PEDAQOJİ UNİVERSİTETİN XƏBƏRLƏRİ – 2019, C. 67, № 1, s. 85-95
ИЗВЕСТИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА – 2019, Т. 67, № 1, с. 85-95
TRANSACTIONS OF PEDAGOGICAL UNIVERSITY – 2019, V. 67, № 1, pp. 85-95

UOT 517.95

M.M.Səbzəliyev
Bakı Biznes Universiteti
sabzalievm@mail.ru

HİPERBOLİK TƏNLİYƏ CIRLAŞAN PARABOLİK TƏNLİK ÜÇÜN QOYULMUŞ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN ASİMPTOTİKASI

Açar sözlər: *asimptotika, sərhəd zolaq tipli funksiya, qalıq həddi*

Hiperbolik tənliyə cırlaşan sinqulyar həyəcanlanmış parabolik tənlik üçün qoyulmuş sərhəd məsələsinin həllinin tam asimptotikası qurulmuş və qalıq həddi qiymətləndirilmişdir.

M.M Сабзалиев

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Ключевые слова: *асимптотика, функция типа пограничного слоя, остаточный член*

Построена полная асимптотика решения краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения, вырождающегося в гиперболическое уравнение и оценен остаточный член.

M.M.Sabzaliev

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM STATED FOR A PARABOLIC EQUATION DEGENERATED INTO HYPERBOLIC EQUATION

Keywords: *asymptotics, boundary layer type function, remainder term.*

Complete asymptotics of the solution of a boundary value problem stated for singularly perturbed parabolic equation degenerated into hyperbolic equation was constructed and remainder term was estimated.

Bir fiziki xarakteristikadan digərlərinə keçidi hamar olmayan bir çox real hadisələr sinqulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklərin tədqiqinə gətirilir. Sinqulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklər müxtəlif aspektlərdən sistematik olaraq A.N.Tixonov, L.S.Pontryaqin, E.F.Mişenko, A.B.Vasilyeva, M.İ.Vişik, L.A.Lyusternik, V.Vazov, C.A.Lomov, A.M.İlin və başqa alimlər tərəfindən öyrənilmişdir. Sinqulyar həyəcanlanmış parabolik tipli tənliklərə də müəyyən işlər həsr olunmuşdur. [3] işində V.A. Trenoqin

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon b(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x,t,u) = 0,\ \ u(x,0) = \varphi(x),\ \ u(0,t) = u(1,t) = 0$$

sərhəd məsələsinin həllinin asimptotikasnı qurmuşdur. [2] məqaləsində $u_t = \varepsilon\Delta u + |u|^{p-1}u$ tənliyinin Ω-da $u(x,0) = \varphi(x)$ şərtini, $\partial\Omega \times (0,+\infty)$-da isə $u(x,t) = 0$ şərtini ödəyən həllinin asimptotikası tədqiq edilmişdir. V.F. Butuzov [1] işində $-u_t + \varepsilon^2\Delta u - f(u,x,\varepsilon) = 0$ tənliyi üçün üçüncü növ sərhəd şərtini öyrənmişdir.

Bu kiçik həcmli icmal göstərir ki, tədqiq olunmuş sinqulyar həyəcanlanmış qeyri-xətti parabolik tənliklər aşağıdakı xüsusiyyətlərə malikdirlər. Birincisi, araşdırılmış sinqulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklər ya funksional tənliyə, ya da adi diferensial tənliyə cırlaşırlar. İkincisi, tədqiq olunan sinqulyar həyəcanlanmış qeyri-xətti parabolik tənliklər axtarılan funksiyanın törəmələrinə nəzərən xəttidirlər.

Bu məqalədə $D = \{(t,x) | 0 \le t \le 1,\ 0 \le x \le 1\}$ düzbucaqlı oblastında aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxılır:

$$L_\varepsilon u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^p \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^p - \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b(t,x)u - f(t,x) = 0, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, (0 \le x \le 1);\ \ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0,\ \ (0 \le t \le 1). \tag{2}$$

Burada $\varepsilon > 0$-kiçik parametr, $p = 2k+1,$ k-ixtiyari natural ədəd, $a > 0$-sabit, $b(t,x)$ və $f(t,x)$-isə verilmiş kifayət qədər hamar funksiyalardır. $b(t,x)$ funksiyası D-də

$$b(t,x) \ge \gamma^2 > 0,\ \gamma = const \tag{3}$$

şərtini ödəyir.

