PEDAQOJİ UNİVERSİTETİN XƏBƏRLƏRİ – 2019, C. 67, № 1, s. 54-71
ИЗВЕСТИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА – 2019, Т. 67, № 1, с. 54-71
TRANSACTIONS OF PEDAGOGICAL UNIVERSITY – 2019, V. 67, № 1, pp. 54-71

УДК 517.927.25

Х.Р.Годжаева
Азербайджанский государственный педагогический университет
mehdizade.xedice@gmail.com

О СКОРОСТИ РАВНОСХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ РЯДОМ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Ключевые слова: *дифференциальный оператор, равномерная равносходимость, спектральное разложение, тригонометрический ряд*

В работе рассматривается обыкновенный дифференциальный оператор четвертого порядка на интервале $G=(0,1)$. Изучаются вопросы равномерной равносходимости спектрального разложения по собственным функциям данного оператора с тригонометрическим рядом. Для функции из классов $W_p^1(G), p \geq 1$, установлена скорость равномерной равносходимости на любом компакте $K \subset G$.

X.R.Qocayeva

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB ADİ DİFERENSİAL OPERATOR ÜÇÜN SPEKTRAL AYRILIŞIN TRİQONOMETRİK SIRA İLƏ BİRGƏYIĞILMA SÜRƏTİ HAQQINDA

Açar sözlər: *diferensial operator, müntəzəm birgəyığılma, spektral ayrılış, triqonometrik sıra*

İşdə $G=(0,1)$ intervalında dördüncü tərtib adi diferensial operatora baxılır. Verilmiş operatorun məxsusi funksiyaları üzrə spektral ayrılışla triqonometrik ayrılışın birgəyığılması sualları araşdırılır. $W_p^1(G), p \geq 1$ sinfinə daxil olan funksiyalar üçün ixtiyari $K \subset G$ kompaktında müntəzəm birgəyığılma sürəti tapılır.

X.R.Gojayeva

ON EQUICONVERGENCE RATE OF SPECTRAL EXPANSION WITH TRIGONOMETRIC SERIES FOR A FOURTH ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL OPERATOR

Keywords: *differential operator, uniform equiconvergence, spectral expansion, trigonometric series*

In the paper we consider a fourth order ordinary differential operator on the interval $G=(0,1)$. We study uniform equiconvergence of spectral expansion in eigen –functions of the given operator with triqonometric series. For the function from the classes $W_p^1(G),\ p\ge 1$ we establish uniform equiconvergence rate on any compact $K\subset G$.

1. Формулировка результатов

Рассмотрим на интервале $G=(0,1)$ формальный дифференциальный оператор

$$Lu=u^{(4)}+P_2(x)u^{(2)}+P_3(x)u^{(1)}+P_4(x)u$$

с суммируемыми вещественными коэффициентами $P_i(x),,\ i=\overline{2,4}$.

Обозначим через $D_4(G)$ класс функций, абсолютно непрерывных вместе со своими производными до третьего порядка включительно на $\overline{G}=[0,1]$

Под собственной функцией оператора L, отвечающей собственному значению λ, будем понимать любую не равную нулю функцию $u(x)\in D_4(G)$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $Lu+\lambda u=0$ (см.[1]). Пусть $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полная ортонормированная $L_2(G)$ система состоящая из собственных функций оператора L, а $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k\le 0,$ соответствующая система собственных значений.

Введем частичную сумму спектрального разложения функции $f(x)\in W_1^1(G)$ по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\sigma_\nu(x,f)=\sum_{\mu_k\le\nu}^{\infty} f_k u_k(x),\ \ \nu>2,$$

где $\mu_k = \sqrt[4]{-\lambda_k}$, $f_k = (f, u_k) = \int_0^1 f(x)\overline{u_k(x)}dx$.

Обозначим $\Delta_\nu(x,f) = \sigma_\nu(x,f) - S_\nu(x,f)$, где $S_\nu(x,f)$, $\nu > 0$, частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, т.е.

$$S_\nu(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{0<2\pi k\le\nu} (a_k \cos 2\pi kx + b_k \sin 2\pi kx),$$

$$a_k = 2\int_0^1 f(x)\cos 2\pi kx dx, k = 0,1,2,\ldots;$$

$$b_k = 2\int_0^1 f(x)\sin 2\pi kx dx, k = 1,2,\ldots$$

Если $\max_{x\in K} |\Delta_\nu(x,f)| \to 0$ при $\nu \to +\infty$, то будем говорить, что разложения функции $f(x)$ в ортогональный ряд по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и в тригонометрический ряд Фурье равно мерно равносходятся на компакте $K \subset G$.

В данной работе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть функция* $f(x) \in W_p^1(G)$, $p > 1$, *и система* $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ *удовлет воряют условию*

$$\left| f(x)\overline{u_k^{(3)}(x)}|_0^1 \right| \le C_1(f)\mu_k^\alpha \|u_k\|_\infty, \ 0 \le \alpha < 3, \ \mu_k \ge 1. \tag{1.1}$$

Тогда разложение функции $f(x)$ *в ортогональный ряд по системе* $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ *и в тригонометрический ряд Фурье равномерно равносходятся на любом компакте* $K \subset G$ *и справедлива оценка*

$$\max_{x\in K} |\Delta_\nu(x,f)| = O(\nu^{\beta-1}), \ \nu \to +\infty, \tag{1.2}$$

где $\beta = 0$, *если система* $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ *равномерна ограничена;* $\beta = \frac{1}{2}$, *если система* $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ *не является равномерной ограниченной.*

Теорема 1.2. *Пусть* $f(x) \in W_1^1(G)$, *выполняются условия (1.1) и*

$$\sum_{n=2}^\infty n^{-1}\omega_1(f', n^{-1}) < \infty. \tag{1.3}$$

Тогда разложения функции $f(x)$ *в ортогональный ряд по системе* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *и в тригонометрический ряд Фурье равномерно равносходятся на любом компакте* $K \subset G$ и *справедлива оценка* (1.2).

