PEDAQOJİ UNİVERSİTETİN XƏBƏRLƏRİ – 2019, C. 67, № 1, s. 32-39
ИЗВЕСТИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА – 2019, Т. 67, № 1, с. 32-39
TRANSACTIONS OF PEDAGOGICAL UNIVERSITY – 2019, V. 67, № 1, pp. 32-39

УДК 517.5

С.Г.Касумова
Азербайджанский государственный педагогический университет
sabina.qasimova.84@mail.ru

ОБ ОДНОМ ВЕСОВОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В L_p – ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХОВОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: *радиальный вес, ядро, сингулярный интеграл, банахова решетка*

Получены двухвесовые неравенства слабого и сильного типа в пространствах $L_p\ (\Omega_k, E)$ для интегральных операторов, возникающих на основе интегрального представления Ильина-Бесова в случае радиальных весов.

S.H.Qasımova

L_p BANAX FƏZALARINDA İNTEQRAL OPERATORLAR ÜÇÜN ÇƏKİLİ BƏRABƏRSİZLİKLƏR

Açar sözlər: *radial çəki, nüvə, sinqulyar integral, Banax qəfəsi*

Radial cəkili İlin-Besov inteqral təsvirinə əsasən inteqral operatorlar üçün $L_p\ (\Omega_k, E)$ fəzasında zəif və güclü tipli ikiçəkili bərabərsizliklər alınmışdır.

S.H.Gasimova

WEIGHTED INEQUALITIES FOR OPERATORS IN L_p BANACH SPACES FUNCTIONS

Key words: *radial weight, kernel, singular integral, Banach lattice*

Received two-weighted inequalities of weak and strong type in spaces $L_p\ (\Omega_k, E)$ for integral operators arising from the integral representation Ilin-Besov in radial scales.

Пусть R^n-n-мерное евклидово пространство точек
$x = (x_1, \dots, x_n)$,
$x = (x', x''), x' = (x_1, \dots, x_k) \in R^k, x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n) \in R^{n-k}, k = 1, \dots, n-1$.
$R_+^n = \{x: x \in R^n, x_n > 0\}$, $R_{++}^n = \{x: x \in R^n, x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$.
N - множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$; $R_0^n = R^n \setminus \{0\}$;

$S^{n-1} = \{x : x \in R^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$.

Через $a = (a_1, \dots, a_n), m = (m_1, \dots, m_n)$ мульти индексы с целочисленными неотрицательными компонентами, $|a| = \sum_{i=1}^n a_i$; $(a, m) = \sum_{i=1}^n a_i m_i, a = (a_1, \dots, a_n); a > 0,\ i = 1, \dots, n.$

Пусть ρ (x) – положительное при $x \neq 0$ решение уравнения, заданного неявно равенством $\sum_{i=1}^n x_i^2 \rho^{-2aj} = 1$

Отметим, что $\rho(x)$ эквивалентно $\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{1}{a_i}}$, для некоторых положительных c_1 , c_2.

$$c_1 \rho\,(x) \ \le\ \sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{1}{a_i}} \ \le\ c_2\, \rho(x)\,, \quad x \in R^n$$

Будем говорить, что банахово пространство E ζ -выпукло, или выпукло по Буркхольдерус, если существует симметрическая функция $\zeta(a,b)$ на ExE, выпуклая по каждой из переменных и удовлетворяюшая условиями:

$$\zeta\,(0,0) > 0,\ \zeta(a, b) \le \|a + b\|_E \text{, при } \|a\|_E = \|b\|_E = 1$$

Через $L_{p,\omega}\left(R^n, E\right)$ будем обозначать пространство сильно измеримых на R^n, E – значных функцими $f(x)$ для которых конечна норма.

$$\|f\|_{Lp,\,\omega(R^n,E)} = \left(\int\limits_{R^n} \|f(x)\|_E^p\, \omega(x)\, dx\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Говорят, что ω принадлежит к $A_p(R^h), 1 < p < \infty,$ если

$$\sup_{x,y \in R^n} |B(x,r)|^{-1} \int\limits_{B(x,r)} \omega(y)\, dy \left(|B(x,r)|^{-1} \int\limits_{B(x,r)} \omega^{-\frac{1}{p-1}}(y)\, dy \right)^{p-1} < \infty$$

Кроме того , $\omega \in A_1(R^n), если\ \ x \in R^n\ и\ \ r > 0$

$$|B(x,r)|^{-1} \int\limits_{B(x,r)} \omega^{-\frac{1}{p-1}}(y)\, dy \le C \operatorname*{ess\,sup}_{y \in B(x,\backslash r)} \omega(y).$$

Пусть рассмотрим анизотропный сингулярный интегральный оператор.

$$\text{Tf(x)}=\int_{R^n} k(x-y)f(y)dy=\lim_{\varepsilon\to 0+} T_\varepsilon f(x)$$

Предположим, что $k: R_0^n \to R$, анизотропное сингулярное ядро, удовлетворяющее условиям:

1) $k(t^a x) \equiv k(t^{a_1}x_1, \dots, t^{a_n}x_n) = t^{-|a|}k(x)$, $t > 0$, $x \in R_0^n$,

где $|a| = \sum_{i=1}^n a_i$.