Aydındır ki, ε kiçik parametrinin hər bir qeyd olunmuş qiymətində (1), (2) sərhəd məsələsinin $L_{p+1}\left[0,1;\ \overset{\circ}{W}_{p+1}(0,1)\right]$ fəzasından olan həlli vardır. Bu işdə məqsəd (1), (2) məsələsinin ümumiləşmiş həllinin kiçik parametrə nəzərən asimptotikasını qurmaqdır.

(1), (2) məsələsinin həllinin asimptotikasını qurmaq üçün iterasiya prosesləri aparılır. Birinci iterasiya prosesində (1) tənliyinin təqribi həlli

$$W = W_0 + \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \ldots + \varepsilon^n W_n \tag{4}$$

şəklində axtarılır. W funksiyasının (4)-dəki ifadəsini (1) tənliyində yazıb, tələb edək ki, bu funksiya (1) tənliyinin

$$L_\varepsilon W = O\left(\varepsilon^{n+1}\right) \tag{5}$$

mənada təqribi həlli olsun. Onda $W_i;\ i=0,1,...,n$ funksiyalarını təyin etmək üçün aşağıdakı rekurrent diferensial tənliklər alınır:

$$L_0W_0 \equiv \frac{\partial W_0}{\partial t} + a\frac{\partial W_0}{\partial x} + b(t,x)W_0 = f(t,x), \tag{6}$$

$$L_0W_i \equiv \frac{\partial W_i}{\partial t} + a\frac{\partial W_i}{\partial x} + b(t,x)W_i = f_i(t,x);\ i=1,2,...,n. \tag{7}$$

Burada $f_i(t,x)$ funksiyaları $W_o, W_1,...,W_{i-1}$ funksiyaları ilə ifadə olunan məlum funksiyalardır. Məsələn, f_1 və f_2 funksiyaları

$$f_1(t,x) = \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}, \quad f_2(t,x) = \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2}$$

düsturları ilə təyin edilirlər. $k=1$ olduqda f_3 funksiyası

$$f_3(t,x) = \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_0}{\partial x}\right)^3$$

düsturu ilə təyin edilir.

Aydındır ki, (6), (7) tənlikləri üçün (2) sərhəd şərtlərinin hamısından istifadə etmək olmaz. (6), (7) tənlikləri üçün

$$W_0\big|_{t=0} = 0,\ (0 \le x \le 1);\quad W_0\big|_{x=0} = 0,\ (0 \le t \le 1) \tag{8}$$

$$W_i\big|_{t=0} = 0,\ (0 \le x \le 1);\quad W_i\big|_{x=0} = 0,\ (0 \le t \le 1);\ i=1,2,...,n \tag{9}$$

sərhəd şərtlərindən istifadə ediləcəkdir. (4), (8) və (9)-a əsasən belə qurulan W funksiyası (5) tənlyini və

$$W\big|_{t=0} = 0,\ (0 \le x \le 1);\quad W\big|_{x=0} = 0,\ (0 \le t \le 1) \tag{10}$$

sərhəd şərtlərini ödəyəcəkdir. W funksiyası (2)-də olan $x=1$ üzərindəki sərhəd şərtini ödəməyə bilər. Bu sərhəd şərtinin ödənilməsini təmin etmək üçün $x=1$ yaxınlığında sərhəd zolaq tipli funksiya qurulacaqdır.

Əvvəlcə $W_0, W_1,...,W_n$ funksiyalarını təyin edək. Beləliklə, W_0 funksiyası (6), (8) sərhəd məsələsinin həllidir. Aşağıdakı təklif doğrudur.

Lemma 1. Fərz edək ki, $f(t,x) \in C^{2(n+1)}(D)$, $b(t,x) \in C^{2(n+1)}(D)$ və $f(t,x)$ funksiyası aşağıdakı şərti ödəyir:

$$\frac{\partial^i f(t,x)}{\partial t^{i_1}\partial x^{i_2}}\Big|_{x=at} = 0;\ \ i=i_1+i_2;\ i=0,1,...,2(n+1);\ (t,x)\in D. \tag{11}$$

Onda (6), (8) məsələsinin həlli olan $W_0(t,x)$ funksiyası da $C^{2(n+1)}(D)$ fəzasına daxildir və

$$\frac{\partial^i W_0(t,x)}{\partial t^{i_1}\partial x^{i_2}}\Big|_{x=at}=0;\ \ i=i_1+i_2;\ i=0,1,...,2(n+1);\ (t,x)\in D \tag{12}$$

şərtini ödəyir.

