PEDAQOJİ UNİVERSİTETİN XƏBƏRLƏRİ – 2019, C. 67, № 1, s. 72-84
ИЗВЕСТИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА – 2019, Т. 67, № 1, с. 72-84
TRANSACTIONS OF PEDAGOGICAL UNIVERSITY – 2019, V. 67, № 1, pp. 72-84

УДК 517.5

Р.М.Рзаев, Л.Э.Гусейнова
Азербайджанский государственный педагогический университет
Азербайджанский государственный экономический университет
rrzaev@rambler.ru

СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР В ПРОСТРАНСТВАХ, СВЯЗАННЫХ С ЛОКАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: *сингулярный интегральный оператор, средняя осцилляция, изоморфизм пространств*

В данной работе исследуется изоморфизм некоторых функциональных пространств, введенных в термины локальных характеристик функций многих переменных. Изучается действие многомерного сингулярного интегрального оператора в этих пространствах.

R.M.Rzayev, L.E.Hüseynova

FUNKSİYALARIN LOKAL STRUKTURU İLƏ BAĞLI OLAN FƏZALARDA SİNQULYAR İNTEQRAL OPERATOR

Açar sözlər: *sinqulyar inteqral operator, orta ossilyasiya, fəzaların izomorfizmi*

Bu işdə çoxdəyişənli funksiyaların lokal xarakteristikaları terminlərinə daxil edilmiş bəzi funksional fəzaların izomorfluğu araşdırılır. Həmin fəzalarda çoxölçülü sinqulyar inteqral operatorun təsiri öyrənilir.

R.M.Rzaev, L.E.Huseynova

SINGULAR INTEGRAL OPERATOR IN SPACES RELATED TO LOCAL STRUCTURE OF FUNCTIONS

Keywords: *singular integral operator, mean oscillation, isomorphism of spaces*

In this paper we study the isomorphism of certain functional spaces introduced in terms of local characteristics of functions of several variables. The action of a multidimensional singular integral operator in these spaces is studied.

1. Некоторые обозначения и предварительные факты

Пусть R^n -мерное евклидово пространство точек$x = (x_1, x_2, \dots x_n)$, где $x_1, x_2, \dots x_n$– действительные числа; $B(a, r) \coloneqq \{x \in R^n\colon\ |x - a| \leq r\}$ –

замкнутый шар в R^nс радиусом$r > 0$и с центром в точке$a \in R^n$. Через $L_{loc}(R^n)$обозначим множество всех локально суммируемых вR^nфункций.

Пусть $f \in L_{loc}(R^n)$,

$$f\big(B(x;r)\big) = \frac{1}{|B(x;r)|} \int\limits_{B(x;r)} f(t)\, dt,$$

$$\Omega\big(f, B(x;r)\big) = \frac{1}{|B(x;r)|} \int\limits_{B(x;r)} \big|f(t) - f\big(B(x;r)\big)\big|\, dt;$$

$$\omega_f(x_0; \delta, \xi) = esssup\{|f(x) - f(y)|:\ |x - y| \le \delta,\ \ x, y \in B(x_0; \xi)\};$$

$$M_f(x_0;\ \delta, \xi) = sup\big\{\Omega\big(f, B(x;r)\big):\ B(x;r) \subset B(x_0;\ \xi), r \le \delta\big\};$$

$$m_f(x_0; \delta) = sup\big\{\Omega\big(f, B(x_0;r)\big):\ r \le \delta\big\},$$

где $x_0 \in R^n$ некоторая фиксированная точка.

Отметим, что величина $\Omega\big(f, B(x;r)\big)$ называется средней осцилляцией функции f в шаре $B(x;r)$ в метрике L. Функции $\omega_f(x_0; \delta, \xi), M_f(x_0;\ \delta, \xi)$ и $m_f(x_0; \delta)$ впервые были введены в работе [8].

Функциональные пространства, определяемые условиями на среднюю осцилляцию функций были рассмотрены, например, в работах [1], [2],[3], [4], [7] и др.

Пусть $\varphi(\delta, \xi)$ положительная монотонно возрастающая по каждому аргументу функция, определенная при $(\delta, \xi) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)$.

Класс таких функций φ обозначим через Φ.

