PEDAQOJİ UNİVERSİTETİN XƏBƏRLƏRİ – 2019, C. 67, № 1, s. 19-31
ИЗВЕСТИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА – 2019, Т. 67, № 1, с. 19-31
TRANSACTIONS OF PEDAGOGICAL UNIVERSITY – 2019, V. 67, № 1, pp. 19-31

УДК 517.95

Исмаилов А.И.
Бакинский государственный университет
ismayilovarif@icloud.com

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРВОГО РОДА

Ключевые слова: *обратная краевая задача, уравнения третьего порядка, метод Фурье, классическое решение*

Исследована одна обратная краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными третьего порядка с интегральным краевым условием. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказываются существование и единственность классического решения исходной задачи.

A.İ.İsmayılov

BİR ÜÇ TƏRTİBLI XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN BİRİNCİ NÖV İNTEQRAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏNİN HƏLLİ

Açar sözlər: *tərs sərhəd məsələsi, üç tərtibli diferensial tənlik , Furye üsulu, klassik həll*

İşdə üç tərtibli diferensial tənlik üçün inteqral sərhəd şərtli bir tərs məsələ tədqiq olunur. Əvvəlcə verilmiş məsələ ekvivalent məsələyə gətrilir. Bu məsələnin həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında teorem isbat olunur. Daha donra isə verilmiş məsələnin klassik həllinin varlığı və yeganəliyi isbat olunur.

A.I.Ismailov

ON AN INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THIRD ORDER WITH INTEGRAL BOUNDARY CONDITION OF THE FIRST KIND

Keywords: *inverse boundary value problem, third-order equation, Fourier method, classical solution*

In the article the author analyses one inverse boundary problem for a partial differential equation of third order with integral boundary condition. First, an original problem is reduced to the equivalent problem, the theorem of existence and uniqueness of solution is proved for the latter. Then using these facts the author proves existence and uniqueness of classical solution of the original problem.

1. Введение. Обратные задачи представляют собой активно развивающийся раздел современной математики. В последнее время обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности, таких, как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики. Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим здесь, прежде всего работы А.Н.Тихонова [1], М.М.Лаврентьева [2, 3], В. К.Иванова [4] и их учеников. Более подробно об этом можно прочитать в монографии А.М.Денисова [5].

В данной работе с помощью метода сжимающих отображений доказаны существование и единственность решения одной обратной краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными третьего порядка с интегральным краевым условием первого рода.

2. Постановка обратной краевой задачи

Рассмотрим для уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial t}\left(a(t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)=p(t)u(x,t)+f(x,t), \qquad (1)$$

в области $D_T=\{(x,t):0\le x\le 1,\ 0\le t\le T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0)=\varphi(x),\, u_t(x,0)=\psi(x)\ \ (0\le x\le 1)\ , \qquad (2)$$

граничным условием Неймана

$$u_x(0,t)=0\ \ (0\le t\le T), \qquad (3)$$

интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t)dx=0\quad (0\le t\le T) \qquad (4)$$

и с дополнительным условием

$$u(0,t)=h(t)\quad (0\le t\le T), \qquad (5)$$

где $a(t)>0$, $f(x,t),\ \varphi(x),\ \psi(x),\ h(t)$ -заданные функции, а $u(x,t)$ и $p(t)$ - искомые функции.

Введем обозначения

$$\tilde{C}^{2,2}(D_T)=\{u(x,t):u(x,t)\in C^2(D_T),u_{txx}(x,t)\in C(D_T)\}.$$

Определение. Под классическим решением обратной краевой задачи (1)-(5) будем понимать пару $\{u(x,t), p(t)\}$ функций $u(x,t)$, $p(t)$, если $u(x,t) \in \tilde{C}^{2,2}(D_T)$, $p(t) \in C[0,T]$ и выполняются соотношения (1)-(5) в обычном смысле .