2. Вспомогательные факты

Для доказательства теоремы 1.1. и 1.2 существенно используется формула среднего значения для собственных функций $u_k(x)$ и разные оценки для коэффициентов Фурье f_k функции $f(x) \in W_1^1(G)$.

Лемма 2.1. (см [2], [3]). Для любого достаточно малого $R > 0$ найдутся $\overline{R}$, удовлетворяющие условию $2R \le \overline{R} \le C_0 R$, где C_0 постоянная зависящая от порядка оператора L, и такие действительные числа $R_\alpha(\mu_k)$, $|R_\alpha(\mu_k)| \in [0, \overline{R}]$, что для любых $t \in [0, R]$ и $x \in G$, $dist(x, \partial G) > \overline{R}$, справедлива асимптотическая формула среднего (значения $\mu_k \ge \rho_0, \rho_0 -$ достаточно большое число):

$$\frac{u(x-t)+u_k(x+t)}{2} = u_k(x)\cos\mu_k t + \int_x^{x+t} K_0(\xi - x, t) Q_1(\xi, u_k) d\xi +$$

$$+ \int_{x-t}^{x} K_0(x-\xi, t) Q_2(\xi, u_k) d\xi + \int_{t \le \xi - x \le \overline{R}} P_0(\xi - x, t) Q_3(\xi, u_k) d\xi +$$

$$+ \int_{t \le x-\xi \le \overline{R}} P_0(x-\xi, t) Q_4(\xi, u_k) d\xi + \int_{x-\overline{R}}^{x+\overline{R}} F_0(t, |\xi - x|) Q_5(\xi, u_k) d\xi +$$

$$+ \sum_{q=0}^{3} \sum_{\alpha=1}^{3} F_{q\alpha}(t, \mu_k) u_k^{(q)}(x + R_\alpha) \tag{2 .1}$$

где

$$|Q_i(\xi, u_k)| \le const\, |M(\xi, u_k)|,\ i = \overline{1,5},\ M(\xi, u_k) = \frac{1}{4\mu_k^3} \sum_{\ell=2}^{4} P_\ell(\xi) u_k^{(4-\ell)}(\xi);$$

для интегралов

$$J_0(r, R, \mu_k, \nu) = \int_r^R \frac{\sin \nu t}{t} K_0(r, t) dt,\ \ 0 < r \le R;$$

$$I_0(r, R, \mu_k, \nu) = \int_0^{\min\{r, R\}} \frac{\sin \nu t}{t} P_0(r, t) dt,\ \ r \in [0,\ \overline{R}];$$

$$K_1(R,\mu_k,r,v)=\int_0^R \frac{\sin vt}{t}F_0(t,r)dt,\quad r\in[0,\ \overline{R}];$$
$$K_{q\alpha}(R,\mu_k,v)=\int_0^R \frac{\sin vt}{t}F_{q\alpha}(t,\mu_k)dt$$

при $\frac{R_0}{2}\le R\le R_0,\ \ R_0>0,$ справедливы следующие равномерные по R

оценки
$$J_0=\begin{cases} O(\min\{v\mu_k^{-1},\ \mu_k v^{-1}\}) & \text{при}\quad |\mu_k-v|\ge \frac{v}{2}, \\ O\left(\ln\frac{v}{|v-\mu_k|}\right) & \text{при}\quad 2\le|\mu_k-v|\le\frac{v}{2}\quad , \\ O(\min\{|\ln r|,\ \ln v\}), & \text{при}\quad |v-\mu_k|\le 2. \end{cases} \tag{2.2}$$

$$I_0=O\left(\min\{\mu_k v^{-1},\ v\mu_k^{-1}\}\right) \tag{2.3}$$

$$K_1,K_{q\alpha}=\begin{cases} O(\exp(-\delta\mu_k)v^{-1})\ \text{при}\ \rho_0\le\mu_k\le\frac{v}{2} \\ O(v\exp(-\delta\mu_k))\ \text{при}\ \mu_k\ge\frac{v}{2} \end{cases} \tag{2.4}$$

где $\delta>0$.

Лемма 2.2. (см. [4]). Для коэффициентов f_k функции $f(x)\in W_p^1(G),\ p\ge 1$, удовлет воряющей условию (1.1) , справедлива оценка ($\mu_k\ge 1$):

$$|f_k|\le C\mu_k^{-1}\Bigg\{\Bigg[\ C_1(f)\mu_k^{\alpha-3}+\left|\int_0^1 f'(t)e^{-i\omega_3\mu_k t}dt\right|+\left|\int_0^1 f'(1-t)e^{i\omega_4\mu_k t}dt\right|+$$
$$+\left(\|f\|_\infty+\|f'\|_1\right)\mu_k^{-1}\sum_{r=2}^{2m}\mu_k^{2-r}\|P_r\|_1\ \Bigg]\|u_k\|_\infty+\sum_{j=1}^{2}\left|\int_0^1\overline{f'(t)}e^{-i\omega_j\mu_k t}dt\right|\ \Bigg\}, \tag{2.5}$$

где $\omega_1 = -\omega_2 = 1,\ \omega_3 = -\omega_4 = -i,\ \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(G)}, C > 0$ постоянная не зависящая от $f(x)$.