Введем обозначения

$$H_{\varphi,\theta}^{x_0} = \left\{ f:\ \sup_{\xi \ge 0} \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{\omega_f(x_0;\ t, \xi + t)}{\varphi(t, \xi + t)} \right)^\theta dt \right)^{1/\theta} < +\infty \right\};$$

$$MO_{\varphi,\theta}^{x_0} = \left\{ f:\ \sup_{\xi \ge 0} \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{M_f(x_0;\ t, \xi + t)}{\varphi(t, \xi + t)} \right)^\theta dt \right)^{1/\theta} < +\infty \right\},$$

если $1 \le \theta < \infty$;

$$H_{\varphi,\infty}^{x_0} = \big\{f:\ \omega_f(x_0; \delta, \xi + \delta) = O\big(\varphi(\delta, \xi + \delta)\big), \delta > 0, \xi \ge 0\big\};$$

$$MO_{\varphi,\infty}^{x_0} = \big\{f:\ M_f(x_0;\ \delta, \xi + \delta) = O\big(\varphi(\delta, \xi + \delta)\big), \delta > 0, \xi \ge 0\big\};$$

$$H_\varphi^{x_0} = \big\{f: \omega_f(x_0;\ \delta, \xi) = O\big(\varphi(\delta, \xi)\big), 0 < \delta \le \xi\big\};$$

$$MO_\varphi^{x_0} = \big\{f:\ M_f(x_0;\ \delta, \xi) = O\big(\varphi(\delta, \xi)\big), 0 < \delta \le \xi\big\}.$$

Введем еще следующие обозначения:

$$\|f\|_{MO^{x_0}_{\varphi,\theta}} = \sup_{\xi\ge 0}\left(\int_0^\infty \left(\frac{M_f(x_0,;t,\xi+t)}{\varphi(t,\xi+t)}\right)^\theta dt\right)^{1/\theta},$$

$$\|f\|_{H^{x_0}_{\varphi,\theta}} = \sup_{\xi\ge 0}\left(\int_0^\infty \left(\frac{\omega_f(x_0,;t,\xi+t)}{\varphi(t,\xi+t)}\right)^\theta dt\right)^{1/\theta},$$

если $1\le\theta<\infty$;

$$\|f\|_{MO^{x_0}_{\varphi,\infty}} = \sup\left\{\frac{M_f(x_0;\delta,\xi+\delta)}{\varphi(\delta,\xi+\delta)}:\ \delta>0,\xi\ge 0\right\},$$

$$\|f\|_{H^{x_0}_{\varphi,\infty}} = \sup\left\{\frac{\omega_f(x_0;\delta,\xi+\delta)}{\varphi(\delta,\xi+\delta)}:\ \delta>0,\xi\ge 0\right\},$$

$$\|f\|_{MO^{x_0}_{\varphi}} = \sup\left\{\frac{M_f(x_0;\delta,\xi)}{\varphi(\delta,\xi)}:\ 0<\delta\le\xi\right\},$$

$$\|f\|_{H^{x_0}_{\varphi}} = \sup\left\{\frac{M_f(x_0;\delta,\xi)}{\varphi(\delta,\xi)}:\ 0<\delta\le\xi\right\}.$$

Можно проверить, что если $1\le\theta\le\infty, \varphi\in\Phi, x_0\in R^n$, то $H^{x_0}_{\varphi,\infty} = H^{x_0}_{\varphi}$, $MO^{x_0}_{\varphi,\infty} = MO^{x_0}_{\varphi}$.

Отметим, что положительная функция $h(t), t\in(0,+\infty)$, называется почти убывающей, если

$$\exists c>0\ \ \forall t_1,t_2\in(0,+\infty):\ (t_1<t_2 \Longrightarrow h(t_1)\ge c\cdot h(t_2)).$$

Рассмотрим многомерный сингулярный интегральный оператор

$$Af(x)=\tilde f(x)=\int_{R^n}\{K(x-y)-K_1(-y)\}f(y)dy=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{R^n}\{K_\varepsilon(x-y)-K_1(-y)\}f(y)dy,$$

где

$$K(x)=\Omega(x)\cdot|x|^{-n},\quad \int_{S^{n-1}}\Omega(x)ds=0,$$

$\Omega(x)$– однородна степени 0, S^{n-1}– единичная сфера в R^n,

$$sup\{|\Omega(x)-\Omega(y)|:\ |x-y|\le\delta, x,y\in S^{n-1}\}\le const\cdot\omega(\delta)(\delta>0),$$

$\omega(\delta)$ монотонно возрастает на интервале $(0,+\infty), \omega(\delta)/\delta$ почти убывает,

$$\int_0^1 t^{-1}\cdot\omega(t)dt<+\infty,$$

$K_\varepsilon(x)=K(x)\cdot X_{\{|t|>\varepsilon\}}(x), X_{\{|t|>\varepsilon\}}(x)$– характеристическая функция множества $\{t:\ t\in R^n,\ |t|>\varepsilon\}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема [8]. Пусть $x_0 \in R^n$, $f \in L_{loc}(R^n)$. Тогда при сходимости интеграла в правой части верно неравенство

$$M_{\tilde{f}}(x_0;\delta,\xi) \le C \cdot \int_{\delta}^{\infty} \omega\left(\frac{\delta}{x}\right)\left(\int_{x}^{\infty} \frac{M_f(x_0;x,\xi+t)}{t^2}dt\right)dx, \tag{1.1}$$

где $\delta > 0$, $\xi > 0$, а $C > 0$– постоянная, зависящая лишь от n, Ω и ω.

