PEDAQOJİ UNİVERSİTETİN XƏBƏRLƏRİ – 2019, C. 67, № 1, s. 9-18
ИЗВЕСТИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА – 2019, Т. 67, № 1, с. 9-18
TRANSACTIONS OF PEDAGOGICAL UNIVERSITY – 2019, V. 67, № 1, pp. 9-18

Riyaziyyat

УДК 517.977.56

С.С.Ахыев[1], О.А.Акперова[1], Ш.Ш.Сулейманова[1], Ф.Ш.Ахмедов[2]
Азербайджанский государственный педагогический университет[1]
Бакинский государственный университет[2]
axiyev63@mail.ru, akmefren@yandex.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С КОНТАКТНО-КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ключевые слова: *контактно-краевая, нелокальная, гиперболическая, оператор задачи, изоморфизм, сопряженная задача, оптимальность, управление*

В работе рассмотрена линейная нелокальная краевая задача с контактно-краевыми условиями. В этой задаче управления критерий оптимальности есть линейный многоточечный функционал. На основе изоморфизма между пространствами здесь определено понятие сопряженной задачи и получены необходимые и достаточные условия оптимальности.

S.S.Haxıyev, H.A.Əkbərova, Ş.Ş.Süleymanova, F.Ş.Əhmədov

KONTAKT SƏRHƏD ŞƏRTLİ XƏTTİ QEYRİ-LOKAL HİPERBOLİK İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNİN OPTİMALLIĞI

Açar sözlər: *kontakt-sərhəd, qeyri-lokal, hiperbolik, məsələnin operatoru, izomorfizm, qoşma məsələ, optimallıq, idarə*

İşdə kontakt-sərhəd şərtli xətti qeyri-lokal hiperbolik idarəetmə məsələsinə baxılmışdır. Bu idarəetmə məsələsində optimallıq meyarı çoxnöqtəli funksionaldır. Fəzalar arasında izomorfizmə əsaslanaraq burada qoşma məsələ anlayışı təyin edilmiş və optimallıq üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır.

S.S.Akhiev, H.A.Akberova, Sh.Sh.Suleymanova, F.Sh.Ahmedov

OPTIMIZATION OF LINEAR NONLOCAL HYPERBOLIC CONTROL PROBLEM WITH CONTACT-BOUNDARY CONDITIONS

Keywords: *contact-boundary, nonlocal, hyperbolic, operator of problem, isomorphism, conjugate problem, optimality, control*

In the paper linear nonlocal hyperbolic control problem with contact-boundary conditions has been considered. In this control problem optimality criteria is linear multypointual functional. Basing on isomorphism between spaces here has been determined the concept of conjugate problem and have been gotten necessary and sufficient conditions of optimality.

В последние несколько десятилетий можно проследить возникновение многочисленных работ прикладного характера по нелокальным краевым задачам, в том числе управлению процессами, связанными с подобными краевыми задачами. В связи с этим, стали все чаще встречаться работы, посвященные изучению нелокальных краевых задач. Исследование линейных нелокальных краевых задач методами, используемыми для линейных локальных краевых задач, а также для задач управления подобными процессами наталкивается на серьезные трудности. Именно поэтому, для линейных нелокальных краевых задач требуются дополнительные средства, обеспечивающие установление двоичности и получение сопряженного уравнения или сопряженной задачи. В этой работе используя изоморфизм между пространствами, определяется сопряженное пространство, а также вводится понятие сопряженной задачи.

Рассмотрим систему гиперболических уравнений второго порядка

$$(Lz)(t,x) \equiv z_{tx}(t,x) + z(t,x)A_{0,0}(t,x) + z_t(t,x)A_{1,0}(t,x) + z_x(t,x)A_{0,1}(t,x) =$$
$$= \varphi(t,x,v(t,x)),\ (t,x) \in G = G_0 \cup G_1,\ G_0 = (0,T)\times(0,\alpha),\ G_1 = (0,T)\times(\alpha,l), \quad (1)$$

где $z(t,x) = (z_1(t,x),...,z_n(t,x))$ - вектор-функция состояния; $v(t,x) = (v_1(t,x),...,v_r(t,x))$ - управляющая вектор-функция; $A_{i,j}(t,x)$ - заданные измеримые $n\times n$ - матрицы на G; $\varphi(t,x,v)$ - заданная n - мерная вектор-функция на $G\times R^r$; причем R^r r-мерное пространство; α - фиксированная точка из $(0,l)$.