Лемма 2.3. Для коэффициентов Фурье функции $f(x) \in W_p^1(G),\ \rho \geq 1,$ удовлетворяющей условию (1.1), справедлива оценка ($\mu_k \geq 4\pi$)

$$|f_k| \leq C\left\{ C_1(f)\mu_k^{\alpha-4} + \mu_k^{-1}\omega_1(f', \mu_k^{-1}) + \mu_k^{-2}\|f'\|_1 + \right.$$

$$\left. + \mu_k^{-2}\left(\|f\|_\infty + \|f'\|_1\right)\sum_{j=2}^{4}\mu_k^{2-j}\|P_j\|_1 \right\}\|u_k\|_\infty \tag{2.6}$$

Справедливость оценки (2.6) непосредственно следует из (2.5) с учетом $\|u_k\|_\infty \geq 1,\ k = 1,2,\ldots$ и неравенств (см. [5]).

$$\left|\left(f', e^{-i\omega_j\mu_k t}\right)\right| \leq C\left\{ \omega_1(f', \mu_k^{-1}) + \mu_k^{-1}\|f'\|_1 \right\}$$ при

$\mu_k \geq 4\pi$,
$Im\omega_j \leq 0$;

$$\left|\left(f', e^{i\omega_j\mu_k(1-t)}\right)\right| \leq C\left\{ \omega_1(f', \mu_k^{-1}) + \mu_k^{-1}\|f'\|_1 \right\}$$ при

$\mu_k \geq 4\pi$,
$Im\omega_j > 0$.

Отметим , что для любого компакта $K \subset G$ (см. [6]) верны оценки

$$\left\|u_k^{(s)}\right\|_{\infty,k} \leq C(K)\|u_k\|_2\mu_k^s = C_1(K)\mu_k^s \ , \tag{2.7}$$

$$\left\|u_k^{(s)}\right\|_\infty \leq C\|u_k\|_2\left(1 + \mu_k\right)^{\frac{1}{2}+s} = C\left(1 + \mu_k\right)^{\frac{1}{2}+s},\ s = \overline{0,3}, \tag{2.8}$$

где $\|\cdot\|_{p,K} = \|\cdot\|_{L_p(K)}$.

Обозначим $R_0(z) = \sum\limits_{j=1}^{4}\omega_j e^{i\omega_j\mu_k z}$;

$$A_{jk}(x) = 8^{-1}\sum_{\ell=0}^{1}\omega_j^{4-2\ell}\left(i\mu_k\right)^{-2\ell}u_k^{(2\ell)}(x),$$

$$I_{k1}^{\rho_0}(r,R)=\int_0^R t^{-1}\sin\nu t R_0(r-t)dt;$$

$$J_k^{\rho_0}(R,x)=\sum_{j=2}^{3}A_{jk}(x)\int_0^R t\sin\nu t\left(\cos\omega_j\mu_k t-\cos\mu_k t\right)dt$$

В случае $\mu_k \le \rho_0$ нам понадобится следующая формула среднего значения (см. [5])

$$\frac{u_k(x-t)+u_k(x+t)}{2}=u_k(x)\cos\mu_k(t)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}M(\xi,u_k)\cdot$$

$$\cdot R_0\left(|x-\xi|-t\right)d\xi+\sum_{j=2}^{3}A_{jk}(x)\left(\cos\omega_j\mu_k t-\cos\mu_k t\right), \tag{2.9}$$

при этом для интегралов $I_{k1}^{\rho_0}(r,R)$ и $J_k^{\rho_0}(R,x)$ выполняются равномерные при $R\in\left[\frac{R_0}{2},R_0\right]$ оценки

$$I_{k1}^{\rho_0}=O\left(\nu^{-1}\mu_k^3\right),\ J_k^{\rho_0}=O\left(\nu^{-1}\sum_{s=0}^{1}\left|u_k^{(2s)}(x)\right|\right). \tag{2.10}$$

Лемма 2.4. (см. [7]). Для последовательности $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ выполняются условия «сумма единиц»:

$$\sum_{r\le\mu_k\le\tau+1}1\le const,\quad\forall\tau\ge 0 \tag{2.11}$$

3. Доказательства основных результатов

В основе доказательств сформулированных выше результатов стоит спектральный метод, предложенный В.А.Ильиным [1].

Доказательства теорем 1.1 и 1.2. Фиксируем произвольный связной компакт $K\subset G$ и введем функцию

$$W(r,\nu,R)=\begin{cases}\frac{\sin\nu r}{\pi r} & \text{при } r\le R\\ 0 & \text{при } r>R\end{cases},$$

где $x\in K,\ y\in G,\ r=|x-y|,\ R\in\left[\frac{R_0}{2},R_0\right],\ \nu>0,\ R_0>0,$

$dist(K,\partial G)>4C_0R_0$, при этом C_0 -постоянная из леммы 2.1.

Через $S_{R_0}[g]$ обозначим усреднение функции $g(R)$ на отрезке $\left[\frac{R_0}{2}, R_0\right]$, т.е.

$S_{R_0}[g] = 2R_0^{-1}\int\limits_{\frac{R_0}{2}}^{R_0} g(R)dR$. Тогда коэффициенты Фурье функции

$\hat{W}(r,v,R_0) = S_{R_0}[W]$ по системе $\{\overline{u_k(y)}\}_{k=1}^{\infty}$ вычисляются по формуле

$$\hat{W}_k = \hat{W}_k(x,v,R_0) = \frac{2}{\pi} S_{R_0}\left[\int\limits_0^R \frac{\sin vt}{t}\left(\frac{u_k(x-t)+u_k(x+t)}{2}\right)dt\right].$$

Учитывая формулы среднего значения (2.1), (2.9) и равенства

$$S_{R_0} = \frac{2}{\pi} S_{R_0}\left[\int\limits_0^R \frac{\sin vt}{t}\cos\mu_k t dt\right] = \delta_k^v + \hat{I}_k^v(R_0),$$

где

$$\delta_k^v = \frac{1}{2}\left(1 - sgn(\mu_k - v)\right), \quad \hat{I}_k^v(R_0) = O\left(\left(1 + |v - \mu_k|^2\right)^{-1}\right), \quad (3.1)$$