2) $\int\limits_{S^{n-1}} k(x) \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \, dS(x) = 0.$

3) Сушествует такая постоянная $c > 0$, *что*

$$|k(x-y) - k(x)| \le c\omega(g(y)/g(x)) \; g(x)^{-|a|} \; ,$$

при $g(x) > 2g(y)$, *где C – не зависит от x,y и функция* $\omega : [0,1] \to R_+$, *неубывающая* $\omega(0) = 0$, $\omega(2S) \le \mathrm{c} \cdot \omega(S)$, $\mathrm{c} \ge 1$ для $S > 0$ *и*

$$\int_0^1 \omega(t) \, \frac{dt}{t} < \infty$$

Теорема 1. Пусть E $-\xi$ *выпуклая банахова решетка и ядро k удовлетворяет условиям 1) – 3),*$\omega \in A_p(R^n), f \in L_{p,\omega}(R^n, E), 1 \le p < \infty$ *Тогда сингулярный интеграл*$Tf(x)$*существует в смысле сходимости по норме E для почти всех* $x \in R^n$, *и при* $1 < p < \infty$*ограничен из* $L_{p,\omega}(R^n, E)$ *в* $L_{p,\omega}(R^n, E)$, *то есть*

$$\int_{R^n} \|Tf(x)\|_E^p \omega(x)dx \le C \int_{R^n} \|f(x)\|_E^p \omega(x)dx, \qquad (1)$$

$1 < p < \infty$;*а при* $p = 1$.

$$\int\limits_{\left\{x\in R^n: \|Tf(x)\|_E > \lambda\right\}} \omega(x)dx \le \left(\frac{c}{\lambda}\right) \int_{R^n} \|f(x)\|_E \, \omega(x)dx, \qquad (2)$$

где положительная постоянная c не зависит от f .

Для скалярнознозначных функций теорема 1 для изотропного случая т.е. при$a_1 =..= a_n = 1$ доказана в [3], а в анизотропном случае [4]. Теорема 1 в анизотропном случае для ξ выпуклых банаховых пространств доказана в [5].

Теорема 2. Пусть E−ξ выпуклая банахова решетка, 1<p<∞ , ядро k (x) удовлетворяет условиям 1) -3). Предположим, что u,u₁ – положительные неубывающие функции на (0, ∞), $\varphi(g(x)) \in A_p(R^n), \omega = u\varphi$; и $\omega_1 = u_1\varphi$.

Если весовая пара (ω, ω_1) удовлетворяют условию $\sup\limits_{t>0}\left(\int_t^\infty \omega(\tau)\tau^{-1-|a|(p-1)}d\tau\right) \cdot \left(\int_0^{\frac{t}{2}} \omega^{1-p'}(\tau)\tau^{|a|-1}\,d\tau\right)^{p-1} < \infty,$

то сингулярный интеграл $Tf(x)$ существует в смысле сходимости по норме E для почти всех $x \in R^n$ и существует $c > 0$ такое, что для любого $f \in L_p, \omega(R^n, E)$ имеет место неравенство:

$$\int_{R^n} \|Tf(x)\|_E^p \omega_1(\rho(x))dx \le C \int_{R^n} \|f(x)\|_E^p \, \omega(\rho(x))dx, \qquad (3)$$

где положительная постоянная с не зависит от f .

Замечание. Отметим что, для числовых функций теорема 2 доказано при $\varphi = 1$, в [1] , а для радиальных$\varphi \in A_p(R^n)$в [2].

Пусть

$$\Omega_к = \{x: x' \in R^n, \varphi_i(x') < x_i < \infty, i = к+1, .., n\} \qquad (4)$$

$$\Omega_0 = \left\{x: x \in R^n, x_i^{(0)} < x_i < \infty, i = 1, .., n\right\} \qquad (5)$$

Достаточные условия для общих радиальных весов, обеспечивающие справедливость двух весовых неравенств сильного и слабого типа, даются в следующей теореме.