Для системы (1) зададим следующие нелокальные контактно-краевые условия

$$(L_k z)(t) \equiv z(t,0)\beta_{0,k}(t) + z(t,\alpha-0)\beta_{1,k}(t) + z(t,\alpha+0)\beta_{2,k}(t) +$$
$$+ z(t,l)\beta_{3,k}(t) + z_t(t,0)g_{0,k}(t) + z_t(t,\alpha-0)g_{1,k}(t) + z_t(t,\alpha+0)g_{2,k}(t) +$$
$$+ z_t(t,l)g_{3,k}(t) = \varphi_k(t,v^{(1)}(t)),\ t\in(0,T),\ k=1,2; \quad (2)$$

$$(L_3 z)(x) \equiv z_x(0,x) + \int_0^T z_x(\tau,x)K(\tau,x)d\tau = \varphi_3(x,v^{(2)}(x)),\quad x\in(0,l); \quad (3)$$

$$L_0 z \equiv z(0,0) + \iint_G z_{\tau\zeta}(\tau,\zeta)K_0(\tau,\zeta)d\tau d\zeta = \varphi_0(v^{(0)}). \quad (4)$$

Здесь: $\beta_{i,k}(t),\ g_{i,k}(t),\ i=0,1,2,3;\ k=1,2$ заданные $n\times n$ - матрицы на $(0,T);$ $\varphi_k(t,v^{(1)}),\ k=1,2,$ - заданные $n-$ мерные вектор-функции на $(0,T)\times R^{r_1}$; $\varphi_3(x,v^{(2)})$ - n - мерная вектор-функция на $(0,l)\times R^{r_2}$; R^m - m - мерное пространство строчных векторов $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_m)$ с нормой $\|\lambda\|=\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|$ и $R^1=R;$ $\varphi_0(v^{(0)})$ - n - мерная вектор-функция на R^{r_0}; $v^{(1)}(t)=(v_1^{(1)}(t),...,v_{r_1}^{(1)}(t)),\quad t\in(0,T)$ и $v^{(2)}(x)=(v_1^{(2)}(x),...,v_{r_2}^{(2)}(x)),\quad x\in(0,l),$ - управляющие вектор-функции; $v^{(0)}(t)=(v_1^{(0)},...,v_{r_0}^{(0)})$ - управляющий векторный параметр. Нормой $n\times n$ матрицы $\lambda=(\lambda_{ij})$ будем полагать аналогичное выражение $\|\lambda\|=\sum_{i,j=1}^{n}|\lambda_{ij}|.$

Задачи подобные (1)-(4) можно встретить, например, в работах [1,2,3].

Будем предполагать, что выполняются следующие условия:

1) Матрицы $A_{i,j}(t,x)$ измеримы на $G,$ $A_{0,0}\in\mathcal{L}_{p,n\times n}(G);$ существуют функции $A_{1,0}^0\in\mathcal{L}_p(0,l)$ и $A_{0,1}^0\in\mathcal{L}_p(0,T)$ такие, что $\|A_{1,0}(t,x)\|\le A_{1,0}^0(x),$ $\|A_{0,1}(t,x)\|\le A_{0,1}^0(t)$ почти всюду на $G,$ где $\mathcal{L}_{p,n\div n}(G),$ $1\le p\le\infty,$ - банахово пространство $n\times n$ - мерных матричных функций $g(t,x)=(g_{ij}(t,x))$ с элементами $g_{ij}(\cdot,\cdot)\in\mathcal{L}_p(G),$ в котором норма определяется равенством $\|g\|_{p,G}=\|g(\cdot,\cdot)\|_{p,G}=\|g_0(\cdot,\cdot)\|_{p,G}$ причем $g_0(t,x)=\|g(t,x)\|=\sum_{i,j=1}^{n}|g_{ij}(t,x)|.$

2) $\beta_{i,k}\in\mathcal{L}_{p,n\times n}(0,T);\quad g_{i,k}\in\mathcal{L}_{\infty,n\times n}(0,T);$