2. Об изоморфизме пространств $MO^{x_0}_{\varphi,\theta}$ и $H^{x_0}_{\varphi,\theta}$

Теорема 2.1. Пусть $1 \le \theta \le \infty, \varphi \in \Phi, x_0 \in R^n$. Тогда $H^{x_0}_{\varphi,\theta} \subset MO^{x_0}_{\varphi,\theta}$ и

$$\|f\|_{MO^{x_0}_{\varphi,\theta}} \le 2\|f\|_{H^{x_0}_{\varphi,\theta}} \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть $1 \le \theta \le \infty$ и $f \in H^{x_0}_{\varphi,\theta}$. Легко видеть, что

$$M_f(x_0;\ \delta,\xi) \le \omega_f(x_0;\ 2\delta,\xi) \le 2\omega_f(x_0;\ \delta,\xi).$$

Отсюда получим, что при $1 \le \theta < \infty$

$$\|f\|_{MO^{x_0}_{\varphi,\theta}} = \left(\int_0^{\infty}\left(\frac{M_f(x_0;\ t,\xi+t)}{\varphi(t,\xi+t)}\right)^{\theta}dt\right)^{1/\theta} \le$$

$$\le 2\left(\int_0^{\infty}\left(\frac{\omega_f(x_0;\ t,\xi+t)}{\varphi(t,\xi+t)}\right)^{\theta}dt\right)^{1/\theta} = 2\|f\|_{H^{x_0}_{\varphi,\theta}},$$

а также

$$\|f\|_{MO^{x_0}_{\varphi,\infty}} = \sup\left\{\frac{M_f(x_0;\delta,\xi+\delta)}{\varphi(\delta,\xi+\delta)}:\ \delta > 0, \xi \ge 0\right\} \le$$

$$\le 2\sup\left\{\frac{\omega_f(x_0;\delta,\xi+\delta)}{\varphi(\delta,\xi+\delta)}:\ \delta > 0, \xi \ge 0\right\} = \|f\|_{H^{x_0}_{\varphi,\infty}}.$$

Следовательно $H^{x_0}_{\varphi,\theta} \subset MO^{x_0}_{\varphi,\theta}$ и верно неравенство (2.1).
Теорема доказана.

Пусть положительные функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ определены на $(0;+\infty)\times(0;+\infty)$ и пусть существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что при всех $(x,y) \in (0;+\infty)\times(0;+\infty)$ верно неравенство $C_1\varphi(x,y) \le \psi(x,y) \le C_2\varphi(x,y)$. Такие функции называются эквивалентными на множестве $(0;+\infty)\times(0;+\infty)$ и это пишется так: $\varphi(x,y) \asymp \psi(x,y)(x,y) \in (0;+\infty)\times(0;+\infty)$.

Теорема 2.2. Пусть $1 \le \theta \le \infty, x_0 \in R^n, \varphi \in \Phi$, $\varphi(2\delta,\xi) \asymp \varphi(\delta,\xi)$, $\varphi(\delta,2\xi) \asymp \varphi(\delta,\xi)$, $(\delta,\xi) \in (0;+\infty)\times(0;+\infty)$ и пусть при $1 \le \theta \le \infty$

$$\sup_{\xi\geq 0}\left\|\frac{1}{\varphi(x,\xi+x)}\left\|\frac{\varphi(t,\xi+x+t)}{t}\right\|_{L^{\theta'}_{([0,x];dt)}}\right\|_{L^{\theta}_{([0,+\infty);dx)}}<+\infty, \qquad (2.2)$$

где $\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta'}=1$.

Тогда $MO^{x_0}_{\varphi,\theta}\subset H^{x_0}_{\varphi,\theta}$ и

$$\exists \mathrm{C}>0 \quad \forall f\in MO^{x_0}_{\varphi,\theta}:\quad \|f\|_{H^{x_0}_{\varphi,\theta}}\leq \mathrm{C}\cdot\|f\|_{MO^{x_0}_{\varphi,\theta}}. \qquad (2.3)$$

Доказательство. Пусть $f\in MO^{x_0}_{\varphi,\theta}$ и пусть $x,y\in B(x_0;\xi)$. Тогда

$$\begin{gathered}|f(x)-f(y)|\leq\left|f(x)-f\big(B(x;|x-y|)\big)\right|+\\ +\left|f\big(B(x;|x-y|)\big)-f\big(B(y;|x-y|)\big)\right|+\\ +\left|f(y)-f\big(B(y;|x-y|)\big)\right|.\end{gathered} \qquad (2.4)$$