İsbatı. (6) diferensial tənliyinin koordinat başlanğıcından keçən $x=at$ xarakteristik xətti D düzbucaqlısını iki hissəyə bölür: $D_1=\{(t,x)\in D|x\le at\}$, $D_2=\{(t,x)\in D|x\ge at\}$. (6), (8) məsələsinin həllini aşağıdakı şəkildə axtarmaq olar:

$$W_0=\begin{cases}W_0^{(1)},\ (t,x)\in D_1 \ \ olduqda,\\ W_0^{(2)},\ (t,x)\in D_2\ \ olduqda.\end{cases} \tag{13}$$

Burada $W_0^{(1)}$ və $W_0^{(2)}$ funksiyaları aşağıdakı sərhəd məsələlərinin həlləridir:

$$L_0W_0^{(1)}=0,\ (t,x)\in D_1;\ \ W_0^{(1)}\big|_{x=0}=0,\ (0\le t\le 1) \tag{14}$$

$$L_0W_0^{(2)}=0,\ (t,x)\in D_2;\ \ W_0^{(2)}\big|_{t=0}=0,\ (0\le x\le 1). \tag{15}$$

(14), (15) Koşi məsələlərini həll edərək, alırıq:

$$W_0^{(1)}(t,x)=\frac{1}{a}\int_0^x f\left(\frac{1}{a}(at-x+\tau),\tau\right)\exp\left[-\frac{1}{a}\int_\tau^x b\left(\frac{1}{a}(at-x+\xi),\xi\right)d\xi\right]d\tau, \tag{16}$$

$$W_0^{(2)}(t,x)=\int_0^t f(\tau,a\tau+x-at)\exp\left[-\int_\tau^t b(\xi,a\xi+x-at)d\xi\right]d\tau. \tag{17}$$

$f(t,x)$ və $b(t,x)$ funksiyaları hamar funksiyalar olduqda $W_0^{(1)}(t,x)$ funksiya D_1-də, $W_0^{(2)}(t,x)$ funksiyası isə D_2-də hamar funksiyalardır. Ona görə də (13) düsturu ilə təyin olunan $W_0(t,x)$ funksiyası da D-də $x\ne at$ olduqda hamar funksiya olacaqdır. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $x=at$ olduqda, $W_0^{(1)}(t,x)$ və $W_0^{(2)}(t,x)$ funksiyaları üst-üstə düşürlər. Lakin $W_0^{(1)}(t,x)$ və $W_0^{(2)}(t,x)$ funksiyalarının törəmələri $x=at$ olduqda fərqlidirlər.

İndi isə fərz edək ki, $f(t,x)$ funksiyası (11) şərtini ödəyir. Bu şərtdən, (13), (16) və (17) düsturlarından istifadə etməklə, göstərmək olar ki,

$$\frac{\partial^i W_0(t,x)}{\partial t^{i_1}\partial x^{i_2}}\Big|_{x-at=-0}=\frac{\partial^i W_0^{(1)}(t,x)}{\partial t^{i_1}\partial x^{i_2}}\Big|_{x=at}=0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^i W_0(t,x)}{\partial t^{i_1}\partial x^{i_2}}\Big|_{x-at=+0}=\frac{\partial^i W_0^{(2)}(t,x)}{\partial t^{i_1}\partial x^{i_2}}\Big|_{x=at}=0. \tag{19}$$

(18), (19) onu göstərir ki, (11) şərti ödənildikdə $W_0(t,x)$ funksiyası (12) şərtini ödəyir.

Lemma 1 isbat olundu.