3) $K_0\in\mathcal{L}_{q,n\times n}(G);$ почти для всех $x\in(0,l)$ верно $K(\cdot,x)\in\mathcal{L}_{1,n\times n}(0,T),$ а для нормы $\overline{K}(x)=\|K(\cdot,x)\|_{1,(0,T)}$ верно $\overline{K}\in\mathcal{L}_\infty(0,l);$

4) $\varphi(t,x,v),$ $\varphi_k(t,v^{(1)})\ (k=1,2)$ и $\varphi_3(x,v^{(2)})$ - заданные n - мерные вектор-функции, удовлетворяющие условиям Каратеодори на $G\times R^r,$ $(0,T)\times R^{r_1}$ и $(0,l)\times R^{r_2},$ соответственно; $\varphi_0(v^{(0)})$ - заданная n-мерная вектор-функция на пространстве R^{r_0} (всех r_0 - мерных строчных векторов).

За класс допустимых управлений примем множество всех совокупностей $\hat{v}=(v^{(0)},v^{(1)}(t),v^{(2)}(x),v(t,x)),$ которые удовлетворяют следующим условиям: $v(t,x)$ измерима и ограничена (в существенном) на G и почти во всех точках $(t,x)\in G$ может принимать свои значения $v(t,x)$ из некоторого заданного множества $V\subset R^r$; $v^{(1)}(t)$ и $v^{(2)}(x)$ измеримы и ограничены на $(0,T)$ и $(0,l)$, кроме того, почти во всех точках $t\in(0,T)$ и $x\in(0,l)$ они могут принимать свои значения $v^{(1)}(t)$ и $v^{(2)}(x)$ из некоторых заданных множеств $V^{(1)}\subset R^{r_1}$ и $V^{(2)}\subset R^{r_2}$ соответственно; $v^{(0)}$ управляющий векторный параметр из некоторого заданного множества $V^{(0)}\subset R^{r_0}$. Любую четверку $\hat{v}$ с вышеуказанными свойствами назовем допустимым управлением. Множество допустимых управлений обозначим через U_∂.

Следует отметить, что вектор-функции φ_1 и φ_2 правых частей из условий (2) можно было считать зависящими от двух независимых друг от друга $r_1^{(1)}$ и $r_2^{(1)}$- мерных управляющих вектор-функций $v_1^{(1)}(t)$ и $v_2^{(1)}(t)$ со значениями из некоторых заданных множеств $V_1^{(1)}\subset R^{r_1^{(1)}}$ и $V_2^{(1)}\subset R^{r_2^{(1)}}$, т.е. можно было бы считать, что $\varphi_k=\varphi_k(t,v_k^{(1)}(t))$, $k=1,2$. Но, объединяя эти управляющие вектор-функции в виде $(v_1^{(1)}(t),v_1^{(2)}(t))$ и переобозначая полученную таким образом вектор-функцию снова через $v^{(1)}(t)$, получим, что, не нарушая общности, вектор-функции φ_k можно считать зависящими от одной управляющей вектор-функции $v^{(1)}(t)$ в виде $\varphi_k=\varphi_k(t,v^{(1)}(t))$, $k=1,2$, что и учтено в постановке задачи (1)-(4).

Пусть $\hat{W}_{p,n}(G)$, $1\le p\le\infty$,- пространство всех n- мерных вектор-функций $z(t,x)$, которые на каждой области G_k $(k=0,1)$ принадлежат $W_{p,n}(G_k)$ и являются непрерывными в точке $(t,x)=(0,\alpha)$. Здесь $W_{p,n}(G_k)$ - пространство всех n-мерных вектор-функций $z\in\mathcal{L}_{p,n}(G_k)$, имеющих обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные $[4]$ z_t,z_x,z_{tx} из $\mathcal{L}_{p,n}(G_k)$, $k=0,1$. Норму в пространстве $\hat{W}_{p,n}(G)$ будем определять равенством

$$\|z\|_{\hat{W}_{p,n}(G)}=\sum_{k=0}^{1}\|z\|_{W_{p,n}(G_k)}$$

где

$$\|z\|_{W_{p,n}(G_k)}=\|z\|_{p,G_k}+\|z_t\|_{p,G_k}+\|z_x\|_{p,G_k}+\|z_{tx}\|_{p,G_k},$$