В силу результатов работ [5], [6] для почти всех $x,y\in B(x_0;\xi)$ имеем:

$$\begin{gathered}\left|f(x)-f\big(B(x;|x-y|)\big)\right|\leq\\ \leq C_1(n)\left(m_f(x;|x-y|)+\int_0^{|x-y|}\frac{m_f(x;t)}{t}dt\right);\end{gathered} \qquad (2.5)$$

$$\begin{gathered}\left|f(y)-f\big(B(y;|x-y|)\big)\right|\leq\\ \leq C_1(n)\left(m_f(y;|x-y|)+\int_0^{|x-y|}\frac{m_f(y;t)}{t}dt\right);\end{gathered} \qquad (2.6)$$

$$\begin{gathered}\left|f\big(B(x;|x-y|)\big)-f\big(B(y;|x-y|)\big)\right|\leq\\ \leq\left|f\big(B(x;|x-y|)\big)-f\big(B(x;2|x-y|)\big)\right|+\\ +\left|f\big(B(x;2|x-y|)\big)-f\big(B(y;|x-y|)\big)\right|\leq\\ \leq C_2(n)\int_{|x-y|}^{4|x-y|}\frac{M_f(x;t,2|x-y|)}{t}dt,\end{gathered} \qquad (2.7)$$

где $C_1(n)$ и $C_2(n)$ положительные постоянные, зависящие лишь от n.

Нетрудно видеть, что при наших предположениях

$$\begin{gathered}m_f(x;t)\leq M_f(x_0;\ t,\xi+t),\\ m_f(y;t)\leq M_f(x_0;\ t,\xi+t),\\ M_f(x;t,2|x-y|)\leq M_f(x_0;\ t,\xi+2|x-y|).\end{gathered}$$

Учитывая эти неравенства, с помощью соотношений (2.4)-(2.7) получаем, что для почти всех $x,y\in B(x_0;\xi)$:

$$|f(x)-f(y)|\leq$$

$$\le C(n)\left(M_f(x_0;|x-y|,\xi+|x-y|)+\int_0^{|x-y|}\frac{m_f(x;t)}{t}dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^{|x-y|}\frac{m_f(y;t)}{t}dt+\int_{|x-y|}^{4|x-y|}\frac{M_f(x_0;t,\xi+2|x-y|)}{t}dt\right)\le$$

$$\le C_1(n)\left(M_f(x_0;|x-y|,\xi+|x-y|)+\int_0^{|x-y|}\frac{M_f(x_0;t,\xi+t)}{t}dt+\right.$$

$$\left.+\int_{|x-y|}^{4|x-y|}\frac{M_f(x_0;t,\xi+2t)}{t}dt\right)\le$$

$$\le C_2(n)\left(M_f(x_0;|x-y|,\xi+|x-y|)+\int_0^{4|x-y|}\frac{M_f(x_0;t,\xi+2t)}{t}dt\right),$$

где $C(n)$, $C_1(n), C_2(n)$– положительные постоянные, зависящие лишь от n.

Если $|x-y|\le\delta\le\xi$, то получим:

$$|f(x)-f(y)|\le C(n)\left(M_f(x_0;\delta,\xi+\delta)+\int_0^{4\delta}\frac{M_f(x_0;t,\xi+2t)}{t}dt\right).$$

Отсюда при $\delta\le\xi$

$$\omega_f(x_0;\ \delta,\xi)\le$$

$$\le C(n)\left(M_f(x_0;\delta,\xi+\delta)+\int_0^{4\delta}\frac{M_f(x_0;t,\xi+2t)}{t}dt\right). \tag{2.8}$$

Сначала рассмотрим случай $\theta=\infty$. В этом случае условие (2.2) примет вид:

$$\int_0^x\frac{\varphi(t,\xi+x+t)}{t}dt\le C\cdot\varphi(x,\xi+x), \tag{2.9}$$

при любых $x,\xi\in(0;+\infty)$, где C – положительная постоянная, не зависящая от x и ξ.

Если $f\in MO_{\varphi,\infty}^{x_0}=MO_{\varphi}^{x_0}$, то из (2.8) получаем, что при $\delta\le\xi$

$$\omega_f(x_0;\ \delta,\xi)\le C(n)\left(\varphi(\delta,2\xi)+\int_0^{4\delta}\frac{\varphi(t,9\xi)}{t}dt\right)\|f\|_{MO_{\varphi}^{x_0}}\le$$

$$\leq C_1\left(\varphi(\delta,\xi)+\int_0^\delta \frac{\varphi(t,\xi)}{t}dt\right)\|f\|_{MO_\varphi^{x_0}}\leq$$

$$\leq C_2\cdot\|f\|_{MO_\varphi^{x_0}}\cdot\int_0^\delta \frac{\varphi(t,\xi)}{t}dt, \qquad (2.10)$$

где постоянные $C_1>0, C_2>0$ не зависят от f,δ и ξ.