Lemma 1-ə və $f_1(t,x)$-in aşkar ifadəsinə görə $i=1$ olduqda (7)-dən alınan tənliyin sağ tərəfi də törəmələri ilə birlikdə $x=at$ olduqda sıfra çevrilir. Ona görə $i=1$ olduqda, (7), (9) məsələsinin həlli də Lemma 1-ə əsasən törəmələri ilə birlikdə $x=at$ olduqda sıfra çevrilirlər. Proses bu qayda ilə davam etdirilərək (4)-ün sağ tərəfinə daxil olan bütün $W_0, W_1, ..., W_n$ funksiyaları qurulurlar.

İndi isə $x=1$ yaxınlığında sərhəd zolaq tipli funksiyanın qurulmasına keçək. Qurulmuş W funksiyasına $x=1$ yaxınlığında sərhəd zolaq tipli elə

$$V = V_0 + \varepsilon V_1 + ... + \varepsilon^{n+1} V_{n+1} \tag{20}$$

funksiyası əlavə ediləcəkdir ki, $W+V$ funksiyası (2)-də olan $x=1$ üzərindəki sərhəd şərtini ödəsin:

$$(W+V)\big|_{x=1} = 0. \tag{21}$$

V funksiyası qurularkən həm də

$$L_{\varepsilon,1}(W+V) - L_{\varepsilon,1}W = 0\left(\varepsilon^{n+1}\right) \tag{22}$$

şərtinin ödənilməsini təmin etmək lazımdır. Burada $L_{\varepsilon,1}$-ilə L_ε operatorunun $x=1$ yaxınlığında kiçik parametrə nəzərən yeni ayrılışı işarə olunmuşdur.

L_ε operatorunun yeni $L_{\varepsilon,1}$ ayrılışını yazmaq üçün $x=1$ yaxınlığında $t=t,\ 1-x=\varepsilon\tau$ düsturları üzrə yeni koordinatlara keçilir. Köməkçi $r=\sum_{j=0}^{n+1}\varepsilon^j r_j(t,\tau)$ funksiyasına baxaq. Burada $r_j(t,\tau)$ ilə $x=1$ yaxınlığında təyin olunmuş müəyyən hamar funksiyalar işarə olunmuşlar.

$L_{\varepsilon,1}(r)$ diferensial ifadəsinin (t,τ) koordinatlarında kiçik parametrin qüvvətlərinə nəzərən ayrılışı aşağıdakı şəkildə olur:

$$\begin{gathered} L_{\varepsilon,1}r \equiv -\varepsilon^{-1}\left\{ \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial r_0}{\partial\tau}\right)^p + \frac{\partial^2 r_0}{\partial\tau^2} + a\frac{\partial r_0}{\partial\tau} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{n+1}\varepsilon^j\left[p\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\left(\frac{\partial r_0}{\partial\tau}\right)^{p-1}\frac{\partial r_j}{\partial\tau}\right) + \frac{\partial^2 r_j}{\partial\tau^2} + a\frac{\partial r_j}{\partial\tau} + \Phi_j(t,\tau,r_0,r_1,...,r_{j-1})\right] + O\left(\varepsilon^{n+2}\right)\right\}. \end{gathered} \tag{23}$$

Burada $\Phi_j(t,\tau,r_0,r_1,...,r_{j-1})$-ilə t,τ dəyişənlərindən, $r_0,r_1,...,r_{j-1}$ funksiyaları və onların birinci, ikinci tərtib törəmələrindən asılı olan məlum funksiyaları işarə olunmuşdur.

Qurulmuş hər bir $W_i(t,1-\varepsilon\tau);\ i=0,1,...,n$ funksiyasını $(t,1)$ nöqtəsində Teylor düsturu üzrə ayırıb (4)-ün sağ tərəfində yazdıqda W funksiyasının (t,τ) koordinatlarında kiçik parametrə nəzərən aşağıdakı ayrılışını alırıq:

$$W=\sum_{j=0}^{n+1}\varepsilon^{j}\omega_{j}(t,\tau)+O\left(\varepsilon^{n+2}\right). \qquad (24)$$

Burada $\omega_0(t,1)$ funksiyası τ dəyişənindən asılı deyildir, qalan ω_k funksiyaları aşağıdakı düstur ilə təyin edilirlər:

$$\omega_k=\sum_{i+j=k}(-1)^i\frac{\partial^i W_j(t,1)}{\partial x^i}\tau^i;\; k=1,2,...,n+1.$$