а $\|g\|_{p,G_k}=\|g(\cdot,\cdot)\|_{p,G_k}=\|g_0(\cdot,\cdot)\|_{p,G_k}$ - норма в пространстве $\mathcal{L}_{p,n}(G_k)$ n-мерных вектор-функций $g(t,x)=(g_1(t,x),...,g_n(t,x))$ с компонентами $g_j(\cdot,\cdot)\in\mathcal{L}_p(G_k)$, причем $g_0(t,x)=\|g(t,x)\|=\sum_{j=1}^{n}|g_j(t,x)|$- норма n-вектора $g(t,x)$. Аналогично определяется норма в $\mathcal{L}_{p,n\times n}(G_k)$ $n\times n$ - мерных матричных функций $g(t,x)=(g_{ij}(t,x))$ с различием лишь $g_0(t,x)=\|g(t,x)\|=\sum_{i,j=1}^{n}|g_{ij}(t,x)|$.

Для заданного $\hat{v}\in U_\partial$ решением задачи (1)-(4) будем называть вектор-функцию $z\in\hat{W}_{p,n}(G)$, для которой выполняются равенство (1) почти всюду на G, равенства (2) и (3) в смысле почти всюду на $(0,T)$ и $(0,l)$, соответственно, а также равенство (4) - в обычном смысле.

Теперь рассмотрим линейный многоточечный функционал

$$S(\hat{v})=\sum_{i=1}^{N}(a_i^{(0)},z(t_i^{(0)},x_i^{(0)}))+\sum_{i=1}^{N}(a_i^{(1)},z(t_i^{(1)},x_i^{(1)})), \tag{5}$$

определенный на решениях $z\in\hat{W}_{p,n}(G)$ задачи (1)-(4), соответствующих допустимым управлениям $\hat{v}\in U_\partial$. Здесь: $(t_i^{(k)},x_i^{(k)})\in\overline{G}_k$, $i=1,...,N$; $k=0,1$, - фиксированные точки, причем, если для некоторой точки $(t_i^{(0)},x_i^{(0)})$ выполняется условие $x_i^{(0)}=\alpha$, то будем считать, что $z(t_i^{(0)},x_i^{(0)})=z(t_i^{(0)},\alpha-0)$, если же для некоторой точки $(t_j^{(1)},x_j^{(1)})$ имеет место $x_j^{(1)}=\alpha$, то будем считать, что $z(t_j^{(1)},x_j^{(1)})=z(t_j^{(1)},\alpha+0)$; $a_k^{(0)},a_k^{(1)}$- заданные векторы из R^n; $(\cdot,\cdot)$- скалярное произведение в R^n.

Теперь можно рассматривать следующую задачу оптимального управления: найти наименьшее значение функционала (5) на множестве U_∂. Эту задачу иногда будем называть задачей (1)-(5).

Задачу оптимального управления (1)-(5) запишем в компактном виде

$$\hat{L}z=\hat{\varphi}(\hat{v}),$$

где $\hat{\varphi}(\hat{v})=(\varphi_0(v^{(0)},\varphi_1(t,v^{(1)}(t),\varphi_2(t,v^{(1)}(t)),\varphi_3(x,v^{(2)}(x)),\varphi(t,x,v(t,x)).$

Из вышеналоженных на функции $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi$ условий следует, что для любого допустимого управления $\hat{v}=(v^{(0)},v^{(1)}(t),v^{(2)}(x),v(t,x))\in U_\partial$, имеет место $\hat{\varphi}(\hat{v})\in Q_{p,n}=R^n\times\mathcal{L}_{p,n}(0,T)\times\mathcal{L}_{p,n}(0,T)\times\mathcal{L}_{p,n}(0,l)\times\mathcal{L}_{p,n}(G)$.