В случае, когда $x\leq\xi$ неравенство (2.9), в силу свойств функции $\varphi(\delta,\xi)$, эквивалентно неравенству:

$$\int_0^x \frac{\varphi(t,\xi)}{t}dt\leq C\cdot\varphi(x,\xi) \qquad (2.11)$$

где $C>0$ не зависит от x и ξ.

Учитывая неравенство (2.11) в (2.10) получаем, что при $\delta\leq\xi$

$$\omega_f(x_0;\ \delta,\xi)\leq C\cdot\|f\|_{MO_\varphi^{x_0}}\cdot\varphi(\delta,\xi),$$

т.е. $f\in H_\varphi^{x_0}=H_{\varphi,\infty}^{x_0}$ и

$$\|f\|_{H_\varphi^{x_0}}\leq C\cdot\|f\|_{MO_\varphi^{x_0}},$$

где $C>0$ – постоянная, не зависящая от f.

Пусть теперь $1\leq\theta<\infty$ и $f\in MO_{\varphi,\theta}^{x_0}$.С помощью неравенства (2.8), применяя интегральное неравенство Минковского и учитывая свойства функции $\varphi(\delta,\xi)$, получим

$$\left(\int_0^\infty\left(\frac{\omega_f(x_0;\ x,\xi+x)}{\varphi(x,\xi+x)}\right)^\theta dx\right)^{1/\theta}\leq$$

$$\leq C\left(\int_0^\infty\left(\frac{M_f(x_0;x,\xi+2x)}{\varphi(x,\xi+x)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\varphi(x,\xi+x)}\int_0^{4x}\frac{M_f(x_0;t,\xi+x+2t)}{t}dt\right)^\theta dx\right)^{1/\theta}\leq$$

$$\leq C_1\left(\int_0^\infty\left(\frac{M_f(x_0;x,\xi+2x)}{\varphi(x,\xi+2x)}\right)^\theta dx\right)^{1/\theta}+$$

$$+C\left(\int_0^\infty \left[\frac{1}{\varphi(x,\xi+x)}\int_0^{4x}\frac{M_f(x_0;t,\xi+x+2t)}{t}dt\right]^\theta dx\right)^{1/\theta} \le$$

$$\le C_2\left(\int_0^\infty \left(\frac{M_f(x_0;2x,\xi+2x)}{\varphi(2x,\xi+2x)}\right)^\theta dx\right)^{1/\theta} +$$

$$+C_3\left(\int_0^\infty \left[\frac{1}{\varphi(x,\xi+x)}\int_0^{4x}\left(\frac{M_f(x_0;t,\xi+x+2t)}{\varphi(t,\xi+x+2t)}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\frac{\varphi(t,\xi+x+2t)}{t}\right)dt\right]^\theta dx\right)^{1/\theta} \le$$

$$\le C_4\left(\int_0^\infty \left(\frac{M_f(x_0;t,\xi+t)}{\varphi(t,\xi+t)}\right)^\theta dt\right)^{1/\theta} +$$

$$+C_3\left(\int_0^\infty \left[\frac{1}{\varphi(x,\xi+x)}\int_0^{4x}\left(\frac{M_f(x_0;t,\xi+x+2t)}{\varphi(t,\xi+x+2t)}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\frac{\varphi(t,\xi+x+2t)}{t}\right)dt\right]^\theta dx\right)^{1/\theta}. \qquad (2.12)$$

Теперь оценим внутренний интеграл из правой части неравенства (2.12). Применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\int_0^{4x}\left(\frac{M_f(x_0;t,\xi+x+2t)}{\varphi(t,\xi+x+2t)}\cdot\frac{\varphi(t,\xi+x+2t)}{t}\right)dt \le$$

$$\le \left(\int_0^{4x}\left(\frac{M_f(x_0;t,\xi+x+2t)}{\varphi(t,\xi+x+2t)}\right)^\theta dt\right)^{1/\theta}\cdot\left(\int_0^{4x}\left(\frac{\varphi(t,\xi+x+2t)}{t}\right)^{\theta'} dt\right)^{1/\theta'} \le$$

$$\le \|f\|_{MO^{x_0}_{\varphi,\theta}}\cdot\left(\int_0^{4x}\left(\frac{\varphi(t,\xi+x+2t)}{t}\right)^{\theta'} dt\right)^{1/\theta'} \le$$

$$\le C_5\|f\|_{MO^{x_0}_{\varphi,\theta}}\cdot\left(\int_0^{x}\left(\frac{\varphi(t,\xi+x+t)}{t}\right)^{\theta'} dt\right)^{1/\theta'}. \qquad (2.13)$$

