PEDAQOJİ UNİVERSİTETİN XƏBƏRLƏRİ – 2019, C. 67, № 1, s. 40-53
ИЗВЕСТИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА – 2019, Т. 67, № 1, с. 40-53
TRANSACTIONS OF PEDAGOGICAL UNIVERSITY – 2019, V. 67, № 1, pp. 40-53

УДК 51

Г.Р.Кадирова
Институт математики и механики НАН Азербайджана
gunayqedirova@inbox.ru

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ С НЕГЛАДКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

***Ключевые слова**: термоупругость, смешанная задача, корректность, система гиперболическо-параболических уравнений, сингулярные коэффициенты*

Различные проблемы термоупругости сводятся к смешанной задаче для системы параболическо-гиперболических уравнений. Рассмотрена смешанная задача для термоупругих систем уравнений, когда коэффициент в главной части имеет конечную вариацию. Исследовано существование и единственность слабых решений рассматриваемой задачи.

G.R.Qədirova

HAMAR OLMAYAN ƏMSALLI İSTİLİK-ELASTİQİYYƏT TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN QARIŞIQ MƏSƏLƏ

***Açar sözlər**: istilik-elastiqiyyət, qarışıq məsələ, korrektlik, hiperbolik-parabolik tənliklər sistemi, sinqulyar əmsallar*

Termoelastiqiyyət nəzəriyyəsinin müxtəlif problemlərinin həlli istilik-elastiqiyyət tənliklər sistemi üçün qarışıq məsələyə gətirilir. İşdə baş hissədəki əmsal sonlu variasiyaya malik istilik-elastiqiyyət tənliklər sistemi üçün qarışıq məsələyə baxılmışdır. Baxılan məsələnin zəif həllinin varlığı və yeganəliyi araşdırılmışdır.

G.R.Gadirova

MIXED PROBLEM FOR THE SYSTEM OF THERMOELASTICITY EQUATIONS WITH NON-SMOOTH COEFFICIENT

***Keywords**: termoelasticity, mixed problem, well-posedness, system of parabolic hyperbolic equations, singular coefficient*

The various problems of thermoelasticity theory are reduced to the mixed problem for a classification of thermoelasticity equations. The mixed problem for the system of thermoelastic equations is considered in the case when the coefficient in the main part has a finite variation. The existence and uniqueness of weak solutions of the problem is studied.

1. Постановка задачи и основные результаты

В области $Q_T = (0,T)\times(0,L)$ рассмотрим смешанную задачу для одномерной системы теории термоупругости:

$$\left.\begin{aligned} u_{tt} - a(t)\Delta u + \nabla v &= f(t,x), \\ v_t - \Delta v + \nabla u_t &= g(t,x) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u(t,0) = u(t,L) = 0, \quad v(t,0) = v(t,L) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

и с начальными условиями

$$u(0,x) = u_0(x), \;\; \dot{u}(0,x) = u_1(x), \;\; v(0,x) = v_0(x), \quad x \in (0,L), \tag{3}$$

где $a(t)$-некоторая вещественная функция, определенная на $[0,T]$, а $f(t,x)$ $g(t,x)$ - некоторые функции, определенные на $[0,T]\times(0,L)$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$

В случае, когда $a(t)$ достаточно гладкая функция разрешимость задачи (1) – (3) исследованы в работах различных авторов (напр. см.[1-4]). В данной работе рассматривается случай, когда $a(t) \ge a_0 > 0$ и имеет ограниченную вариацию. Известно, что если функция $a(t)$ имеет ограниченную вариацию, то смешанная задача для гиперболического уравнения

$$u_{tt} - a(t)\Delta u = 0 = 0$$

имеет слабое решение [5]. В данной работе аналогичный вопрос будет решена для задачи (1)-(3).

Введем некоторые определения и обозначения, через $\hat{W}_2^m$ обозначим следующее подпространство пространства $W_2^m(\Omega)$:

$$\hat{W}_2^m = \{u: \quad u \in W_2^m(\Omega), \quad \Delta^i u(x) = 0, \; x \in \partial\Omega, \;\; i = 0,1\ldots,\left(\frac{m}{2}\right),$$

где $\left(\frac{m}{2}\right) = \ell$ если $m = 2\ell + 1$, $\left(\frac{m}{2}\right) = \ell - 1$ если $\mathrm{m} = 2\ell + 1$,

$\ell = 1,2,\ldots,\Omega = (0,L), \partial\Omega = \{0,L\}\}$.

В дальнейшем через $\|\cdot\|$ будем обозначать норму в $L_2(\Omega)$. Абстрактные функции $t \to u(t, x,)$ со значениями в $L_2(\Omega)$ или в $\hat{W}_2^i$, $i = 1,2$ будем обозначать через $u(t)$.