Рассмотрим следующий интегральный оператор, играющий важную роль в теореме вложения,

$$K^a f(x) = \int_{R^n} K^a \text{ (x-y)} f(y)dy, \quad K^\alpha(y) = \int_{R^n} M_i(y\upsilon^{-a})\upsilon^{a-|a|-1} d\upsilon.$$

Теорема 3. Пусть E- банахова решетка, $\Omega_к$ имеет вид (4) и (5) .

$$1 < p \le q < \infty, \qquad \left(\frac{a}{|a|}\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

Предположим, что весовая пара (ω, ω_1) удовлетворяет следующим условиям

1) $\exists\, c > 0, \forall\, t > 0, \quad \left(\underset{\frac{t}{c_0} < \tau \le \delta c_0 t}{Sup} \omega_1(\tau)\right)^{\frac{p}{q}} \le c \underset{\frac{t}{c_0} < \tau \le \delta c_0 t}{\inf} \omega(\tau);$

2) $\underset{t>0}{Sup}\left(\int_t^\infty \omega_1(\tau)\tau^{-1-\frac{|a'|q}{p'}} d(\tau)\right)^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\int_0^t \omega^{1-p'}(\tau)\tau^{|a''|-1}d\tau\right)^{p-1} < \infty;$

3) $Sup \left(\int_0^t \omega_1(\tau)\tau^{|a''|-1} d(\tau)\right)^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\int_t^\infty \omega^{1-p'}(\tau)\tau^{-1-\frac{|a''|p'}{q}}d\tau\right)^{p-1} < \infty,$

где $\omega(\rho(x, \Gamma_k))$ эквивалентно $\omega(\pi_k(x))$, $\omega_1(\rho(x, \Gamma_k))$ эквивалентно $\omega_1(\pi_k(x))$,

Тогда при $1 < p < q < \infty$ для любого $f \in L_P, \omega(\rho(x, \Gamma_к))\ (\Omega_k; E)$ имеет место следующее неравенство:

$$\left(\int_{\Omega_K} \left\| f\, K^{a}\,(x) \right\|_E^{g}\ \omega\big(g(x,\delta_k)\big)dx \right)^{\frac{1}{g}} \le$$

$$\le C\left(\int_{\Omega_k} \|f(x)\|_E^{p} \omega\big(p(x,\delta_k)\big)dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (8)$$

Если к тому же $E-\xi$ выпуклая банахова решетка, то неравенство (8) справедливо также при $1<p=q<\infty$, т.е. $f \to k\ \ f$ ограничено из $L_p,\ \omega(\rho(x,\Gamma_\kappa))\ (\Omega_k;E)$ в $L_p,\ \omega_1(\rho(x,\Gamma_\kappa))\,(\Omega_K;E)$.

Доказательство. Представим левую сторону неравенства (8) в следующем виде:

$$\left(\int_{\Omega_k} \left\| K^{a} f(x) \right\|_E^{q} \omega_1(\rho(x,\Gamma_k)dx \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{m\in Z} \int_{2^m<\rho(x,\delta_k)\le 2^{m+1}} \left\| K^{a} f(x) \right\|_E^{q} \omega_1\big(\rho(x,\Gamma_k)\big)dx \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C_1\left(\sum_{m\in Z} \int_{2^m<\rho(x,\delta_k)\le 2^{m+1}} \left\| K^{a}\ \left(f\ \mathcal{X}\left\{\rho(y,\Gamma_\kappa) \le \tfrac{2m-1}{C_0}\right\}\right) \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot\,(x) \right\|_B^{q} \omega_1\big(\rho(x,\Gamma_k)\big)dx \right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ C_1\left(\sum_{m\in Z} \int_{2^m<\rho(x,\Gamma_k)\le 2^{m+1}} \left\| K^{a}\left(f\mathcal{X}_{\left\{\frac{2m-1}{C_0}<\rho(y,\Gamma_k)<\frac{2m+1}{C_0}\right\}}(x) \right\|_E^{q} \omega_1\big(\rho(x,\Gamma_k)\big)dx \right)^{\frac{1}{q}} \right) +$$

$$+c_2\left(\sum_{m\in Z} \int_{2^m<\rho(x,\Gamma_k)\le 2^{m+1}} \left\| K^{a}\left(f\ \mathcal{X}_{\left\{\rho(y,\Gamma_k)\ge\frac{2^{m+2}}{C_0}\right\}} \cdot \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \cdot\,(x) \right) \right\|_E^{q} \omega_1\big(\rho(x,\Gamma_k)\big)dx \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= C_1\left(\sum_{m\in z} A_{1m}\right)^{\frac{1}{q}} + C_1\left(\sum_{m\in Z} A_{2m}\right)^{\frac{1}{q}} + C_1\left(\sum_{m\in Z} A_{3m}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Оценим $\sum_{m\in Z} A_{im}$