Из неравенств (2.12) и (2.13) получим

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{\omega_f(x_0;t,\xi+t)}{\varphi(t,\xi+t)}\right)^\theta dt\right)^{1/\theta} \le C_4\|f\|_{MO_{\varphi,\theta}^{x_0}} +$$

$$+C_3\cdot C_5\|f\|_{MO_{\varphi,\theta}^{x_0}}\left(\int_0^\infty\left[\frac{1}{\varphi(x,\xi+x)}\cdot\left(\int_0^x\left(\frac{\varphi(t,\xi+x+t)}{t}\right)^{\theta'}dt\right)^{1/\theta'}\right]^\theta dx\right)^{1/\theta} \le$$

$$\le C_6\|f\|_{MO_{\varphi,\theta}^{x_0}}\times$$

$$\times\left(1+\left\{\int_0^\infty\left[\frac{1}{\varphi(x,\xi+x)}\cdot\left(\int_0^x\left(\frac{\varphi(t,\xi+x+t)}{t}\right)^{\theta'}dt\right)^{1/\theta'}\right]^\theta dx\right\}^{1/\theta}\right)\le$$

$$\le C_6\|f\|_{MO_{\varphi,\theta}^{x_0}}\left(+\sup_{\xi\ge 0}\left\|\frac{1}{\varphi(x,\xi+x)}\left\|\frac{\varphi(t,\xi+x+t)}{t}\right\|_{L^{\theta'}_{([0,x];dt)}}\right\|_{L^{\theta}_{([0,+\infty);dx)}}\right), (2.14)$$

где $C, C_1 - C_6$ положительные постоянные, не зависящие от f и ξ.

Таким образом, если выполняется условие (2.2) и $f\in MO_{\varphi,\theta}^{x_0}$, то $f\in H_{\varphi,\theta}^{x_0}$ и $\|f\|_{H_{\varphi,\theta}^{x_0}}\le \mathrm{C}\|f\|_{MO_{\varphi,\theta}^{x_0}}$, где C не зависит от f. Теорема доказана.

Из теорем 2.1 и 2.2 следует

Теорема 2.3. Пусть $\varphi\in\Phi$, $\varphi(2\delta,\xi)\asymp\varphi(\delta,\xi)$, $\varphi(\delta,2\xi)\asymp\varphi(\delta,\xi)$, $(\delta,\xi)\in(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ и пусть выполняется условие (2.2). Тогда $MO_{\varphi,\theta}^{x_0}=H_{\varphi,\theta}^{x_0}$ и

$$\exists \mathrm{C}_1>0,\exists \mathrm{C}_2>0\quad \forall f:\quad \mathrm{C}_1\|f\|_{H_{\varphi,\theta}^{x_0}}\le\|f\|_{MO_{\varphi,\theta}^{x_0}}\le \mathrm{C}_2\|f\|_{H_{\varphi,\theta}^{x_0}}.$$

Замечание. Выше было отмечено, что условие (2.2) при $\theta=\infty$ принимает вид (2.9). Нетрудно видеть, что условие (2.9) равносильно условию

$$\int_0^x\frac{\varphi(t,\xi+t)}{t}dt\le C\cdot\varphi(x,\xi),\quad x\le\xi,$$

где постоянная $\mathrm{C}>0$ не зависит от x и ξ.

Отметим, что теорема 2.3 для пространств функций одной переменной была доказана в [9].

3. Сингулярный оператор $Af = \tilde{f}$ в пространствах $MO_{\varphi,\theta}^{x_0}$ и $H_{\varphi,\theta}^{x_0}$

Берем произвольные функции $\varphi, \psi \in \Phi$. Будем считать, что $f \in MO_{\varphi,\theta}^{x_0}$. Тогда при $1 \le \theta < \infty$, в силу неравенства (1.1) имеем

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{M_{\tilde{f}}(x_0; x, \xi + x)}{\psi(x, \xi + x)}\right)^\theta dx\right)^{1/\theta} \le$$

$$\le C\left(\int_0^\infty \left[\frac{1}{\psi(x, \xi + x)} \int_x^\infty \omega\left(\frac{x}{\tau}\right)\left(\int_\tau^\infty \frac{M_f(x_0; \tau, \xi + x + t)}{t^2} dt\right) d\tau\right]^\theta dx\right)^{1/\theta}. \quad (3.1)$$

Кроме того, если $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$, то учитывая, что $\tau \le t$ имеем

$$\int_\tau^\infty \frac{M_f(x_0; \tau, \xi + x + t)}{t^2} dt \le \int_\tau^\infty \left(\frac{M_f(x_0; t, \xi + x + t)}{\varphi(t, \xi + x + t)} \cdot \frac{\varphi(t, \xi + x + t)}{t^2}\right) dt \le$$

$$\le \left(\int_\tau^\infty \left(\frac{M_f(x_0; t, \xi + x + t)}{\varphi(t, \xi + x + t)}\right)^\theta dt\right)^{1/\theta} \cdot \left(\int_\tau^\infty \left(\frac{\varphi(t, \xi + x + t)}{t^2}\right)^{\theta'} dt\right)^{1/\theta'} \le$$

$$\le \|f\|_{MO_{\varphi,\theta}^{x_0}} \cdot \left(\int_\tau^\infty \left(\frac{\varphi(t, \xi + x + t)}{t^2}\right)^{\theta'} dt\right)^{1/\theta'},$$