Пусть $X \subset Y$ - гильбертовы пространства. Через $W_p^1(a, b; X, Y)$ обозначим следующее пространство (см. [6], стр.23):

$$W_p^1(a, b; X, Y) = \{ u : u : (a,b) \to Y,\ u \in L_p(a,b; X),\ u_t \in L_p(a,b; Y) \}, \text{ где } 1 \le p \le \infty .$$

Разрешимость задачи (1)-(3) будем исследовать при следующих предположениях

1°. $a(t) \in BV\,[0,T]$, $a(t) \ge a_0 > 0$.

2^0. Функции $f(t, x),\ g(t, x)$ определены на $[0,T] \times \Omega$ и $f(t, x),\ g(t, x) \in L_2(0,T;\ L_2(\Omega))$.

Определение. Функции (u, v), где $u \in L_\infty(0,T;\ \hat{W}_2^1(\Omega))$ $u_t \in L_\infty(0,T;\ L_2(\Omega))$, $v \in L_\infty(0,T;\ L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;\ \hat{W}_2^1(\Omega))$ назовем слабым решением задачи (1)-(3), если при любых $w(\cdot) \in W_2^1(0,T; \hat{W}_2^1, L_2(\Omega))$, $\theta(\cdot) \in W_2^1(0,T; \hat{W}_2^1, L_2(\Omega))$, $w(T, x) = 0$, $\theta(T, x) = 0$, $x \in \Omega$, выполнены равенства

$$-\int_0^T \int_\Omega u'(t,x) \cdot w'(t,x)\,dxdt - \int_0^T \int_\Omega a(t) \nabla u(t,x) \nabla w(t,x)\,dxdt +$$

$$+ \int_\Omega u_1(x) w(0,x)\,dx + \int_0^T \int_\Omega \nabla v(t,x).\ w(t,x)\,dx = \int_0^T \int_\Omega f(t,x).w(t,x)\,dx \quad (4)$$

$$-\int_0^T \int_\Omega v(t,x) \cdot \theta'(t,x)\,dxdt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u(t,x) \nabla \theta(t,x)\,dxdt +$$

$$+ \int_\Omega v_0(x) \theta(0,x)\,dx + \int_0^T \int_\Omega u'(t,x) \nabla \theta(t,x)\,dx = \int_0^T \int_\Omega g(t,x).\theta(t,x)\,dx, \quad (5)$$

$u(t, x)$ удовлетворяет начальному условию

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

где « ' » означает производную по t.

Доказана следующая теорема о существовании слабого решения задачи (1) - (3).

Теорема 1. Пусть выполнены условие $1^0 - 2^0$. Тогда при любых $u_0 \in \hat{W}_2^1$ $u_1 \in L_2(\Omega)$ задача (1) - (3) имеет единственное слабое решение (u,v), где $u \in L_\infty\left(0,T;\ \bar{W}_2^1(\Omega)\right)$, $u_t \in L_\infty\left(0,T;\ L_2(\Omega)\right)$, $v \in L_\infty\left(0,T;\ L_2(\Omega)\right) \cap L_2\left(0,T;\ \bar{W}_2^1(\Omega)\right)$.

2. Доказательство теоремы о существовании слабого решения

Сначала рассмотрим случай когда $a(t) = a = const$. Заменой $z_1 = u,\quad z_2 = u' \qquad z_3 = v'$ задача (1)- (3) сводится к задаче Коши.

$$\begin{cases} z(t) = L\ z(t) + F(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases}, \tag{7}$$

в гильбертовом пространстве $\mathrm{H} = \hat{W}_2^1 \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ где

$$L = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ a\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}, \qquad D(L(t)) = H_1 = \hat{W}_2^2 \times \hat{W}_2^1 \times \hat{W}_2^2$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t,\ x) \\ g(t,\ x) \end{pmatrix}, \qquad z(t) = \begin{pmatrix} u(t,x) \\ u'(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Линейный оператор L является максимально диссипативным, поэтому задача (7) корректно (см. 7, с.596-604), т.е. при любых $z_0 \in H_1$ задача (7) имеет единственное решение $z(t) \in C([0,T];H_1) \cap C^1([0,T],H)$. Если $z_0 \in H$ то задача (7) имеет слабое решение.