$$\left(\sum_{m\in Z} A_{1m}\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_2\left(\sum_{m\in Z} \int_{2^m<\rho(x,\Gamma_k)\leq 2^{m-1}} \omega_1(\rho(x,\Gamma_k))\rrbracket \cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\int_{\rho(y,\Gamma_k)\leq\rho(x,\Gamma_k)} \llbracket\|f(y)\|_E\,\rho(y-x)^{a-|a|}dy\big)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq\right.$$

$$\leq\ C_3\left(\sum_{m\in Z} \int_{\frac{2^m}{c}<\pi_k(x)\leq\left(\frac{2^{m+1}}{c}\right)} \omega_1\left(\pi_k(x)\right) \cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\int_{\pi_k(y)\leq\pi_k(x)} \llbracket\|f(y)\|_E\,\rho(y-x)^{a-|a|}\,dy\big)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\rrbracket\right.$$

Теперь оценим $\sum_{m\in Z} A_{3m}$

$$\left(\sum_{m\in Z} A_{3m}\right) \leq C_2\left(\sum_{m\in Z} \int_{2^m<\rho(x,\Gamma_k)\leq 2^{m+1}} \omega_1(\rho(x,\Gamma_k))\rrbracket \cdot\right.$$

$$\left.\cdot\llbracket\left(\int_{\rho(y,\Gamma_k)\geq\rho(x,\Gamma_k)} \left(\|f(y)\|_E\ \ \rho(y-x)^{a-|a|}\,dy\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\big)\rrbracket = \right.$$

$$= \mathrm{c}_2\left(\sum_{m\in Z} \int_{\frac{2^m}{c}<\pi_k(x)\leq\frac{2^{m+1}}{c}} \llbracket\omega_1(c\pi_k(x)) \cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\int_{\pi_k(y)\geq\pi_k(x)} \left(\|f(y)\|_E\,\rho(y-x)^{a-|a|}\,dy\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\right) =$$

$$= c_2 \left(\sum_{m \in Z} \int_{\frac{2^m}{C} < \rho(x^4 - \bar{\varphi}(x')) \le \frac{2^{m+1}}{C}} [\![\omega_1 \left(C \left(\rho(x'' - \bar{\varphi}(x'')) \right) \right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\int_{\rho(y'' - \bar{\varphi}(y')) \ge \rho(x'' - \bar{\varphi}(x'))} \|f(y)\|_E \rho(y - x)^{a - |a|} dy \right)^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg)$$

$$\left(\sum_{m \in Z} A_{2^m} \right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{m \in Z} \left(\mathop{Sup}_{\frac{2^{m-1}}{c_0} < \rho(x, \Gamma_k) \le \frac{2^{m+2}}{c_0}} \omega_1(\rho(x, \Gamma_k)) \right) \right]\!] \times$$

$$\times \int_{\Omega_K} \left\| K^a \left(f\chi_{\left\{ \frac{2^{m-1}1}{c_0} < \rho(x, \Gamma\ ) \le \frac{2^{m+2}}{c_0} \right\}} \right) \cdot (x) \right\|_E^q dx)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C \left(\sum_{m \in Z} \mathop{Sup}_{\frac{2^{m-1}}{C} < \rho(x, \Gamma_k) \le \frac{2^{m+2}}{c_0}} \omega_1(\rho(x, \Gamma_k)) \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{\Omega_K} [\![\left\| f\chi_{\left\{ \frac{2^{m-1}}{c_0} < \rho(x, \Gamma_\kappa) \le \frac{2^{m+2}}{c_0} \right\}} \cdot (x) \right\|_E^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \Bigg)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C \cdot \sum_{m \in Z} \left(\int_{\frac{2^{m-1}}{c_0} < \rho(x, \Gamma_k) < 2^{m+2} c_0} \|f(x)\|_E^p \ \omega(\rho(x, \Gamma_k)\ dx\ )^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C \cdot \left(\int_{\Omega_K} \|f(x)|_E^p \, \omega(\rho(x, \Gamma_k)) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гулиев В.С.* Двухвесовые неравенства для интегральных операторов в Lp – пространстве и их приложения. Тр. МИАН, 1993, Т.204, с.113-133

2. *Kokilashvili V. M., Meskhi A.* Two-weight inequalities for singular integrals defined on homogeneous groups. Proc. Razmadze Math. Inst. 112 (1997), pp.57-90

3. *Coifman R.R., Fefferman G.* Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. Stud. Math. 1 atu, v.51, pp.241-250

4. *Рохман И.Н., Солонников В.А.* Оценки в весовых нормах Lp для сингулярных интегралов с анизотропными ядрами. Зап. Науч. Семинаров ЛОМИ. 1985, Т.147, с.124-137

5. *Rubia de Francia J. L., Ruiz F.J., Torrea I. L.* Calderon-Zygmund theory for operator – Valued Kernels. Adv. Math. 1986, v.62. No1, pp.7-48