с учетом базисности системы $\{\overline{u_k(y)}\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2(G)$ и принадлежности при каждом $x \in K$ функции $W(|x-y|,v,\ R_0)$ в $L_2(G)$, получаем в $L_2(G)$ относительно y равенства

$$\hat{W}(x,v,R_0) - \theta(x,y,v) = -\frac{1}{2}\sum_{\mu_k = v} u_k(x)\overline{u_k(y)} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \hat{I}_k^v(R_0)u_k(x)\overline{u_k(y)} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(x,v,R_0)\overline{u_k(y)},$$

где $\theta(x,y,v) = \sum\limits_{\mu_k \le v} u_k(x)\overline{u_k(y)}$ – спектральная функция оператора L;

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k(x,\nu,R_0)\overline{u_k(y)} = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu_k\le\rho_0} S_{R_0}\left[\int_{x-R}^{x+R} M(\xi,u_k) I_k^{\rho_0}(|x-\xi|,R)d\xi\right]\overline{u_k(y)} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{\mu_k\le\rho_0} S_{R_0}\left[J_k^{\rho_0}(R,x)\right]\overline{u_k(y)} + \frac{2}{\pi}\sum_{\mu_k>\rho_0} S_{R_0}\left[\int_{x}^{x+R} Q_1(\xi,u_k)J_0(\xi-x,R,\mu_k,\nu)d\xi\right]\cdot$$

$$\cdot\overline{u_k(y)} + \frac{2}{\pi}\sum_{\mu_k>\rho_0} S_{R_0}\left[\int_{x-R}^{x} Q_2(\xi,u_k)J_0(x-\xi,R,\mu_k,\nu)d\xi\right]\overline{u_k(y)} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{\mu_k>\rho_0} S_{R_0}\left[\int_{x}^{x+\overline{R}} Q_3(\xi,u_k)I_0(\xi-x,R,\mu_k,\nu)d\xi\right]\overline{u_k(y)} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{\mu_k>\rho_0} S_{R_0}\left[\int_{x-\overline{R}}^{x} Q_4(\xi,u_k)I_0(x-\xi,R,\mu_k,\nu)d\xi\right]\overline{u_k(y)} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{\mu_k>\rho_0} S_{R_0}\left[\int_{x-\overline{R}}^{x+\overline{R}} Q_5(\xi,u_k)K_1(R,\mu_k,|x-\xi|,\nu)d\xi\right]\overline{u_k(y)} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{\mu_k>\rho_0} S_{R_0}\left[\sum_{q=0}^{3}\sum_{\alpha=1}^{3} u_k^{(q)}(x+R_\alpha)K_{q\alpha}(R,\mu_k,\nu)\right]\overline{u_k(y)}.$$

Отсюда в силу сходимости всех указанных рядов в $L_2(G)$ относительно переменной $y\in G$, приходим к равенству

$$\int_G \hat{W}(|x-y|,\nu,R_0)f(y)dy - \sigma_\nu(x,f) = \sum_{i=1}^{10} T_i(\nu,x) \tag{3.2}$$

где $f(y)\in W_1^1(G)$ произвольная функция,

$$T_1(\nu,x) = -\frac{1}{2}\sum_{\mu_k=\nu} f_k u_k(x)$$

$$T_2(\nu,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(x)\hat{I}_k^{\nu}(R_0);$$

$$T_3(\nu,x) = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu_k\le\rho_0} S_{R_0}\left[\int_{x-R}^{x+R} M(\xi,u_k)I_k^{\rho_0}(|x-\xi|,R)d\xi\right]f_k;$$

$$T_4(\nu,x)=\frac{2}{\pi}\sum_{\mu_k\le\rho_0}S_{R_0}\left[J_k^{\rho_0}(R,x)\right]f_k;$$

$$T_5(\nu,x)=\frac{2}{\pi}\sum_{\mu_k>\rho_0}S_{R_0}\left[\int_x^{x+R}Q_1(\xi,u_k)J_0(\xi-x,R,\mu_k,\nu)d\xi\right]f_k;$$

$$T_6(\nu,x)=\frac{2}{\pi}\sum_{\mu_k>\rho_0}S_{R_0}\left[\int_{x-R}^{x}Q_2(\xi,u_k)J_0(x-\xi,R,\mu_k,\nu)d\xi\right]f_k;$$

$$T_7(\nu,x)=\frac{2}{\pi}\sum_{\mu_k>\rho_0}S_{R_0}\left[\int_x^{x+\bar R}Q_3(\xi,u_k)I_0(\xi-x,R,\mu_k,\nu)d\xi\right]f_k;$$

$$T_8(\nu,x)=\frac{2}{\pi}\sum_{\mu_k>\rho_0}S_{R_0}\left[\int_{x-\bar R}^{x}Q_4(\xi,u_k)I_0(x-\xi,R,\mu_k,\nu)d\xi\right]f_k;$$

$$T_9(\nu,x)=\frac{2}{\pi}\sum_{\mu_k>\rho_0}S_{R_0}\left[\int_{x-\bar R}^{x+\bar R}Q_5(\xi,u_k)K_1(R,\mu_k,|x-\xi|,\nu)d\xi\right]f_k;$$

$$T_{10}(\nu,x)=\frac{2}{\pi}\sum_{\mu_k>\rho_0}S_{R_0}\left[\sum_{q=0}^{3}\sum_{\alpha=1}^{3}u_k^{(q)}(x+R_\alpha)K_{q\alpha}(R,\mu_k,\nu)\right]f_k.$$

Оценим ряды $T_i\ (\nu,x),\ i=\overline{1,10}$ в метрике $C(K)$ для функции $f(x)$, удовлетворяющей условию теорем 1.1. и 1.2.