с соответствующей модификацией в случае $\theta' = \infty$. Отсюда, с помощью неравенства (3.1) получаем, что

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{M_{\tilde{f}}(x_0; x, \xi + x)}{\psi(x, \xi + x)}\right)^\theta dx\right)^{1/\theta} \le C\|f\|_{MO_{\varphi,\theta}^{x_0}} \times$$

$$\times \left(\int_0^\infty \left[\frac{1}{\psi(x, \xi + x)} \int_x^\infty \omega\left(\frac{x}{\tau}\right)\left(\int_\tau^\infty \left(\frac{\varphi(t, \xi + x + t)}{t^2}\right)^{\theta'} dt\right)^{1/\theta'} d\tau\right]^\theta dx\right)^{1/\theta} =$$

$$= C\|f\|_{MO_{\varphi,\theta}^{x_0}} \times$$

$$\left(\int_0^\infty \left[\frac{1}{\psi(x,\xi+x)} \left\| \omega\left(\frac{x}{\tau}\right) \left\| \frac{\varphi(t,\xi+x+t)}{t^2} \right\|_{L^{\theta'}([\tau,+\infty);dt)} \right\|_{L^1([x,+\infty);d\tau)} \right]^\theta dx \right)^{1/\theta}$$

$$\leq$$

$$\leq C\|f\|_{MO^{x_0}_{\varphi,\theta}} \times$$

$$\times \sup_{\xi\geq 0} \left\| \frac{1}{\psi(x,\xi+x)} \left\| \omega\left(\frac{x}{\tau}\right) \left\| \frac{\varphi(t,\xi+x+t)}{t^2} \right\|_{L^{\theta'}([\tau,+\infty);dt)} \right\|_{L^1([x,+\infty);d\tau)} \right\|_{L^\theta((0,+\infty);dx)}.$$

Отсюда следует, что если $1 \leq \theta < \infty$ и если

$$\exists C > 0 \ \ \forall \xi \in [0,+\infty):$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{\psi(x,\xi+x)} \int_x^\infty \omega\left(\frac{x}{\tau}\right) \left(\int_\tau^\infty \left(\frac{\varphi(t,\xi+x+t)}{t^2}\right)^{\theta'} dt \right)^{1/\theta'} d\tau \right]^\theta dx \leq C, \qquad (3.2)$$

то $\tilde{f} \in MO^{x_0}_{\varphi,\infty}$ и $\|\tilde{f}\|_{MO^{x_0}_{\psi,\theta}} \leq C \cdot \|f\|_{MO^{x_0}_{\varphi,\theta}}$.

Теперь рассмотрим случай $\theta = \infty$ (тогда $\theta' = 1$). Тогда для любых $x \in (0,+\infty)$, $\xi \in [0,+\infty)$ имеем

$$\frac{M_{\tilde{f}}(x_0;x,\xi+x)}{\psi(x,\xi+x)} \leq \mathrm{C}\left(\frac{1}{\psi(x,\xi+x)} \int_x^\infty \omega\left(\frac{x}{\tau}\right) \left(\int_\tau^\infty \frac{M_f(x_0;\tau,\xi+x+t)}{t^2} dt \right) d\tau \right)$$

$$\leq$$

$$\leq \mathrm{C}\left(\frac{1}{\psi(x,\xi+x)} \int_x^\infty \omega\left(\frac{x}{\tau}\right) \left(\int_\tau^\infty \frac{M_f(x_0;t,\xi+x+t)}{t^2} dt \right) d\tau \right). \qquad (3.3)$$

Кроме того,

$$\int_\tau^\infty \frac{M_f(x_0;\tau,\xi+x+t)}{t^2} dt \leq \int_\tau^\infty \left(\frac{M_f(x_0;t,\xi+x+t)}{\varphi(t,\xi+x+t)} \cdot \frac{\varphi(t,\xi+x+t)}{t^2} \right) dt \leq$$

$$\leq \sup_{t\geq\tau} \left\{ \frac{M_f(x_0;t,\xi+x+t)}{\varphi(t,\xi+x+t)} \right\} \cdot \int_\tau^\infty \frac{\varphi(t,\xi+x+t)}{t^2} dt \leq$$

$$\leq \|f\|_{MO^{x_0}_{\varphi,\infty}} \cdot \int_\tau^\infty \frac{\varphi(t,\xi+x+t)}{t^2} dt.$$

Учитывая это в неравенстве (3.3), получим

$$\frac{M_{\tilde{f}}(x_0; x, \xi + x)}{\psi(x, \xi + x)} \le$$

$$\le C\|f\|_{MO^{x_0}_{\varphi,\infty}} \cdot \left(\frac{1}{\psi(x, \xi + x)} \int_x^\infty \omega\left(\frac{x}{\tau}\right) \left(\int_\tau^\infty \frac{\varphi(t, \xi + x + t)}{t^2} dt \right) d\tau \right).$$