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $f(x,t) \in C(D_T)$, $\psi(x) \in C[0, 1]$, $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$, $\varphi'(1) = 0$ $h(t) \in C^2[0,T]$, $0 < a(t) \in C^1[0,T]$, $h(t) \neq 0$, $\int\limits_0^1 f(x,t)dx = 0$ $(0 \le t \le T)$

и выполняются условия согласования

$$\int\limits_0^1 \varphi(x)dx = 0, \quad \int\limits_0^1 \psi(x)dx = 0, \varphi(0) = h(0), \quad \psi(0) = h'(0).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(5) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t) \in \tilde{C}^{2,2}(D_T)$, $p(t) \in C[0,T]$, удовлетворяющие уравнению (1), условиям (2), (3) и условиям

$$u_x(1,t) = 0 \ (0 \le t \le T) , \tag{6}$$

$$h''(t) - \frac{\partial}{\partial t}\left(a(t)\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}\right) = p(t)u(0,t) + f(0,t) \ (0 \le t \le T). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\{u(x,t), p(t)\}$ является классическим решением задачи (1) - (5). Интегрируя уравнение (1) по x от 0 до 1, с учётом (3), имеем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_0^1 u(x,t)dx - \frac{d}{dt}\big(a(t)u_x(1,t)\big) = p(t)\int\limits_0^1 u(x,t)dx + \int\limits_0^1 f(x,t)dx \ (0 \le t \le T). \tag{8}$$

Допуская, что $\int\limits_0^1 f(x,t)dx = 0$ $(0 \le t \le T)$, с учётом (4), получаем:

$$\frac{d}{dt}\big(a(t)u_x(1,t)\big) = 0 \ (0 \le t \le T). \tag{9}$$

В силу (2) и $\varphi'(1) = 0$ очевидно , что

$$u_x(1,0) = \varphi'(1) = 0. \tag{10}$$

приходим к выполнению (6).

Так как, задача (9), (10) имеет только тривиальное решение, то ясно, что выполняется и условие (6).

Далее, из (5) видно, что

$$u_t(0,t)=h'(t),u_{tt}(0,t)=h''(t)\quad (0\le t\le T) \qquad (11)$$

Поставляя $x=0$ в уравнение (1), имеем

$$\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial t}\left(a(t)\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}\right)=p(t)u(0,t)+f(0,t)\ (0\le t\le T). \qquad (12)$$

Отсюда, с учетом (5) и (11), приходим к выполнению (7).

Теперь, предположим, что $\{u(x,t),p(t)\}$ является решением задачи (1)- (3), (6), (7).

Тогда из (8), с учётом (6) имеем:

$$y''(t)=a(t)y(t)\quad (0\le t\le T), \qquad (13)$$

где

$$y(t)=\int_0^1 u(x,t)dx(0\le t\le T).$$

В силу (2) и $\int_0^1 \varphi(x)dx=0,\quad \int_0^1 \psi(x)dx=0$ очевидно , что

$$\text{y}(0)=\int_0^1 u(x,0)dx=\int_0^1 \varphi(x)dx=0,\text{y}'(0)=\int_0^1 u_t(x,0)dx=\int_0^1 \psi(x)dx=0.$$

(14)

Из (13) и (14) приходим к выполнению (4).

Далее, из (7) и (12) получаем:

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(0,t)-h(t))-p(t)(u(0,t)-h(t))=0\quad (0\le t\le T) \qquad (15)$$

В силу (2) и условия согласования $\varphi(0)=h(0),\quad \psi(0)=h'(0),$ (10), имеем:

$$u(0,0)-h(0)=\varphi(0)-h(0)=0,$$
$$u_t(0,0)-h'(0)=\psi(0)-h'(0)=0\ . \qquad (16)$$

Из (15) и (16) заключаем, что выполняется условие (5). Теорема 1 доказана.

О разрешимости обратной краевой задачи.

Так как система $1,\cos\pi x,\cos 2\pi x,\cos k\pi x,\ldots$ образует базис в $L_2(0,1)$, то очевидно, что для каждого решения $\{u(x,t),p(t)\}$ задачи (1)-(3), (6), (7) его первая компоненту $u(x,t)$ имеет видь:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\cos\lambda_k x(\lambda_k=k\pi)\ , \qquad (17)$$

где

$$u_k(t) = m_k \int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx (k = 0,1,..),$$