Это согласуется с тем, что оператор $\hat{L}=(L_0,L_1,L_2,L_3,L)$ задачи (1)-(4) при наложенных условиях действует из $\hat{W}_{p,n}(G)$ в $\hat{Q}_{p,n}$. Отметим, что для всех $1\le p\le\infty$ оператор $\hat{L}$ имеет линейный ограниченный сопряженный $\hat{L}^*=(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega)$, действующий в пространстве $\hat{Q}_{q,n}$. Поэтому справедливо тождество

$$\hat{f}(\hat{L}z)\equiv(\hat{L}^*\hat{f})(z),\forall\hat{f}\in\hat{Q}_{q,n},\forall z\in\hat{W}_{p,n}(G).$$

Это обосновывается изоморфизмом, осуществляемым оператором $\Omega z=(z(0,0),z_t(t,0),z_t(t,\alpha+0),z_x(0,x),z_{tx}(t,x))$ из $\hat{W}_{p,n}(G)$ в $\hat{Q}_{p,n}$ $[5,6]$.
Если здесь функцию $z\in\hat{W}_{p,n}(G)$ выбрать как решение задачи (1)-(4), то получим

$$\hat{f}(\hat{L}z)\equiv(f_0,\varphi_0(v^{(0)}))+\sum_{k=1}^{2}\int_0^T(f_k(t),\varphi_k(t,v^{(1)}(t)))dt+\int_0^l(f_3(x),\varphi_3(x,v^{(2)}(x)))dx+$$
$$+\iint_G(f(t,x),\varphi(t,x,v(t,x)))dtdx=(\omega_0\hat{f},z(0,0))+\int_0^T((\omega_1\hat{f})(\tau),z_t(\tau,0))d\tau+$$
$$+\int_0^T((\omega_2\hat{f})(\tau),z_t(\tau,\alpha+0))d\tau+\int_0^l((\omega_3\hat{f})(\zeta),z_x(0,\zeta))d\zeta+$$
$$+\iint_G((\omega\hat{f})(\tau,\zeta),z_{tx}(\tau,\zeta))d\tau d\zeta\equiv(\hat{L}^*\hat{f})(z),\quad\forall\hat{f}\in\hat{Q}_{q,n}.\qquad(6)$$

Здесь компоненты сопряженного оператора $\hat{L}^*=(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega)$ определяются равенствами

$$\omega_0\hat{f}=f_0+\sum_{k=1}^{2}\int_0^T f_k(t)\left[\beta^*_{0,k}(t)+\beta^*_{1,k}(t)+\beta^*_{2,k}(t)+\beta^*_{3,k}(t)\right]dt$$
$$+\iint_G f(t,x)A^*_{0,0}(t,x)dtdx;$$

$$(\omega_1\hat{f})(\tau)\sum_{k=1}^{2}\int_0^T f_k(t)\theta(t-\tau)\left[\beta^*_{0,k}(t)+\beta^*_{1,k}(t)\right]dt+\sum_{k=1}^{2}f_k(\tau)\left[g^*_{0,k}(\tau)+g^*_{1,k}(\tau)\right]+$$
$$+\int_0^l f(\tau,x)A^*_{1,0}(\tau,x)\theta(\alpha-x)dx+\iint_G f(t,x)A^*_{0,0}(t,x)\theta(t-\tau)\theta(\alpha-x)dtdx;$$

$$(\omega_3 \hat{f})(\zeta) = f_3(\zeta) + \sum_{k=1}^{2}\int_0^T f_k(t)\theta(\alpha-\zeta)\left[\beta_{1,k}^*(t) + \beta_{2,k}^*(t)\right]dt + \sum_{k=1}^{2}\int_0^T f_k(t)\beta_{3,k}^*(t)dt +$$

$$+\int_0^T f_3(\zeta)K^*(\tau,\zeta)d\zeta + \int_0^T f(t,\zeta)A_{0,1}^*(t,\zeta)dt + \iint_G f(t,x)A_{0,0}^*(t,x)\theta(x-\zeta)dtdx;$$

$$(\omega_2 \hat{f})(\tau) = \sum_{k=1}^{2}\int_0^T f_k(t)\theta(t-\tau)\left[\beta_{2,k}^*(t) + \beta_{3,k}^*(t)\right]dt + \sum_{k=1}^{2} f_k(\tau)\left[g_{2,k}^*(\tau) + g_{3,k}^*(\tau)\right]+$$