$$\left\|T_1(\nu,\cdot)\right\|_{C(K)}\le\frac{1}{2}\sum_{\mu_k=\nu}|f_k|\,\|u_k\|_{C(K)}$$

Учитывая оценки (2.6) –(2.8) и (2.11) будем иметь

$$\begin{aligned}&\left\|T_1(\nu,\cdot)\right\|_{C(K)}\le C_2(K)\left(\sum_{\mu_k=\nu}\|u_k\|_\infty\right)\Big\{C_1(f)\nu^{\alpha-4}+\nu^{-1}\omega_1(f',\nu^{-1})+\\&+\nu^{-2}\|f'\|_1+\nu^{-2}\left(\|f\|_\infty+\|f'\|_1\right)\sum_{j=2}^{4}\nu^{2-j}\|P_j\|_1\Big\}\le C_3(K)\Big\{C_1(f)\nu^{\alpha+\beta-4}+\\&+\nu^{\beta-1}\omega_1(f',\nu^{-1})+\nu^{\beta-2}\left(\|f'\|_1+\left(\|f\|_\infty+\|f'\|_1\right)\sum_{j=2}^{4}\nu^{2-j}\|P_j\|_1\right)\Big\}=\\&=O\left(\nu^{\beta-1}\right),\end{aligned}\qquad(3.3)$$

где $\beta = 0$, если система $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена ; $\beta = \frac{1}{2}$, в противном случае .

Для оценки суммы $T_2(\nu, x)$ воспользуемся оценками (2.7), (2.8) , (2.11) и (3.1). В результате будем иметь:

$$\left\| T_2(\nu,\cdot) \right\|_{C(K)} \le \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \left\| u_k \right\|_{C(K)} \left| I_k^{\nu}(R_0) \right| \le C_1(K) \left(\sum_{0 \le \mu_k < 1} |f_k| \left| I_k^{\nu}(R_0) \right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu_k > 1} |f_k| \left| I_k^{\nu}(R_0) \right| \right) \le C_1(K) \| f \|_1 \sum_{0 \le \mu_k < 1} |\nu - \mu_k|^{-2} \| u_k \|_{\infty} +$$

$$+ C(R_0) \sum_{1 \le \mu_k \le \frac{\nu}{2}} |f_k| \left(1 + |\mu_k - \nu|^2 \right)^{-1} + C(R_0) \sum_{|\mu_k - \nu| \le 1} |f_k| + C(R_0) \cdot$$

$$\cdot \sum_{1 \le \mu_k \le \frac{\nu}{2}} |f_k| \left(1 + |\mu_k - \nu|^2 \right)^{-1} + C(R_0) \sum_{\mu_k \ge \frac{3\nu}{2}} |f_k| \left(1 + |\mu_k - \nu|^2 \right)^{-1} \le$$

$$\le C \| f \|_1 \nu^{-2} \sum_{0 \le \mu_k < 1} 1 + C \sum_{1 \le \mu_k \le \frac{\nu}{2}} |f_k| + C \sup_{\mu_k \ge \frac{\nu}{2}} |f_k| \left[\sum_{|\mu_k - \nu| \le 1} 1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{1 \le |\mu_k - \nu| \le \frac{\nu}{2}} \left(1 + |\nu - \mu_k|^2 \right)^{-1} + \sum_{\mu_k \ge \frac{3\nu}{2}} \left(1 + |\mu_k - \nu|^2 \right)^{-1} \right] \le$$

$$\le C\nu^{-2} \| f \|_1 + \frac{C}{1 + \nu^2} \sum_{1 \le \mu_k \le \frac{\nu}{2}} |f_k| + C \sup_{\mu_k \ge \frac{\nu}{2}} |f_k| \left[1 + \sum_{n = \left[\frac{\nu}{2} \right]}^{\infty} \left(1 + n^2 \right)^{-1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{n \le |\mu_k - \nu| \le n+1} 1 \right] \le C\nu^{-2} \left(\| f \|_1 + \sum_{1 \le \mu_k \le \frac{\nu}{2}} |f_k| \right) + C \sup_{\mu_k \ge \frac{\nu}{2}} |f_k| \, .$$

Отсюда в силу неравенства Бесселя, лемм 2.3. и 2.4 следует , что

$$\left\|T_2(\nu,\cdot)\right\|_{C(K)} \le C\nu^{-2}\left[\left\|f\right\|_1 + \left(\sum_{1\le\mu_k\le\frac{\nu}{2}}\left|f_k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{1\le\mu_k\le\frac{\nu}{2}} 1\right)^{\frac{1}{2}}\right] +$$

$$+C\sup_{\mu_k\ge\frac{\nu}{2}}\left|f_k\right| \le C\left\{\left[\left\|f\right\|_1+\left\|f\right\|_2\right]\nu^{-\frac{3}{2}} + \sup_{\mu_k\ge\frac{\nu}{2}}\left|f_k\right|\right\} = O\left(\nu^{-\frac{3}{2}}\right) + \tag{3.4}$$

$$+O\Bigg(\Bigg\{C_1(f)\nu^{\alpha+\beta-4}+\nu^{\beta-1}\omega_1\left(f,\nu^{-1}\right)+\nu^{\beta-2}\Bigg(\left\|f'\right\|_1+\left(\left\|f\right\|_\infty+\left\|f'\right\|_\infty\right)\cdot$$

$$\cdot\sum_{j=2}^{4}\nu^{2-j}\left\|P_j\right\|_1\Bigg)\Bigg\}\Bigg) = O\left(\nu^{\beta-1}\right).$$

Для оценки суммы $T_3(\nu,x)$ и $T_4(\nu,x)$ воспользуемся оценками (2.7) , (2.10) и применим лемму 2.4.