причём

$$m_k = \begin{cases} 1, \ k = 0, \\ 2, \ k = 1,2,\dots . \end{cases}$$

Тогда применяя формальную схему метода Фурье, из (1), (2), получаем:

$$u_k''(t) + \lambda_k^2 (a(t)u_k(t))' = F_k(t;u,p) \quad (k = 0,1,2,\dots;0 \le t \le T), \tag{18}$$

$$u_k(0) = \varphi_k, u_k'(0) = \psi_k \ (k = 0,1,2,\dots), \tag{19}$$

где

$$F_k(t;u,p) = m_k \int_0^1 \left(p(t)u(x,t) + f(x,t)\right)\cos\lambda_k x dx = p(t)u_k(t) + f_k(t),$$

$$f_k(t) = m_k \int_0^1 f(x,t)\cos\lambda_k x dx, \ \varphi_k = m_k \int_0^1 \varphi(x)\cos\lambda_k x dx,$$

$$\psi_k = m_k \int_0^1 \psi(x)\cos\lambda_k x dx \quad (k = 0,1,\dots).$$

Решая задачу (18), (19) с помощью метода вариация постоянных, находим:

$$u_0(t) = \varphi_0 + t\psi_0 + \int_0^t (t-\tau)F_0(\tau;u,p)d\tau, \tag{20}$$

$$u_k(t) = \varphi_k \left(e^{-\lambda_k^2 \int_0^t a(s)ds} + \lambda_k^2 a(0)\int_0^t e^{-\lambda_k^2 \int_\tau^t a(s)ds} d\tau \right) + \psi_k \int_0^t e^{-\lambda_k^2 \int_\tau^t a(s)ds} d\tau +$$

$$+ \int_0^t F_k(\eta;u,p) \left(\int_\eta^t e^{-\lambda_k^2 \int_\tau^t a(s)ds} d\tau \right) d\eta \quad (k = 1,2,\dots). \tag{21}$$

Дифференцируя два раза (21) получаем:

$$u_k'(t) = -\lambda_k^2 \varphi_k \left(a(t) e^{-\lambda_k^2 \int_0^t a(s)ds} - a(0)\left(1 - \lambda_k^2 a(t) \int_0^t e^{-\lambda_k^2 \int_\tau^t a(s)ds} d\tau \right) \right) +$$

$$+\psi_k\left(1-\lambda_k^2 a(t)\int_0^t e^{-\lambda_k^2\int_\tau^t a(s)ds}d\tau\right)+$$

$$+\int_0^t F_k(\eta;u,p)\left(1-\lambda_k^2 a(t)\int_\eta^t e^{-\lambda_k^2\int_\tau^t a(s)ds}d\tau\right)d\eta \quad (k=1,2,\ldots), \qquad (22)$$

$$u_k''(t)=-\lambda_k^2\varphi_k\left((a'(t)-\lambda_k^2 a^2(t))e^{-\lambda_k^2\int_0^t a(s)ds}+\lambda_k^2 a(0)(a'(t)-\right.$$

$$\left.-\lambda_k^2 a^2(t))\int_0^t e^{-\lambda_k^2\int_\tau^t a(s)ds}d\tau\right)-\lambda_k^2\psi_k(a'(t)-\lambda_k^2 a^2(t))\int_0^t e^{-\lambda_k^2\int_\tau^t a(s)ds}d\tau+$$

$$-\lambda_k^2\int_0^t F_k(\eta;u,p)\left((a'(t)-\lambda_k^2 a^2(t))\int_\eta^t e^{-\lambda_k^2\int_\tau^t a(s)ds}d\tau+a(t)\right)d\eta+$$

$$+F_k(t;u,p)\,(k=1,2,\ldots). \qquad (23)$$

После подстановки выражения $u_0(t)$ из (20), $u_k(t)$ $(k=1,2,\ldots)$ из (21) в (17), для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1)-(3), (6), (7) получаем:

$$u(x,t)=\varphi_0+t\psi_0+\int_0^t (t-\tau)F_0(\tau;u,p)d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\varphi_k\left(e^{-\lambda_k^2\int_0^t a(s)ds}+\lambda_k^2 a(0)\int_0^t e^{-\lambda_k^2\int_\tau^t a(s)ds}d\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\psi_k\int_0^t e^{-\lambda_k^2\int_\tau^t a(s)ds}d\tau+\int_0^t F_k(\eta;u,p)\left(\int_\eta^t e^{-\lambda_k^2\int_\tau^t a(s)ds}d\tau\right)d\eta\right\}\cos\lambda_k x. \qquad (24)$$

Теперь из (7), с учётом (17), получим:

$$p(t)=[h(t)]^{-1}\left\{h''(t)-f(0,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2(a(t)u_k(t))'\right\}. \qquad (25)$$