$$+\int_0^l f(\tau,x)A_{1,0}^*(\tau,x)\theta(x-\alpha)dx + \iint_G f(t,x)A_{0,0}^*(t,x)\theta(t-\tau)\theta(x-\alpha)dtdx;$$

$$(\omega \hat{f})(\tau,\zeta) = f(\tau,\zeta) + \iint_G f(t,x)A_{0,0}^*(t,x)\theta(t-\tau)\theta(x-\zeta)q_1(\zeta,x)dtdx +$$

$$+\int_0^l f(\tau,x)A_{1,0}^*(\tau,x)\theta(x-\zeta)q_1(\zeta,x)dx + \int_0^T f(t,\zeta)A_{0,1}^*(t,\zeta)\theta(t-\tau)dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\int_0^T f_k(t)\theta(t-\tau)\left[\theta(\alpha-\zeta)\beta_{1,k}^*(t) + \theta(\zeta-\alpha)\beta_{3,k}^*(t)\right]dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} f_k(\tau)\left[\theta(\alpha-\zeta)g_{1,k}^*(\tau) + \theta(\zeta-\alpha)g_{3,k}^*(\tau)\right]+$$

$$+\iint_G f_3(\zeta)\theta(\bar{\tau}-\tau)K^*(\bar{\tau},\zeta)d\bar{\tau}d\zeta + f_0K_0^*(\tau,\zeta),$$

где $q_1(\zeta,x) = \theta(\zeta-\alpha)\theta(x-\alpha) + \theta(\alpha-x)$, $\theta(\cdot)$ – функция Хевисайда.

Равенство (6) показывает, что выражение функционала (5) можно записать в виде

$$S(\hat{v}) = \sum_{k=1}^{N}\left[(a_k^{(0)}, z(t_k^{(0)}, x_k^{(0)})) + (a_k^{(1)}, z(t_k^{(1)}, x_k^{(1)}))\right] + (\omega_0 \hat{f}, z(0,0)) +$$

$$+\int_0^T ((\omega_1 \hat{f})(\tau), z_t(\tau,0))d\tau + \int_0^T ((\omega_2 \hat{f})(\tau), z_t(\tau,\alpha+0))d\tau + \int_0^l ((\omega_3 \hat{f})(\zeta), z_x(0,\zeta))d\zeta +$$

$$+\iint_G ((\omega \hat{f})(\tau,\zeta), z_{tx}(\tau,\zeta))d\tau d\zeta - (f_0, \varphi_0(v^{(0)})) - \sum_{k=1}^{2}\int_0^T (f_k(t), \varphi_k(t, v^{(1)}(t)))dt -$$

$$-\int_0^l (f_3(x), \varphi_3(x, v^{(2)}(x)))dx - \iint_G (f(t,x), \varphi(t,x,v(t,x)))dtdx, \quad \forall \hat{f} \in \hat{Q}_{q,n}. \qquad (7)$$

Пусть теперь $\hat{v}=(v^{(0)},v^{(1)}(t),v^{(2)}(x),v(t,x))$ и $\hat{v}+\Delta\hat{v}=(v^{(0)}+\Delta v^{(0)}$, $v^{(1)}(t)+\Delta v^{(1)}(t),v^{(2)}(x)+\Delta v^{(2)}(x),v(t,x)+\Delta v(t,x))$ - различные допустимые управления, а $z,\, z+\Delta z\in\hat{W}_{p,n}(G)$ - соответствующие им решения задачи (1)-(4). Тогда из (7) получим

$$\Delta S(\hat{v})=S(\hat{v}+\Delta\hat{v})-S(\hat{v})=\sum_{k=1}^{n}(a_k^{(0)},\Delta z(t_k^{(0)},x_k^{(0)}))+\sum_{k=1}^{n}(a_k^{(1)},\Delta z(t_k^{(1)},x_k^{(1)}))+$$
$$+(\omega_0\hat{f},\Delta z(0,0))+\int_0^T((\omega_1\hat{f})(\tau),\Delta z_t(\tau,0))d\tau+\int_0^T((\omega_2\hat{f})(\tau),\Delta z_t(\tau,\alpha+0))d\tau+$$
$$+\int_0^l((\omega_3\hat{f})(\zeta),\Delta z_x(0,\zeta))d\zeta+\iint_G((\omega\hat{f})(\tau,\zeta),\Delta z_{tx}(\tau,\zeta))d\tau d\zeta-(f_0,\Delta\varphi_0(v^{(0)}))-$$
$$-\sum_{k=1}^{2}\int_0^T(f_k(t),\Delta\varphi_k(t,v^{(1)}(t)))dt-\int_0^l(f_3(x),\Delta\varphi_3(x,v^{(2)}(x)))dx-$$
$$-\iint_G(f(t,x),\Delta\varphi(t,x,v(t,x)))dtdx,\quad\forall\hat{f}\in\hat{Q}_{q,n},\tag{8}$$