Легко показать, что если $z_0 \in H$ и $z(t)-$ является соответствующим слабым решением задачи (7), то $z(t) = \begin{pmatrix} u(t,x) \\ u'(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix}$ и $(u(t,x), v(t,x))-$ является слабым решением задачи (1) - (3). Тогда при любых $w(\cdot) \in W_2^1\left(0,T;\hat{W}_2^1,\ L_2(\Omega)\right)$, $\theta(\cdot) \in W_2^1\left(0,T;\hat{W}_2^1,\ L_2(\Omega)\right)$, $w(T,x) = 0$, $\theta(T,x) = 0,\ x \in \Omega$:

$$-\int_0^T\int_\Omega u'(t,x)\cdot w'(t,x)dxdt-\int_0^T\int_\Omega a\nabla u(t,x)\nabla w(t,x)dxdt+$$

$$+\int_\Omega u_1(x)w(0,x)dx+\int_0^T\int_\Omega \nabla v(t,x).\ w(t,x)\,dx=\int_0^T\int_\Omega f(t,x).w(t,x)\,dx\ , \tag{8}$$

и

$$-\int_0^T\int_\Omega v(t,x)\cdot\theta'(t,x)dxdt+\int_0^T\int_\Omega \nabla u(t,x)\nabla\theta(t,x)dxdt+$$

$$+\int_\Omega v_0(x)\theta(0,x)dx+\int_0^T\int_\Omega u'(t,x)\ \nabla\theta(t,x)\,dx=\int_0^T\int_\Omega g(t,x).\theta(t,x)\,dx\ . \tag{9}$$

Если $z(t_0)=\begin{pmatrix}u(t_0,x)\\ u'(t_0,x)\\ v(t_0,x)\end{pmatrix}\in H_1,$ то $z(t)-$является сильным решением задачи (8), (9) и справедливо следующее тождество

$$\frac{1}{2}\|u'(t,\cdot)\|^2+\frac{a}{2}\|\nabla u(t,\cdot)\|^2+\int_0^t\int_\Omega \nabla v(t,x)\cdot u'(t,x)\ dx=$$

$$=\frac{1}{2}\|u'(t_0,\cdot)\|^2+\frac{a}{2}\|\nabla u(t_0,\cdot)\|^2+\int_{t_0}^t\int_\Omega f(\tau,x)\,u'(\tau,x)dxd\tau\,,$$

и

$$\frac{1}{2}\|v(t,\cdot)\|^2+\int_0^t\|\nabla v(t,\cdot)\|^2+\int_0^t\int_\Omega \nabla u'(t,x)\cdot v(t,x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\|v(t_0,\cdot)\|^2+\int_{t_0}^t\int_\Omega g(\tau,x)\,v(\tau,x)dxd\tau\ .$$

Пусть $z(t_0)=\begin{pmatrix}u(t_0,x)\\ u'(t_0,x)\\ v(t_0,x)\end{pmatrix}\in H_1,$ тогда существует $\bar{z}_{0n}=\begin{pmatrix}u_{0n}\\ u_{1n}\\ v_{0n}\end{pmatrix}\in H_1,$ такое, что $z_{0n}\to z(t_0)$ в H. Пусть $z_n(t)=\begin{pmatrix}u_n(t,x)\\ u_n'(t,x)\\ v_n(t,x)\end{pmatrix}$ решение задачи (7) с начальным условием $z_n(0)=z_{0n}$. При каждом n для $(u_n(t,x),v_n(t,x))$ выполнены тождества (8), (9). Ввиду корректности задачи (7) ,(8) в H

при $n \to \infty$ $z_n(t) \to z(t)$ в $C([0,T], H)$, т.е. $\bar{u}_n(t,x) \to u(t,x)$ в $C([0,T], \hat{W}_2^1)$, $v_n(t,x) \to v(t,x)$ в $C([0,T], L_2(\Omega))$ (см. [7]) .

Написав тождество (8), (9) для $(u_n(t,x), v_n(t,x))$, переходим к пределу при $n \to \infty$. Тогда для $(u(t,x), v(t,x))$ получим тожества (8),(9).

Отрезок $[0,T]$ разобьем на $n-$ частей $0 = t_0 < t_1 < \ldots. < t_n = T$. Пусть $a_n(t) = a_{nk,}$ $t_k \le t \le t_{k+1}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, где $a_{nk} = \frac{1}{\delta_k}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} a(\tau)d\tau$, $\delta_n = t_{k+1} - t_k$.