Далее, из (18), в силу (23) находим:

$$\lambda_k^2(a(t)u_k(t))'=-u_k''(t)+F_k(t;u,p,q)=$$

$$= \lambda_k^2 \varphi_k \left((a'(t) - \lambda_k^2 a^2(t)) \left(e^{-\lambda_k^2 \int_0^t a(s)ds} + \lambda_k^2 a(0) \int_0^t e^{-\lambda_k^2 \int_\tau^t a(s)ds} d\tau \right) \right) +$$

$$+ \lambda_k^2 \psi_k (a'(t) - \lambda_k^2 a^2(t)) \int_0^t e^{-\lambda_k^2 \int_\tau^t a(s)ds} d\tau +$$

$$+ \lambda_k^2 \int_0^t F_k(\eta; u, p) \left((a'(t) - \lambda_k^2 a^2(t)) \int_\eta^t e^{-\lambda_k^2 \int_\tau^t a(s)ds} d\tau + a(t) \right) d\eta \, (k = 1,2,...) \quad (26)$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй компоненты $p(t)$ решения $\{u(x,t), p(t)\}$ задачи (1)-(3), (6) , (7) подставим выражение $\lambda_k^2 (a(t) u_k(t))' (k = 1,2,...)$ из (26) в (25) имеем:

$$p(t) = [h(t)]^{-1} \{ h''(t) - f(0,t) +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\lambda_k^2 \varphi_k \left((a'(t) - \lambda_k^2 a^2(t)) \left(e^{-\lambda_k^2 \int_0^t a(s)ds} + \lambda_k^2 a(0) \int_0^t e^{-\lambda_k^2 \int_\tau^t a(s)ds} d\tau \right) \right) + \right.$$

$$+ \lambda_k^2 \psi_k (a'(t) - \lambda_k^2 a^2(t)) \int_0^t e^{-\lambda_k^2 \int_\tau^t a(s)ds} d\tau +$$

$$\left. + \lambda_k^2 \int_0^t F_k(\eta; u, p) \left((a'(t) - \lambda_k^2 a^2(t)) \int_\eta^t e^{-\lambda_k^2 \int_\tau^t a(s)ds} d\tau + a(t) \right) d\eta \right] \Bigg\} , \quad (27)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (6) , (7) свелось к решению системы (24), (27) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $p(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1) - (3), (6) , (7) важную роль играет следующая:

Лемма 1. Если $\{u(x,t), p(t)\}$ - любое решение задачи (1)-(3), (6) , (7), то функции

$$u_k(t) = m_k \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx (k = 0,1,...)$$

удовлетворяют системе (20) и (21).

Доказательство. Пусть $\{u(x,t), p(t)\}$ - любое решение (1)-(3), (6)-(7). Тогда умножив обе части уравнения (1) на функцию $m_k \cos \lambda_k x$

$(k=0,1,\ldots)$, интегрируя полученное равенство по x от 0 до 1 и пользуясь соотношениями

$$m_k\int_0^1 u_{tt}(x,t)\cos\lambda_k x dx=\frac{d^2}{dt^2}\left(m_k\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx\right)=u_k''(t)\ \ (k=0,1,...),$$

$$m_k\int_0^1 u_{xx}(x,t)\cos\lambda_k x dx=-\lambda_k^2\left(m_k\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx\right)=-\lambda_k^2 u_k(t)\ \ (k=0,1,...)$$

получаем, что удовлетворяется уравнение (18).

Аналогично, из (2) получаем, что выполняется условие (19).

Таким образом, $u_k(t)$ $(k=0,1,2,...)$ являются решением задачи (18), (19). А отсюда, непосредственно следует, что функции $u_k(t)$ $(k=0,1,2,...)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (20), (21). Лемма доказана.

Очевидно, что если $u_k(t)=m_k\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx(k=0,1,...)$ является решением системы (20) и (21), то пара $\{u(x,t),p(t)\}$ функций $u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\cos\lambda_k x$ и $p(t)$ является решением системы (24), (27) .

Из леммы 1 следует, что имеет место следующее

Следствие. Пусть система (24), (27) имеет единственное решение. Тогда задача (1)-(3), (6), (7) не может иметь более одного решения, т.е. если задача (1)-(3), (6),(7) имеет решение, то оно единственно.