Отсюда следует, что если

$$\int_x^\infty \omega\left(\frac{x}{\tau}\right) \left(\int_\tau^\infty \frac{\varphi(t, \xi + x + t)}{t^2} dt \right) d\tau \le C \cdot \psi(x, \xi + x), \qquad (3.4)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от $x \in (0, +\infty)$, $\xi \in [0, +\infty)$, то

$$\sup\left\{ \frac{M_{\tilde{f}}(x_0; x, \xi + x)}{\psi(x, \xi + x)} : \quad x > 0, \xi \ge 0 \right\} \le C\|f\|_{MO^{x_0}_{\varphi,\infty}}.$$

А это означает, что $\tilde{f} \in MO^{x_0}_{\varphi,\infty}$ и $\|\tilde{f}\|_{MO^{x_0}_{\psi,\infty}} \le C \cdot \|f\|_{MO^{x_0}_{\varphi,\infty}}$, где постоянная $C > 0$ не зависит от f.

Отметим, что условие (3.2) при $\theta = \infty$ превращается в условие (3.4).

Таким образом, доказана

Теорема 3.1. Пусть $1 \le \theta \le \infty, \varphi, \psi \in \Phi$и пусть

$$\exists C > 0 \forall\, \xi \in [0, +\infty):$$

$$\left\| \frac{1}{\psi(x, \xi + x)} \left\| \omega\left(\frac{x}{\tau}\right) \left\| \frac{\varphi(t, \xi + x + t)}{t^2} \right\|_{L^{\theta'}([\tau, +\infty); dt)} \right\|_{L^1([x, +\infty); d\tau)} \right\|_{L^\theta((0, +\infty); dx)} \le$$

$$\le C. \qquad (3.5)$$

Тогда оператор $Af = \tilde{f}$ ограниченно действует из пространства $MO^{x_0}_{\varphi,\theta}$ в пространство $MO^{x_0}_{\psi,\theta}$.

Замечание. Легко видеть, что условие (3.4) равносильно условию

$$\int_x^\infty \omega\left(\frac{x}{\tau}\right) \left(\int_\tau^\infty \frac{\varphi(t, \eta + t)}{t^2} dt \right) d\tau \le C \cdot \psi(x, \eta), \qquad x \le \eta. \qquad (3.6)$$

Из теорем 2.3 и 3.1 получается

Теорема 3.2. Пусть$1 \le \theta \le \infty, \varphi, \psi \in \Phi$, $\varphi(2\delta, \xi) \asymp \varphi(\delta, \xi)$, $\varphi(\delta, 2\xi) \asymp \varphi(\delta, \xi)$, $\psi(2\delta, \xi) \asymp \psi(\delta, \xi)$, $\psi(\delta, 2\xi) \asymp \psi(\delta, \xi)$, $(\delta, \xi) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ и пусть выполняются условия (2.2), (3.5). Тогда оператор $Af = \tilde{f}$ ограниченно действует из пространства $H^{x_0}_{\varphi,\theta}$ в пространство $H^{x_0}_{\psi,\theta}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation. Comm. Pure Appl. Math. 1961, v.14, pp.415-426
2. *Sarason D.* Algebras of functions on the unit circle. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, v.79, No 2, pp.286-299
3. *Sarason D.* Functions of vanishing mean oscillation. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, v.207, pp.391-405
4. *Spanne S.* Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes. Ann. ScuolaNorm. Sup. Pisa, 1965, v.19, pp.593-608
5. *Рзаев Р.М.* Об аппроксимации локально суммируемых функций сингулярными интегралами в терминах средней осцилляции и некоторые приложения // Препр. АН Азербайджанской Республики, Институт физики. 1992, №1, с.1-43
6. *Рзаев Р.М.* Многомерный сингулярный интегральный оператор в пространствах, определяемых условиями на среднюю осцилляцию функций / Докл. АН СССР, 1990, т.314, №3, с. 562-565
7. *Рзаев Р.М.* Многомерный сингулярный интегральный оператор в пространствах $BMO_{\varphi,\theta}$и $H_{\varphi,\theta}$. // Изв. Вузов. Математика, 1997, Т.418, №3, с.52-60
8. *Рзаев Р.М.* Интегральные операторы в пространствах, определяемых условиями на среднюю осцилляцию функций и некоторые приложения. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Баку, 1998, 285 с.
9. *Рзаев Р.М., Иманова А.Б.* О пространствах $H_{\varphi,\theta}^{x_0}$ и $BMO_{\varphi,\theta}^{x_0}$. // Известия педагогического университета, 2016, Т.64, №1, с. 36-45