Рассмотрим смешанную задачу

$$\left.\begin{aligned} u''_{n,k} - a_n(t)\Delta u_{n,k} + \nabla v_{n,k} &= f(t,x), \\ v'_{n,k} - \Delta v_{n,k} + \nabla u'_{n,k} &= g(t,x), \end{aligned}\right\} \quad t_k \le t \le t_{k+1}, \quad x \in \Omega \tag{10}$$

с граничными условиями (2) и с начальными условиями

$$u_{n,k}(t_k, x) = u^0_{nk}(x), \qquad u'_{n,k}(t_k, x) = u^1_{nk}(x), \quad x \in \Omega, \tag{11}$$

$$v_{n,k}(t_k, x) = v^0_{nk}(x), \quad x \in \Omega, \tag{12}$$

где

$$u^0_{n0}(x) = u_0(x), \quad u'_{n,0}(x) = u_1(x), \quad v^0_{n0}(x) = v_0(x) \quad x \in \Omega, \tag{13}$$

$$u^0_{n,k}(x) = u_{n,k-1}(t_{k,} x), \quad u'_{n,k}(x) = u'_{n,k-1}(t_{k,} x), \quad x \in \Omega, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{14}$$

$$v^0_{n,k}(x) = v_{n,k-1}(t_{k,} x), \quad x \in \Omega, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{15}$$

Решая последовательно задачи (10)- (15), начиная с $k = 0$ получим, что при каждом $k = 0,1,\ldots,n-1$ задача (10) – (15) имеет единственное решение $(u_{nk}(\cdot), v_{nk}(\cdot))$,где $u_{nk}(\cdot) \in C([t_{k,}\ t_{k+1}];\ \hat{W}_2^1) \cap C^1([t_k, t_{k+1}]; L_2(\Omega))$, $v_{nk}(\cdot) \in C([t_{k,}\ t_{k+1}];\ L_2(\Omega))$ и справедливы энергетические равенства

$$\frac{1}{2}\left\|u'_{n,k}(t)\right\|^2 + \frac{a_{n,k}}{2}\left\|\nabla u_{n,k}(t)\right\|^2 + \int\limits_{t_k}^{t}\int\limits_{\Omega} \nabla v_{n,k}(\tau,x) \cdot u'_{n,k}(\tau,x)\, dx d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left\|u'_{n,k}(t_k)\right\|^2 + \frac{a_{n,k}}{2}\left\|\nabla u_{n,k}(t_k)\right\|^2 +$$

$$+\int_{t_k}^{t}\int_{\Omega} f(\tau,x)\ u'_{n,k}(\tau,x)dxd\tau,\ t_k \le t \le t_{k+1},\quad k=0,1,\dots,n-1. \tag{16}$$

и

$$\frac{1}{2}\left\|v_{n,k}(t,\cdot)\right\|^2+\int_0^t\left\|\nabla v(t,\cdot)\right\|^2+\int_{t_k}^{t}\int_{\Omega}\nabla u'_{n,k}(\tau,x)\cdot v_{n,k}(\tau,x)\,dxd\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\left\|v_{n,k}(t_k,\cdot)\right\|^2+\int_{t_k}^{t}\int_{\Omega} g(\tau,x)\,v_{n,k}(\tau,x)dxd\tau\,. \tag{17}$$

Рассмотрим последовательность $(u_n(t),v_n(t)),\ 0\le t\le T,$ где $u_n(t)=u_{n,k}(k)$, $v_n(t)=v_{n,k}(k)$ при $t_k \le t \le t_{k+1},\ \ k=0,1,\dots,\ n$.

Учитывая это, из (17) получим

$$\frac{1}{2}\left\|u'_n(t)\right\|^2+\frac{a_{n,k}}{2}\left\|\nabla u_n(t)\right\|^2=\frac{1}{2}\left\|u'_{n,k}(t_k)\right\|^2+\frac{a_{n,k}}{2}\left\|\nabla u_{n,k}(t_k)\right\|^2+$$

$$=-\int_{t_k}^{t}\int_{\Omega}\nabla v_n(\tau,x)\cdot u'_n(\tau,x)\ dxd\tau+\int_{t_k}^{t}\int_{\Omega} f(\tau,x)\ u'_n(\tau,x)dxd\tau$$

и

$$\frac{1}{2}\left\|v_n(t,\cdot)\right\|^2+\int_{t_k}^{t}\left\|\nabla v_n(\tau,\cdot)\right\|^2 d\tau=\frac{1}{2}\left\|v_{n,k}(t_k,\cdot)\right\|^2-$$

$$=-\int_{t_k}^{t}\int_{\Omega}\nabla u'_n(\tau,x)\cdot v_n(\tau,x)\,dxd\tau+\int_{t_k}^{t}\int_{\Omega} g(\tau,x)\,v_n(\tau,x)dxd\tau\,.$$

Отсюда в частности, получим, что

$$\frac{1}{2}\left\|u'_{n,j}(t_{j+1})\right\|^2+\frac{a_{n,j}}{2}\left\|\nabla u_{n,j}(t_{j+1})\right\|^2=\frac{1}{2}\left\|u'_{n,j}(t_j)\right\|^2+\frac{a_{n,j}}{2}\left\|\nabla u_{n,j}(t_j)\right\|^2-$$

$$-\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{\Omega}\nabla v_{n,j}(\tau,x)\cdot u'_{n,j}(\tau,x)\ dxd\tau+\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{\Omega} f(\tau,x)\ u'_{n,j}(\tau,x)dxd\tau$$