1. Обозначим через $B_{2,T}^3$ [6], совокупность всех функций $u(x,t)$ вида

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\cos\lambda_k x\ ,$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_k(t)(k=0,1,\ldots)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$I(u)\equiv\|u_0(t)\|_{C[0,T]}+\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right\}^{\frac{1}{2}}<+\infty.\ .$$

Норму на этом множестве определим так:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}=I(u).$$

2. Через E_T^3 обозначим пространство, состоящее из топологического произведения

$$B_{2,T}^3\times C[0,T].$$

Норма элемента $z=\{u,p\}$ определяется формулой

$$\|z\|_{E_T^3}=\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}+\|p(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что $B_{2,T}^3$ и E_T^3 являются банаховыми пространствами.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^3 оператор

$$\Phi(u,a)=\{\Phi_1(u,p),\Phi_2(u,p)\},$$

где

$$\Phi_1(u,p)=\tilde{u}(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{u}_k(t)\cos\lambda_k x,\quad \Phi_2(u,p)=\tilde{p}(t).$$

а $\tilde{u}_0(t),\tilde{u}_k(t)$ и $\tilde{p}(t)$ равны соответственно правым частям (20), (21) и (77).

Нетрудно видеть, что

$$\int_0^t e^{-\lambda_k^2\int_\tau^t a(s)ds}d\tau\le\frac{1}{m\lambda_k^2},\quad \int_\eta^t e^{-\lambda_k^2\int_\tau^t a(s)ds}d\tau\le\frac{1}{m\lambda_k^2},$$

где

$$m=\min_{0\le t\le T}a(t)>0.$$

Учитывая эти соотношения находим:

$$\|\tilde{u}_0(t)\|_{C[0,T]}\le|\varphi_0|+T|\psi_0|+T\sqrt{T}\left(\int_0^T|f_0(\tau)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+T^2\|p(t)\|_{C[0,T]}\|u_0(t)\|_{C[0,T]},\quad (28)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le2\left(1+\frac{a(0)}{m}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\ |\varphi_k|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{2}{m}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\ |\psi_k|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{2\sqrt{T}}{m}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k|f_k(\tau)|\right)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{2T}{m}\|p(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^2\ \|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad (29)$$

$$\|\tilde{p}(t)\|_{C[0,T]}\le\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\{\|h''(t)-f(0,t)\|_{C[0,T]}+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}(\|a'(t)\|_{C[0,T]}+\|a^2(t)\|_{C[0,T]})\times$$

$$\times\left[\left(1+\frac{a(0)}{m}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\ |\varphi_k|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\ |\psi_k|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sqrt{T}}{m}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\,|f_k(\tau)|\right)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{T}{m}\|p(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\ \|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}, \qquad (30)$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (6) , (7) удовлетворяют следующим условиям:

1). $\varphi(x)\in C^4[0,1], \varphi^{(5)}(x)\in L_2(0,1),\ \varphi'(0)=\varphi'(1)=\varphi'''(0)=\varphi'''(1)=0$,

2). $\psi(x)\in C^2[0,1], \psi'''(x)\in L_2(0,1), \psi'(0)=\psi'(1)=0$.

3). $f(x,t),\ f_x(x,t),\ f_{xx}(x,t)\in C(D_T),\ f_{xxx}(x,t)\in L_2(D_T)$,

$f_x(0,t)=f_x(1,t)=0\ \ (0\le t\le T)$.

4). $0<a(t)\in C^1[0,T], h(t)\in C^2[0,T]\ , h(t)\ne 0\,(0\le t\le T)$.

Тогда из (28) - (30), получаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\le A_1(T)+B_1(T)\|p(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\ , \qquad (31)$$

$$\|\tilde{p}(t)\|_{C[0,T]}\le A_2(T)+B_2(T)\|p(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}. \qquad (32)$$

где

$$A_1(T)=\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}+T\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}+T\sqrt{T}\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)}+$$

$$+2\left(1+\frac{a(0)}{m}\right)\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+\frac{2}{m}\|\psi'(x)\|_{L_2(0,1)}+\frac{2\sqrt{T}}{m}\|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$B_1(T)=T^2+\frac{2T}{m},$$

$$A_2(T)=\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\{\|h''(t)-f(0,t)\|_{C[0,T]}+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|a'(t)\|_{C[0,T]}+\|a^2(t)\|_{C[0,T]}\right)\times$$

$$\left.\times\left[\left(1+\frac{a(0)}{m}\right)\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)}+\frac{1}{m}\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+\frac{\sqrt{T}}{m}\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}\right]\right\},$$

$$B_2(T)=\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|a'(t)\|_{C[0,T]}+\|a^2(t)\|_{C[0,T]}\right)\frac{T}{m}.$$