$$\left\|T_3(\nu,\cdot)\right\|_{C(K)} \le \frac{1}{\pi}\sum_{\mu_k\le\rho_0}\left| S_{R_0}\left[\int_{x-R}^{x+R} M(\xi,u_k) I_{k_1}^{\rho_0}\left(\left|x-\xi\right|,R\right)d\xi\right]\right|\left|f_k\right| \le$$

$$\le C\sum_{\mu_k\le\rho_0}\frac{1}{4\mu_k^3}\int_{x-R_0}^{x+R_0}\left(\sum_{r=2}^{4}\left|P_r(\xi)u_k^{(4-r)}(\xi)\right|\mu_k^3\nu^{-1}\right)d\xi\left|f_k\right| \le C\nu^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_{x-R_0}^{x+R_0}\sum_{r=2}^{4}\left|P_r(\xi)\right|d\xi\right)\sum_{\mu_k\le\rho_0}\left(1+\mu_k\right)^2\left|f_k\right| \le C\nu^{-1}\left(\sum_{r=2}^{4}\left\|P_r\right\|_1\right)\sum_{\mu_k\le\rho_0}\left\|f\right\|_1\left\|u_k\right\|_\infty\cdot \tag{3.5}$$

$$\cdot\left(1+\mu_k\right)^2 \le C\nu^{-1}\left\|f\right\|_1\left(\sum_{r=1}^{4}\left\|P_r\right\|_1\right)\sum_{\mu_k\le\rho_0}\left(1+\mu_k\right)^{\frac{5}{2}} \le C(\rho_0)\nu^{-1} = O\left(\nu^{-1}\right).$$

В силу оценок (2.7), (2.8), (2.10) , (2.11) точно такая же оценка верна для суммы $T_4(\nu,x)$, т.е. $\left\|T_4(\nu,\cdot)\right\|_{C(K)} = O\left(\nu^{-1}\right)$.

Для оценки рядов $T_9(\nu,x)$ и $T_{10}(\nu,x)$ воспользуемся оценками (2.4) , (2.7) и

$$\left\|u_k^{(s)}\right\|_{\infty,K_1} \le C(K_1,K_2)\left(1+\mu_k\right)^s\left\|u_k\right\|_{p,K_2}, \text{ (см.[6])} \tag{3.6}$$

где $K_1 \subset K_2 \subseteq G$, $p \ge 1$. В результате при $\nu \ge 2\rho_0$ будем иметь ($K = [a,b]$, $K_1 = [a - C_0R_0, b + C_0R_0]$, $K_2 = \overline{G}$).

$$\left\| T_9(\nu,\cdot) \right\|_{C(K)} \le C \sum_{\mu_k \ge \rho_0} S_{R_0} \left[\left\| M(\cdot, u_k) \right\|_{L_1(K_1)} \sup_{\substack{|x-\xi| \le \overline{R} \\ x \in K}} \left| K_1(R, \mu_k, |x-\xi|, \nu) \right| \right] \left| f_k \right| \le$$

$$\le C \sum_{\mu_k \ge \rho_0} S_{R_0} \left[\left\| 4\mu_k^{-3} \sum_{\ell=2}^{4} P_\ell(\cdot) u_k^{(4-\ell)}(\cdot) \right\|_{L_1(K_1)} \sup_{\substack{|x-\xi| \le \overline{R} \\ x \in K}} \left| K_1(R, \mu_k, |x-\xi|, \nu) \right| \right] \left| f_k \right| \le$$

$$\le C \left(\sum_{\ell=2}^{4} \left\| P_\ell \right\|_1 \right) \sum_{\rho_k \ge \rho_0} \left\| u_k \right\|_2 \mu_k^{-1} S_{R_0} \left[\sup_{\substack{|x-\xi| \le \overline{R} \\ x \in K}} \left| K_1(R, \mu_k, |x-\xi|, \nu) \right| \right] \left| f_k \right| \le$$

$$\le C \sum_{\rho_k \ge \rho_0} \mu_k^{-1} S_{R_0} \left[\sup_{\substack{|x-\xi| \le \overline{R} \\ x \in K}} \left| K_1(R, \mu_k, |x-\xi|, \nu) \right| \right] \left| f_k \right| \le$$

$$\le C \left(\sum_{\rho_0 \le \mu_k \le \frac{\nu}{2}} (\cdot) + \sum_{\mu_k \ge \frac{\nu}{2}} (\cdot) \right) \le C \left(\sum_{\rho_0 \le \mu_k \le \frac{\nu}{2}} \mu_k^{-1} \nu^{-1} \exp(-\delta\mu_k) \left| f_k \right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu_k \ge \frac{\nu}{2}} \nu \mu_k^{-1} \exp(-\delta\mu_k) \left| f_k \right| \right).$$

Учитывая здесь неравенства $\left| f_k \right| \le \left\| f \right\|_2$ и оценки (2.11) получаем

$$\left\| T_9(\nu,\cdot) \right\|_{C(K)} = O\left(\nu^{-1}\right). \tag{3.7}$$

Точно так же оценивается ряд $T_{10}(\nu, x)$ и он имеет порядок $O\left(\nu^{-1}\right)$.