и

$$\frac{1}{2}\left\|v_{n,j}(t_{j+1},\cdot)\right\|^2+\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left\|\nabla v_{n,j}(\tau,\cdot)\right\|^2 d\tau=\frac{1}{2}\left\|v_{n,j}(t_j,\cdot)\right\|^2-$$

$$-\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{\Omega}\nabla u'_{n,j}(\tau,x)\cdot v_{n,j}(\tau,x)\,dxd\tau+\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{\Omega} g(\tau,x)\,v_{n,j}(\tau,x)dxd\tau$$

Используя равенство $u_{n,j}(t_j)=u_{n,j-1}(t_j)$, $j=1,2,...,n$ и повторяя данный процесс к-раз в конце получим следующие равенства

$$\frac{1}{2}\left\|u'_{n,k}(t_{k+1})\right\|^2+\frac{a_{n,k}}{2}\left\|\nabla u_{n,k}(t_{k+1})\right\|^2=\frac{1}{2}\left\|u'_{n,0}(0)\right\|^2+\frac{a_{n,0}}{2}\left\|\nabla u_{n,0}(0)\right\|^2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left(a_{n,j}-a_{n,j-1}\right)\left\|\nabla u_{n,j-1}(t_{j-1})\right\|^2-$$
$$-\sum_{j=1}^{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\int_{\Omega}\nabla v_{n,j}(\tau,x)\cdot u'_{n,j}(\tau,x)\,dxd\tau+$$
$$+\sum_{j=1}^{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\int_{\Omega}f(\tau,x)\cdot u'_{n,j}(\tau,x)\,dxd\tau$$

(18)

и

$$\frac{1}{2}\left\|v_{n,k}(t_{k+1},\cdot)\right\|^2+\sum_{j=1}^{k-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\|\nabla v_{n,j}(\tau,\cdot)\right\|^2d\tau=\frac{1}{2}\left\|v_{n,0}(0,\cdot)\right\|^2-$$
$$-\sum_{j=1}^{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\int_{\Omega}\nabla u'_{n,j}(\tau,x)\cdot v_{n,j}(\tau,x)\,dxd\tau+$$
$$+\sum_{j=1}^{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\int_{\Omega}g(\tau,x)\cdot v_{n,j}(\tau,x)\,dxd\tau\,. \qquad (19)$$

Суммируя (18) и (19) отсюда получим следующее равенство

$$\frac{1}{2}\left\|u'_n(t)\right\|^2+\frac{a_{n,k}}{2}\left\|\nabla u_n(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|v_n(t)\right\|^2+\int_0^t\left\|\nabla v_n(t,\cdot)\right\|^2=$$
$$=\frac{1}{2}\left\|u'_{n,0}(0)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|v_n(0)\right\|^2+\frac{a_{n,0}}{2}\left\|\nabla u_{n,0}(0)\right\|^2+G_n(t)+R_n(t), \qquad (20)$$

где

$$G_n(t)=\int_0^t\int_{\Omega}\nabla v_n(\tau,x)\cdot u'_n(\tau,x)\,dxd\tau+\int_0^t\int_{\Omega}\nabla u'_n(\tau,x)\cdot v_n(\tau,x)\,dxd\tau$$
$$R_n(t)=\int_0^t\int_{\Omega}f(\tau,x)u'_n(\tau,x)\,dxd\tau+\int_0^t\int_{\Omega}g(\tau,x)v_n(\tau,x)\,dxd\tau.$$

Используя граничные условия (2) легко заметить, что

$$G_n(t)=0\,. \qquad (21)$$

Из (19) -(21) получим, что

$$\frac{1}{2}\|u_n'(t)\|^2+\frac{1}{2}\|v_n(t)\|^2+\frac{a_{n,k}}{2}\|\nabla u_n(t)\|^2\le$$

$$\le\frac{1}{2}\|u_1(x)\|^2+\frac{1}{2}\|v_0(x)\|^2+\frac{a_{n,0}}{2}\|\nabla u_0(x)\|^2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left(a_{n,j}-a_{n,j-1}\right)\cdot\left\|\nabla u_{n,j-1}(t,\cdot)\right\|^2+R_{n,0}(t) \qquad (22)$$

Используя условие 1^0 и неравенство Гельдера из (22) получим, что

$$\frac{1}{2}\|u_n'(t)\|^2+\frac{1}{2}\|v_n(t)\|^2+\frac{a_0}{2}\|\nabla u_n(t)\|^2\le$$

$$\le\frac{1}{2}\|u_1(x)\|^2+\frac{1}{2}\|v_0(x)\|^2+\frac{M_a}{2}\|\nabla u_0(x)\|^2+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega|f(\tau,x)|^2\,dxd\tau+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega|u_n'(\tau,x)|^2\,dxd\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega|g(\tau,x)|^2\,dxd\tau+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega|v_n(\tau,x)|^2\,dxd\tau+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\left(a_{n,j}-a_{n,j-1}\right)\left\|\nabla u_{n,j-1}(t_j)\right\|^2, \qquad (23)$$

где $M_a=\max\limits_{0\le t\le T}a(t)$ не зависят от n.