Из неравенств (31)- (32**)** заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \|\tilde{p}(t)\|_{C[0,T]} \le A(T) + B(T)\|p(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} . \qquad (33)$$

где

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T), \quad B(T) = B_1(T) + B_2(T) .$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1)- 4) и

$$B(T)(A(T)+2)^2 < 1 , \qquad (34)$$

Тогда задача (1)- (3), (6) , (7) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^3} \le R = = A(T)+2)$ пространства E_T^3 единственное решение.

Доказательство. В пространстве E_T^3 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z \ , \qquad (35)$$

Где $z = \{u, p\}$, компоненты $\Phi_i(u, p)(i = 1,2)$ оператора $\Phi(u, p)$ определены правыми частями уравнений (24), (27), соответственно. Рассмотрим оператор $\Phi(u, p)$ в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^3} \le R = A(T)+2)$ из E_T^3.

Аналогично (33) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^3} \le A(T) + B(T)\|p(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} \le A(T) + B(T)(A(T)+2)^2 , \qquad (36)$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^3} \le \ \le B(T)R\left(\|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \|p_1(t) - p_2(t)\|_{C[0,T]}\right) \qquad (37)$$

Тогда из оценок (36) и (37), с учетом (34), следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, p\}$, которая является единственным решением уравнения (35), т.е. является единственным в шаре $K = K_R$ решением системы (24), (27).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^3$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ в D_T.

Из (22) ясно, что $u_k'(t) \in C[0,T]$ $(k = 1,2,\ldots)$ и

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3 \|u_k'(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le 2\left(\|a(t)\|_{C[0,T]} + a(0)\left(1 + \frac{\|a(t)\|_{C[0,T]}}{m}\right)\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5 \ |\varphi_k|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2\left(1 + \frac{\|a(t)\|_{C[0,T]}}{m}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3 \ |\psi_k|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+2\left(1+\frac{\|a(t)\|_{C[0,T]}}{m}\right)\left[\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\,|\,f_k(\tau)|\right)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+T\|p(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

или

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_k'(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le 2\left(\|a(t)\|_{C[0,T]}+a(0)\left(1+\frac{\|a(t)\|_{C[0,T]}}{m}\right)\right)\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)}+2\left(1+\frac{\|a(t)\|_{C[0,T]}}{m}\right)\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+2\left(1+\frac{\|a(t)\|_{C[0,T]}}{m}\right)\left[\sqrt{T}\|\,f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}+T\|p(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\right].$$

Из последнего соотношения ясно, что $u_t(x,t), u_{tx}(x,t), u_{txx}(x,t)$ непрерывна в D_T.

Из (18) , нетрудно видеть, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\|u_k''(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{3}\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_k'(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\sqrt{3}\|a'(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}+\left\|\|\,f_x(x,t)+p(t)u_x(t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}.$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(x,t)$ непрерывна в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3), (6) и (7) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $\{u(x,t), p(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (6), (7). В силу следствия леммы 1 оно единственно в шаре $K=K_R$. Теорема доказана.

В силу теоремы 1, из теоремы 2 немедленно вытекает однозначная разрешимости задачи (1)-(5).

Теорема 3. Пусть выполняются все условия теоремы 2, $\int_0^1 f(x,t)dx=0$, $(0\le t\le T)$ и выполнены условия согласования

$$\int_0^1\varphi(x)dx=0,\quad \int_0^1\psi(x)dx=0,\ \varphi(0)=h(0),\quad \psi(0)=h'(0)$$

Тогда задача (1)-(5) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^3} \le R = A(T) + 2)$ пространства E_T^3 единственное классическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.И.* Об устойчивости обратных задач / Докл. АН СССР. 1943, 39, №5, с.195-198
2. *Лаврентьев М.М.* Об одной обратной задаче для волнового уравнения / Докл. АН СССР. 1964, 157, №3, с.520-521
3. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Т.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М: Наука, 1980, 288 с.
4. *Иванов В.К., Васин В.В., Танина В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978, 206 с.
5. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М: МГУ, 1994, 206 с.
6. *Худавердиев К.И., Велиев А.А.* Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью, Баку: Чашыоглы, 2010, 168 с.