Ряды $T_i(\nu, x)$, $i = \overline{5,6}$ оцениваются по единой схеме . Поэтому оценим только ряд $T_5(\nu, x)$.

$$\left|T_5(\nu,x)\right| \le \sum_{\mu_k>\rho_0} S_{R_0}\left[\int_x^{x+R}\left|Q_1(\xi,R)\right|\left|J_0(\xi-x,R,\mu_k,\nu)\right|d\xi\right]\left|f_k\right| \le$$

$$\le const\sum_{\mu_k>\rho_0} S_{R_0}\left[\int_x^{x+R}\left|M(\xi,u_k)\right|\left|J_0(\xi-x,R,\mu_k,\nu)\right|d\xi\right]\left|f_k\right| \le$$

$$\le const\sum_{\mu_k>\rho_0} S_{R_0}\left[\int_x^{x+R}\left|P_2(\xi)\right|\left|u_k^{(2)}(\xi)\right|\left|J_0(\xi-x,R,\mu_k,\nu)\right|d\xi\mu_k^{-3}\left|f_k\right|\right]+$$

$$+const\sum_{\mu_k>\rho_0} S_{R_0}\left[\int_x^{x+R}\sum_{r=3}^{4}\left|P_r(\xi)\right|\left|u_k^{(4-r)}(\xi)\right|\left|J_0(\xi-x,R,\mu_k,\nu)\right|d\xi\right]\mu_k^{-3}\left|f_k\right| =$$

$$=const\left(A_1+A_2\right)$$

Оценим сначала ряд A_2. Для этого применим оценки (2.7) , (2.8) , (2.1) и (2.6). В результате получаем

$$A_2 \le \sum_{\mu_k>\rho_0} S_{R_0}\left[\int_x^{x+R}\sum_{r=3}^{4}\left|P_r(\xi)\right|\mu_k^{1-r}\left|J_0(\xi-x,R,\mu_k,\nu)\right|d\xi\right]\left|f_k\right| \le$$

$$\le const\sum_{\mu_k\ge 1}\mu_k^{-2}\left|f_k\right|S_{R_0}\left[\int_x^{x+R}\left|J_0(\xi-x,R,\mu_k,\nu)\right|\sum_{r=3}^{4}\left|P_r(\xi)\right|d\xi\right] \le$$

$$\le const\left\{\sum_{1\le\mu_k\le\frac{\nu}{2}}+\sum_{2\le\left|\mu_k-\nu\right|\le\frac{\nu}{2}}+\sum_{\left|\mu_k-\nu\right|\le 2}+\sum_{\mu_k\ge\frac{3\nu}{2}}\right\}\le const\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{1\le\mu_k\le\frac{\nu}{2}}\mu_k^{-1}\nu^{-1}\left|f_k\right|+\sum_{2\le\left|\mu_k-\nu\right|\le\frac{\nu}{2}}\mu_k^{-2}\ln\left(\frac{\nu}{\left|\mu_k-\nu\right|}\right)\left|f_k\right|+\sum_{\left|\mu_k-\nu\right|\le 2}\mu_k^{-2}\ln\nu\left|f_k\right|+\right.$$

$$\left.+\sum_{\mu_k\ge\frac{3\nu}{2}}\mu_k^{-1}\nu^{-1}\left|f_k\right|\right\}\int_x^{x+R_0}\sum_{r=3}^{4}\left|P_r(\xi)\right|d\xi \le C(K,\left\|P_r\right\|_1 : r=3,4)\ \nu^{\beta-1}=O(\nu^{\beta-1}).$$

Теперь оценим ряд A_1. Для этого разобьем его как в случае ряда A_2, на четыре суммы $A_1 = \sum_{j=1}^{4} A_1^j$ и оценим каждую сумму A_1^j в отдельности.

$$A_1^1 = \sum_{\rho_0 \le \rho_k^i \le \frac{\nu}{2}} S_{R_0}\left[\int_x^{x+R} \left|P_2(\xi)\right| \left|u^{(2)}(\xi)\right| \left|J_0(\xi - x, R, \mu_k, \nu) d\xi\right| \right] \mu_k^{-3} \left|f_k\right| \le$$

$$\le \sum_{1 \le \mu_k \le \frac{\nu}{2}} \int_x^{x+R_0} \left|P_2(\xi)\right| \left|u^{(2)}(\xi)\right| \sup_{\frac{R_0}{2} \le R \le R_0} \left|J_0(\xi - x, R, \mu_k, \nu)\right| d\xi \mu_k^{-3} \left|f_k\right|$$

Учитывая оценки (3.6) при $K_1 = K_{R_0}$, $K_2 = \bar{G} = [0,1]$, ($K = [a,b] \subset int\, G$, $K_{R_0} = [a - R_0, b + R_0]$), $p = \infty$ и оценки (2.2), получаем

$$A_1^1 \le const \int_{K_{R_0}} \left|P_2(\xi)\right| \left(\sum_{1 \le \mu_k \le \frac{\nu}{2}} \mu_k^{-3} \nu^{-1} \mu_k^3 \left|f_k\right| \left\|u_k\right\|_\infty \right) = \frac{const}{\nu} \int_0^1 \left|P_2(\xi)\right| d\xi \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{1 \le \mu_k \le \frac{\nu}{2}} \left|f_k\right| \left\|u_k\right\|_\infty \right).$$

Принимая во внимание, что при условиях теорем 1.1. и 1.2 числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \left\|u_k\right\|_\infty$ сходит ся (см. [4]), приходим к оценке $A_1^1 = O(\nu^{-1})$.

Оценим сумму A_1^2. Для этого применим оценки (2.6), (2.11) и (3.6):

$$A_1^2 = \sum_{2<\left|\mu_k-\nu\right|\le\frac{\nu}{2}} S_{R_0}\left[\int_x^{x+R}\left|P_2(\xi)\right|\left|u^{(2)}(\xi)\right|\left|J_0(\xi-x,R,\mu_k,\nu)\right|d\xi\right]\mu_k^{-3}\left|f_k\right| \le$$

$$\le const \sum_{2\le\left|\mu_k-\nu\right|\le\frac{\nu}{2}} \mu_k^{-3}\ln\frac{\nu}{\left|\nu-\mu_k\right|}\int_x^{x+R_0}\left|P_2(\xi)\right|\left|u^{(2)}(\xi)\right|d\xi \le$$

$$\le const \sum_{2\le\left|\nu-\mu_k\right|\le\frac{\nu}{2}} \mu_k^{-1}\ln\frac{\nu}{\left|\nu-\mu_k\right|}\left\|P_2\right\|_1\left\|u_k\right\|_2\left|f_k\right| \le const \sum_{2\le\left|\nu-\mu_k\right|\le\frac{\nu}{2}} \mu_k^{-2+\beta}\ln\frac{\nu}{\left|\nu-\mu_k\right|} \le$$