Применяя Лемму Гроноула из (23) получим, что

$$\frac{1}{2}\|u_n'(t)\|^2+\|v_n(t)\|^2+\frac{a_0}{2}\|\nabla u_n(t)\|^2\le$$

$$\le\left[\frac{1}{2}\|u_1(x)\|^2+\frac{1}{2}\|v_0(x)\|^2+\frac{M_a}{2}\|\nabla u_0(x)\|^2+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega|f(\tau,x)|^2\,dxd\tau+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega|g(\tau,x)|^2\,dxd\tau+$$

$$\left.+\sum_{j-1}^{k}\left|a_{n,j}-a_{n,j-1}\right|\left\|\nabla u_{n,j-1}(t_j)\right\|^2\right]\exp T\,. \qquad (24)$$

С другой стороны,

$$\sum_{j-1}^{k}\left|a_{n,j}-a_{n,j-1}\right|\cdot\left\|\nabla u_{n,j}(\tau)\right\|^2 \le \int_{[0,t[}\left\|\nabla u_n(\tau)\right\|^2 dV_a[0,t] \qquad (25)$$

Далее будем пользоваться следующей Леммой

Лемма 1. (см.5). Пусть $x(t):[a,b]\to R$ монотонно возрастающая ограниченная функция, а $y(t):[a,b]\to[0,\infty)$ непрерывная функция и

$$y(t)\le y_0+\int_{[a,t[} y(\tau)\,dx(\tau), \qquad t\in[a,b],$$

где $y_0>0,$ тогда

$$y_0+\int_{[a,t[} y(\tau)\,dx(\tau)\le y_0\,e^{\left[x(b^-)-x(a)\right]}.$$

(Предполагается, что $x(t)=x(t+0),\ x(b^-)=x(b-0)$)

Применяя **Лемму 1** из (24)- (25) получим, что

$$\frac{1}{2}\left\|u_n'(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|v_n(t)\right\|^2+\frac{a_0}{2}\left\|\nabla u_n(t)\right\|^2\le$$

$$\le c\left[\frac{1}{2}\left\|u_1(x)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|v_0(x)\right\|^2+\frac{M_a}{2}\left\|\nabla u_0(x)\right\|^2\right]\exp\left(cV_b(0,T]\right), \qquad (26)$$

где $c=\exp T$.

Таким образом, для последовательности $\{(u_n(t,\cdot),v_n(t,\cdot))\}$ имеет место априорная оценка

$$\frac{1}{2}\left\|u_n'(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|v_n(t)\right\|^2+\frac{a_0}{2}\left\|\nabla u_n(t)\right\|^2\le C,$$

где C не зависит от n и $t>0$.

Тогда ввиду *-слабой компактности ограниченного множества в $L_\infty(0,T;\,X)$, где X – гильбертово пространство, получим, что из последовательности $\{(u_n(t,\cdot),\,v_n(t,\cdot))\}$ можно выделить подпоследовательность $\{(u_{n_\mu}(t,\cdot),v_{n_\mu}(t,\cdot))\}$ со следующими свойствами:

$$u_{n_\mu}\to u \qquad *-\text{слабо в} \quad L_\infty\left(0,T;\ \hat{W}_2^1\right), \qquad (27)$$

$$u_{n_\mu}\to u' \qquad *-\text{слабо в} \quad L_\infty\left(0,T;\ L_2(\Omega)\right), \quad (28)$$

$$v_{n_\mu}\to v \qquad *-\text{слабо в} \quad L_\infty\left(0,T;\ L_2(\Omega)\right), \qquad (29)$$

$$v_{n_\mu}\to v \qquad \text{-слабо в} \quad L_2\left(0,T;\ \hat{W}_2^1\right), \qquad (30)$$

(см. 6, стр. 299).

