasional tənliklərdir. Əsasən bu tənlikərin əsas üsulları aşağıdakılardır:

1. Hər iki tərəfi eyni dərəcədən qüvvətə yüksəltmək üsulu;
2. Yeni dəyişən əlavə etmək üsulu.

İndi isə standart həll üsulları ilə tanış olaq:

1) $\sqrt{f(x)}=g(x)$ şəklində olan tənliklər.

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\geq 0 \\ f(x)=g^2(x) \end{cases}$$

Misal 1. Tənliyini həll edin:

$$\sqrt{5x-6}+x=4.$$

Həlli. Tənliyini aşağıdakı şəkildə yazaq və göstərilən sxemdən istifadə edək.

$$\sqrt{5x-6}+x=4 \Leftrightarrow \sqrt{5x-6}=4-x \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x\geq 0 \\ 5x-6=(4-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 4 \\ (x-2)(x-11)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 4 \\ x_1=2,\ \ x_2=11 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Deməli, verilmiş tənliyin yeganə x =2 kökü var.

2) $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ şəklində olan tənliklər.

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0(\ \text{və ya}\ g(x)\geq 0) \\ f(x)=g(x) \end{cases}.$$

3) $\sqrt{f(x)}\cdot g(x)=0$ şəklində olan tənliklər.

Bu tənliyin ümumi həlli aşağıdakı kimdir:

$$\sqrt{f(x)}\cdot g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)-in\ mənası\ var. \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)=0 \\ f(x)\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Məqalənin aktuallığı. Məktəblərdə tədris olunan birdəyişənli cəbri tənliklər şagirdlərin riyazi biliklərinin inkişafına kömək edir.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və yeniliyi. Məqalədə qeyd olunan priyomlardan istifadə etməklə şagirdlər və müəllimlər asanlıqla birdəyişənli cəbri tənlikləri həll edə bilərlər.

Məqalənin elmi yeniliyi. Riyaziyyat dərslərində tənliklərin həllinə səmərəli metodların tətbiq edilməsi və şagirdlərə öyrədilməsi.

Ədəbiyyat

1. *A.S.Adıgözəlov. Məktəbdə riyaziyyat təliminin elmi əsasları. Bakı, 2018.*
2. *B.Ö.Tahirov, F.M.Namazov, S.C.Əliyev. Elementar Riyaziyyat. Bakı, 2017.*
3. *N.B.Nəsirov. Məktəb riyaziyyat kursunda parametr daxil olan məsələlər. Bakı, 2018.*