$$\le \frac{const}{\nu^{2-\beta}}\sum_{n=2}^{\left[\frac{\nu}{2}\right]}\ln\frac{\nu}{n}\left(\sum_{n\le\left|\mu_k-\nu\right|\le n+1} 1\right) \le \frac{const}{\nu^{2-\beta}}\sum_{n=2}^{\left[\frac{\nu}{2}\right]}\ln\frac{\nu}{n} \le \frac{const}{\nu^{2-\beta}}\ln\frac{\nu^{\left[\frac{1}{2}\right]}}{\left[\frac{\nu}{2}\right]!} \le$$

$$\le \frac{const}{\nu^{2-\beta}}\ln\frac{\nu}{\sqrt[\left[\frac{\nu}{2}\right]]{\left[\frac{\nu}{2}\right]!}}$$

В силу формулы Стирлинга $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right)$, $\left|\omega\right| \le 1$, из последнего неравенства получаем оценку $A_1^2 \le const\nu^{-1+\beta} = O(\nu^{\beta-1})$. Аналогичным образом доказывается, что

$$A_1^3 = \sum_{\left|\mu_k-\nu\right|\le 2} S_{R_0}\left[\int_x^{x+R}\left|P_2(\xi)\right|\left|u_k^{(2)}(\xi)\right|\left|J_0(\xi-x,R,\mu_k,\nu)\right|d\xi\right]\mu_k^{-3}\left|f_k\right| \le$$

$$\le const \sum_{\left|\mu_k-\nu\right|\le 2} \mu_k^{-2+\beta}\ln\nu = O(\nu^{\beta-1});$$

$$A_1^4 = \sum_{\mu_k\ge\frac{3\nu}{2}} S_{R_0}\left[\int_x^{x+R}\left|P_2(\xi)\right|\left|u_k^{(2)}(\xi)\right|\left|J_0(\xi-x,R,\mu_k,\nu)\right|d\xi\right]\mu_k^{-3}\left|f_k\right| \le$$

$$\le const \sum_{\mu_k\ge\frac{3\nu}{2}} \mu_k^{-2+\beta}\frac{\nu}{\mu_k} \le const\,\nu \sum_{\mu_k\ge\frac{3\nu}{2}} \mu_k^{-3+\beta} \le const\,\nu \sum_{n\ge\left[\frac{3\nu}{2}\right]} n^{-3+\beta}\,\cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{n\le\mu_k\le n+1} 1\right) \le const\,\nu \sum_{n\ge\left[\frac{3\nu}{2}\right]} n^{-3+\beta} = O(\nu^{\beta-1}).$$

Следовательно, для рядов $T_5(v,x)$ и $T_6(v,x)$ справедлива равномерная относительно $x \in K$ оценка

$$\left|T_i(v,x)\right| = O(v^{\beta-1}),\ i = 5,6 \tag{3.8}$$

Оценки рядов $T_7(v,x)$ и $T_8(v,x)$ проводится так же как и для рядов $T_i(v,x),\ \ i = 5,6$. При этом следует применить оценку (2.3) , лемму 2.4. В результате получим , что для этих рядов выполняется оценка (3.8).
Из полученных оценок (3.3), (3.4), (3.5), (3.7), (3.8) и из равенства (3.2) следует, что

$$\sup_{x\in K}\left|\int_G \hat{W}\left(|x-y|,v,R_0\right)f(y)dy - \sigma_v(x,f)\right| = O(v^{\beta-1}),\quad v \to \infty.$$

Если вместо $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ рассмотреть ортонормированную систему собственных функций оператора $Lu = -u^{(2)},\ u^{(j)}(0) = u^{(j)}(1),\ j = 0,1,$ то получим

$$\sup_{x\in K}\left|\int_G \hat{W}\left(|x-y|,v,R_0\right)f(y)dy - S_v(x,f)\right| = O(v^{-1}),$$

ибо в этом случае система
$\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{1\} \cup \left\{\sqrt{2}\cos 2\pi kx,\ \sqrt{2}\sin 2\pi kx\right\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена.

Из двух последних соотношений следует равенство

$$\sup_{x\in K}\left|\sigma_v(x,f) - S_v(x,f)\right| = O(v^{\beta-1}).$$

Теоремы 1.1 и 1.2 доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений I // Дифференциальные уравнения. 1980, Т.16, №5, с.771-794
2. *Курбанов В.М.* Формула среднего значения для корневых фунций дифференциального оператора с локально суммируемыми коэффициентами I // Дифференциальные уравнения, 2002, Т.38, №2, с.177-189
3. *Курбанов В.М*. Формула среднего значения для корневых фунций дифференциального оператора с локально суммируемыми коэффициентами II // Дифференциальные уравнения, 2002, Т.38, №8, с.1066-1077

4. *Курбанов В.М., Годжаева Х.Р.* О сходимости спектрального разложения по собственным функциям дифференциального оператора четного порядка // Дифференциальные уравнения, 2019, Т.55, №1, с.10-24
5. *Курбанов В.М.* Равносходимость биортогональных разложений по корневым фунцкиям дифференциальных операторов I // Дифференциальные уравнения, 1999, Т.35, №12, с.1597-1609
6. *Керимов Н.Б.* Некоторые свойства собственных и присоединенных функций обыкновенных дифференциальных операторов / Докл. АН СССР, 1986, Т.271, №5, с.1054-1055
7.*Курбанов В.М*. О распределении собственных значений и критерий бесселевости корневых функций дифференциального оператора I // Дифференциальные уравнения. 2005, Т.41, №4, с.464-478