Пусть $w(\cdot)\in W_2^1\left(0,T;\,\hat{W}_2^1,\ L_2(\Omega)\right)$, и $\theta(\cdot)\in W_2^1\left(0,T;\,\hat{W}_2^1,\ L_2(\Omega)\right)$, $\upsilon(T,\,x)=0.$ $\theta(T,\,x)=0.$ Тогда, используя (18)- (19) получим, что

$$-\int_0^T\int_\Omega u_n'(t,x)\cdot w'(t,x)dxdt-\int_0^T\int_\Omega a(t)\nabla u_n(t,x)\,\nabla w(t,x)dxdt+$$
$$+\int_0^T\int_\Omega \nabla\upsilon_n\,(t,x)w(t,x)dxdt-\int_0^T\int_\Omega f(t,x)\;w(t,x)dxdt=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left[-\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_\Omega u_{n,k}'(t,x)w'(t,x)dxdt+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_\Omega a_{n,k}\,\nabla u_{n,k}(t,x)\cdot\nabla w(t,x)\,dxdt+\right.$$
$$\left.+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_\Omega \nabla\upsilon_{n,k}\,(t,x)w(t,x)dxdt-\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_\Omega f(t,x)\;w(t,x)dxdt\right]=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_\Omega u_{n,k}'(t_k,x)w(t_k,x)dx-\int_\Omega u_{n,k}'(t_{k+1},x)w(t_{k+1},x)dx\right]=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_\Omega u_{n,k}'(t_k,x)w(t_k,x)dx-\int_\Omega u_{n,k+1}'(t_{k+1},x)w(t_{k+1},x)dx\right]=$$
$$=\int_\Omega u_{n,0}'(0,x)w'(0,x)dx=\int_\Omega u_1(x)w'(0,x)dx\quad\cdot\tag{31}$$

Аналогичным образом получим, что

$$-\int_0^T\int_\Omega v_n(t,x)\cdot\theta'(t,x)dxdt+\int_0^T\int_\Omega \nabla v_n(t,x)\,\nabla\varsigma(t,x)dxdt+$$
$$+\int_0^T\int_\Omega \nabla u_n'\,(t,x)\theta(t,x)dxdt-\int_0^T\int_\Omega g(t,x)\;\theta(t,x)dxdt=$$
$$=\int_\Omega v_{n,0}(0,x)\theta(0,x)dx=\int_\Omega v_0(x)\theta(0,x)dx\,.\tag{32}$$

Таким образом, $\left(u_n(t,x),v_n(t,x)\right)$ является слабым решением смешанной задачи

$$\left.\begin{aligned}u_n''-a_n(t)\Delta u_n+\nabla v_n&=f(t,x),\\ v_n'-\Delta u_n+\nabla u_n'&=g(t,x),\end{aligned}\right\}$$
$$u_n(t,a)=u_n(t,b)=0,\quad v_n(t,a)=v_n(t,b)=0,\quad t>0,$$
$$u_n(0,x)=u_0(x),\quad u_n'(\dot{0},\ x)=u_1(x),\ \ v_n(0,x)=v_0(x)\,,$$

т.е. при любых $\upsilon(\cdot) \in W_2^1\left(0,T; \hat{W}_2^2, \hat{W}_2^1\right)$, $\upsilon(T,x)=0,\ x \in \Omega$ выполняется равенство (31), (32).

Из (27) и (30) следует, что при любых $w(\cdot)\in W_2^1\left(0,T; \hat{W}_2^1,\ L_2(\Omega)\right)$, $\theta(\cdot)\in W_2^1\left(0,T; \hat{W}_2^1,\ L_2(\Omega)\right)$:

$$\int_0^T\int_\Omega u'_{n_\mu}(t,x)\ w'(t,x))dxdt \to \int_0^T\int_\Omega u'(t,x)\ w'(t,x))dxdt, \qquad (33)$$

$$\int_0^T\int_\Omega a_n(t)\nabla u_{n_\mu}(t,x)\nabla w(t,x)dxdt \to \int_0^T\int_\Omega a(t)\nabla u(t,x)\nabla w(t,x)dxdt\ , \qquad (34)$$

$$u_{n_\mu}(0,x) \to u(0,x) \text{ в } \hat{W}_2^{1-\varepsilon}(\Omega), \qquad 0<\varepsilon<1. \qquad (35)$$

$$\int_0^T\int_\Omega v_{n_\mu}(t,x)\ \theta'(t,x))dxdt \to \int_0^T\int_\Omega v(t,x)\ \theta'(t,x))dxdt, \qquad (36)$$

$$\int_0^T\int_\Omega \nabla v_{n_\mu}(t,x)\nabla\theta(t,x)dxdt \to \int_0^T\int_\Omega \nabla v(t,x)\nabla\theta(t,x)dxdt\ . \qquad (37)$$

Далее напишем (31), (32) для $n=n_\mu$ и перейдём к пределу при $n_\mu \to \infty$.