где

$$\Delta\varphi_0(v^{(0)})=\varphi_0(v^{(0)}+\Delta v^{(0)})-\varphi_0(v^{(0)}),$$
$$\Delta\varphi_k(t,v^{(1)}(t))=\varphi_k(t,v^{(1)}(t)+\Delta v^{(1)}(t))-\varphi_k(t,v^{(1)}(t)),\quad k=1,2;$$
$$\Delta\varphi_3(x,v^{(2)}(x))=\varphi_3(x,v^{(2)}(x)+\Delta v^{(2)}(x))-\varphi_3(x,v^{(2)}(x)),$$
$$\Delta\varphi(t,x,v(t,x))=\varphi(t,x,v(t,x)+\Delta v(t,x))-\varphi(t,x,v(t,x)).$$

Используя естественное представление функции $\Delta z\in\hat{W}_{p,n}(G)$, запишем следующие равенства

$$\sum_{k=1}^{N}(a_k^{(0)},\Delta z(t_k^{(0)},x_k^{(0)}))=\sum_{k=1}^{N}(a_k^{(0)},\Delta z(0,0)+\int_0^T\theta(t_k^{(0)}-\tau)\Delta z_t(\tau,0)d\tau+$$
$$+\int_0^l\theta(x_k^{(0)}-\zeta)\Delta z_x(0,\zeta)d\zeta+\iint_G\theta(t_k^{(0)}-\tau)\theta(x_k^{(0)}-\zeta)\Delta z_{tx}(\tau,\zeta)d\tau d\zeta)\tag{9}$$

и

$$\sum_{k=1}^{N}(a_k^{(1)},\Delta z(t_k^{(1)},x_k^{(1)}))=\sum_{k=1}^{N}(a_k^{(1)},\Delta z(0,0)+\int_0^T\theta(t_k^{(1)}-\tau)\Delta z_t(\tau,\alpha+0)d\tau+$$
$$+\int_0^l\theta(x_k^{(1)}-\zeta)\Delta z_x(0,\zeta)d\zeta+\iint_G\theta(t_k^{(1)}-\tau)\theta(x_k^{(1)}-\zeta)\theta(\zeta-\alpha)\Delta z_{tx}(\tau,\zeta)d\tau d\zeta).\tag{10}$$

Учитывая (9) и (10) в (8) и выбирая при этом $\hat{f}$ как решение в $\hat{Q}_{q,n}$ системы

$$\omega_0 \hat{f} + \sum_{k=1}^{N} (a_k^{(0)} + a_k^{(1)}) = 0;$$

$$(\omega_1 \hat{f})(\tau) + \sum_{k=1}^{N} a_k^{(0)} \theta(t_k^{(0)} - \tau) = 0, \quad \tau \in (0,T);$$

$$(\omega_2 \hat{f})(\tau) + \sum_{k=1}^{N} a_k^{(1)} \theta(t_k^{(1)} - \tau) = 0, \quad \tau \in (0,T);$$

$$(\omega_3 \hat{f})(\zeta) + \sum_{k=1}^{N} a_k^{(0)} \theta(x_k^{(0)} - \zeta) + \sum_{k=1}^{N} a_k^{(1)} \theta(x_k^{(1)} - \zeta) = 0, \quad \zeta \in (0,l); \tag{11}$$

$$(\omega \hat{f})(\tau,\zeta) + \sum_{k=1}^{N} a_k^{(0)} \theta(t_k^{(0)} - \tau)\theta(x_k^{(0)} - \zeta) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} a_k^{(1)} \theta(t_k^{(1)} - \tau)\theta(x_k^{(1)} - \zeta)\theta(\zeta - \alpha) = 0, \quad (\tau,\zeta) \in G,$$

для приращения функционала $S(\hat{v})$, получим формулу

$$\Delta S(\hat{v}) = -\left[H_0(f_0, v^{(0)} + \Delta v^{(0)}) - H_0(f_0, v^{(0)})\right] -$$

$$- \sum_{k=1}^{2} \int_0^T \left[H_k(t, f_k(t), v^{(1)}(t) + \Delta v^{(1)}(t)) - H_k(t, f_k(t), v^{(1)}(t))\right] dt -$$

$$- \int_0^l \left[H_3(x, f_3(x), v^{(2)}(x) + \Delta v^{(2)}(x)) - H_3(x, f_3(x), v^{(2)}(x))\right] dx -$$

$$- \iint_G \left[H(t,x, f(t,x), v(t,x) + \Delta v(t,x)) - H(t,x, f(t,x), v(t,x))\right] dtdx, \tag{12}$$

где

$$H_0(f_0, v^{(0)}) = (f_0, \varphi_0(v^{(0)}));$$
$$H_k(t, f_k, v^{(1)}) = (f_k, \varphi_k(t, v^{(1)})), \quad k = 1,2;$$
$$H_3(x, f_3, v^{(2)}) = (f_3, \varphi_3(x, v^{(2)})),$$
$$H(t,x, f, v) = (f, \varphi(t,x,v)).$$

Систему (11) будем называть сопряженной системой для задачи (1)-(5).

Из формулы (12) с помощью известного понятия игольчатой вариации для управляющих вектор-функций легко получается справедливость следующей теоремы.

Теорема. Пусть $\hat{v} = (v^{(0)}, v^{(1)}(t), v^{(2)}(x), v(t,x))$ некоторое допустимое управление, а $\hat{f} \in \hat{Q}_{q,n}$- решение сопряженной системы (11). Тогда для оптимальности этого управления необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия максимума Л.С.Понтрягина, т.е. следующие условия

$$\max_{g^{(1)}\in V^{(1)}} \sum_{k=1}^{2} H_k(t, f_k(t), g^{(1)}) = \sum_{k=1}^{2} H_k(t, f_k(t), v^{(1)}(t)) \quad \text{почти для всех } t\in(0,T),$$

$$\max_{g^{(2)}\in V^{(2)}} H_3(x, f_3(x), g^{(2)}) = H_3(x, f_3(x), v^{(2)}(x)) \quad \text{почти для всех } x\in(0,l),$$

$$\max_{g\in V} H(t,x, f(t,x), g) = H(t,x, f(t,x), v(t,x)) \quad \text{почти для всех } (t,x)\in G,$$

и

$$\max_{g^{(0)}\in V^{(0)}} H_0(f_0, g^{(0)}) = H_0(f_0, v^{(0)}).$$

Эта теорема показывает, что вопрос о нахождении управления $\hat{v}$, доставляющего наименьшее значение функционалу (5), сводится к решению сопряженной системы (11).

В настоящей работе использован изоморфизм между пространствами, а также указан оператор, осуществляющий этот изоморфизм. На основе этого изоморфизма удалось указать понятие сопряженного оператора, а также ввести понятие сопряженной задачи. Используя решение сопряженной задачи определено необходимое и достаточное условия оптимальности в виде принципа максимума Л.С.Понтрягина.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А.А., Багриновская Г.П., Свирежев Ю.М. и др.* Математическое моделирование в биологии. М.: Наука, 1975, 156 с.
2. *Чудновский Ф.Ф.* Теплофизика почв. М.: Наука, 1976, 352 с.
3. *Нахушев А.М.* Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги / ДУ, 1979, т.15, №1, с.95-105
4. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, 1962, 256 с.
5. *Ахмедов Ф.Ш.* Оптимизация гиперболических систем при нелокальных краевых условиях Бицадзе-Самарского / ДАН СССР, 1985, Т.283, №4, с.787-791
6. *Ахыев С.С.* Понятие сопряженной задачи для линейных гиперболических контактно-краевых задач / Доклады НАН Азербайджана, 2001, T.LVII, №4-6, с.40-44