Тогда, учитывая (33)-(37) получим, что $(u(\cdot),v(\cdot))$, где $u(\cdot)\in L_\infty\left(0,T; \hat{W}_2^1\right)$ $u'(\cdot)\in L_\infty\left(0,T;\ L_2(\Omega)\right)$, $v(\cdot)\in L_\infty\left(0,T; L_2(\Omega)\right)\cap L_2\left(0,T; \hat{W}_2^1\right)$, является слабым решением задачи (1) - (3).

3. Доказательство теоремы о единственности слабого решения

Пусть функции $(u_1(t,x),v_1(t,x))$ и $(u_2(t,x),v_2(t,x))$ являются слабыми решениями задачи (1) – (3).

Тогда для разности $\hat{u}=u_1-u_2$ и $\hat{v}=v_1-v_2$ имеем:

$$\hat{u}''(t,x)-a(t)\,\Delta\hat{u}(t,x)+\nabla\,\hat{v}(t,x)=0\ , \qquad (38)$$

$$\hat{v}'(t,x)-\Delta\hat{v}(t,x)+\nabla\,\hat{u}'(t,x)=0\,, \qquad (39)$$

$$\hat{u}(0,x)=\hat{u}'(0,x)=0,\ \hat{v}(0,x)=0\,, \qquad (40)$$

$$\hat{u}=u_1-u_2\in W_2^1\left(0,T;\ \hat{W}_2^1,L_2(\Omega)\right),\quad \hat{v}=v_1-v_2\in L_2\left(0,T;\ \hat{W}_2^1\right) \quad (41)$$

Умножим формально обе части равенства (38) на $\hat{u}'(t,x)$, а обе части равенства (39) на $\hat{v}(t,x)$, тогда учитывая (40), (41) имеем

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\hat{u}'(t,x)\right|^{2}dx+\frac{a(t)}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla\hat{u}(t,x)\right|^{2}dx\,da(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\int_{\Omega}\left|\nabla\hat{u}(\tau,x)\right|^{2}dx\,da(\tau)+\int_{0}^{t}\int_{\Omega}\nabla\hat{v}(\tau,x)\cdot\hat{u}'(\tau,x)\,dxd\tau=0\,, \qquad (42)$$

и

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\hat{v}(s,x)\right|^{2}dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla\hat{v}(s,x)\right|^{2}dx+\int_{0}^{t}\int_{\Omega}\nabla\hat{u}'(\tau,x)\hat{v}(\tau,x)\,dxd\tau=0 \qquad (43)$$

где последнее слагаемое понимается в следующем смысле

$$\int_{0}^{t}\int_{\Omega}\nabla\hat{u}'\cdot\hat{v}\,dxd\tau=-\int_{0}^{t}\int_{\Omega}\hat{u}'\cdot\nabla\hat{v}\,dxd\tau\ .$$

Из (42) и (43) имеем

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\hat{u}'(t,x)\right|^{2}dx+\frac{a(t)}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla\hat{u}(t,x)\right|^{2}dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\hat{v}(s,x)\right|^{2}dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla\hat{v}(s,x)\right|^{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\int_{\Omega}\cdot\left|\nabla\hat{u}(\tau,x)\right|^{2}dx\,da(\tau). \qquad (44)$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\int_{\Omega}\cdot\left|\nabla\hat{u}(\tau,x)\right|^{2}dx\,da(\tau)\leq\int_{0}^{t}\left\|\nabla\hat{u}(t)\right\|^{2}\cdot dV_{a}[0,t]\ . \qquad (45)$$

Из (44), (45) следует, что

$$\hat{u}(s,x)=0,\ \hat{v}(s,x)=0 \quad s\in[0,T], \quad x\in\Omega.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *C.M.Dafermos.* On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity, in: Arch. Rational Mech. Anal., 29 (1968), pp.241-271
2. *G.Ponce and R.Racke.* Global existence of small solutions to the initial value problemfor nonlinear thermoelasticity, Journal of Differential Equations, 87 (1990), pp.70-83
3. *L.Hsiao, S.Jiang,* Nonlinear hyperbolic-parabolic coupled systems, in Handbook of Differential Equations, Evolutionary Equations (Dafermos, C.M. & Feireisl, E.(Eds.)), Vol. 1, Elsevier 2004, pp.287-384

4. *L.Yang and Y.G.Wang.* Well-posedness and decay estimates for Cauchy problemsof linear thermoelastic systems of type III in 3-D, Indiana Uinv Math J, (2006), 4:1333-1364
5. *L.De Simon and G.Torelli*, Linear second order differential equations with discontinuous coefficients in Hilbert spaces, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, IV. 1 (1974), pp.131-154
6. *J.L.Lions and E.Madgenes*. Non Homogeneous Boundary value Problems and Applications, Springer Verlaq, 1973
7. *Т.Като*. Теория возмушений линейных операторов. Москва: Мир, 1972