W funksiyasının (24) ifadəsini, V funksiyasının (20) ifadəsini (22) bərabərliyində yazıb, (23) bərabərliyini nəzərə alsaq, $V_0,V_1,...,V_{n+1}$ funksiyalarını təyin etmək üçün aşağıdakı diferensial tənliklər alınır:

$$AV_0\equiv\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial V_0}{\partial\tau}\right)^p+\frac{\partial^2 V_0}{\partial\tau^2}+a\frac{\partial V_0}{\partial\tau}=0, \qquad (25)$$

$$p\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\left(\frac{\partial V_0}{\partial\tau}\right)^{p-1}\cdot\frac{\partial V_j}{\partial\tau}\right]+\frac{\partial^2 V_j}{\partial\tau^2}+a\frac{\partial V_j}{\partial\tau}+\Phi_j\left(t,\tau,V_0+\omega_0,V_1+\omega_1,...,V_{j-1}+\omega_{j-1}\right)-$$
$$-\Phi_j\left(t,\tau,\omega_0,\omega_1,...,\omega_{j-1}\right)=0;\; j=1,2,...,n+1. \qquad (26)$$

(25), (26) tənlikləri üçün sərhəd şərtləri W-nin (4)-dəki, V-nin (20)-dəki ifadələrini (21)-də yazıb, ε-nun eyni dərəcəli qüvvətlərinin əmsallarını müqayisə etməklə alınır və aşağıdakı şəkildədirlər:

$$V_j\Big|_{\tau=0}=-W_j\Big|_{x=1};\; j=0,1,...,n;\; V_{n+1}\Big|_{\tau=0}=0. \qquad (27)$$

$V_j;\, j=0,1,...,n$ funksiyaları sərhəd zolaq tipli funksiyalar kimi axtarıldıqları üçün (25), (26) diferensial tənlikləri üçün ikinci sərhəd şərtləri olaraq

$$\lim_{\tau\to+\infty}V_j=0;\; j=0,1,...,n+1 \qquad (28)$$

götürülürlər.

Beləliklə, V_0 funksiyası (25) diferensial tənliyinin

$$V_0\Big|_{\tau=0}=\varphi(t),\; \lim_{\tau\to+\infty}V_0=0 \qquad (29)$$

sərhəd şərtlərini ödəyən həllidir. $j=0$ olduqda (27)-dən alınır ki, $\varphi(t)=-W_0(t,1)$.

Aşağıdakı təklif doğrudur.

Lemma 2. $\varphi(t)\in C^{2(n+1)}[0;1]$ olduqda (25), (29) sərhəd məsələsinin yeganə $V_0(t,\tau)$ həlli vardır, bu həll τ dəyişəninə nəzərən sonsuz diferensiallanandır, t dəyişəninə nəzərən isə $2(n+1)$ tərtib kəsilməyən törəmələrə malikdir və aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\left|\frac{\partial^i V_0(t,\tau)}{\partial t^{i_1}\partial\tau^{i_2}}\right| \le C\exp(-a\tau),\ i = i_1 + i_2;\ i_1 = 0,1,...,2(n+1). \tag{30}$$

İsbatı. Əvvəlcə (25), (29) məsələsinin həllinin yeganəliyini isbat edək. Əksini fərz edək. Tutaq ki, (25), (29) məsələsinin $V_0^{(1)}(t,\tau), V_0^{(2)}(t,\tau)$ kimi iki həlli vardır. Onda $AV_0^{(1)} = 0$ tənliyindən $AV_0^{(2)} = 0$ tənliyini tərəf-tərəfə çıxıb, $V_0^{(1)} - V_0^{(2)} = H$ işarə etdikdə alınır:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\left(\frac{\partial V_0^{(1)}}{\partial\tau}\right)^{2k+1} - \left(\frac{\partial V_0^{(2)}}{\partial\tau}\right)^{2k+1}\right] + \frac{\partial^2 H}{\partial\tau^2} + a\frac{\partial H}{\partial\tau} = 0. \tag{31}$$

Aydındır ki, H funksiyası

$$H\Big|_{\tau=0} = 0,\ \lim_{\tau\to+\infty} H = 0 \tag{32}$$

sərhəd şərtlərini ödəyir. (31) bərabərliyinin hər iki tərəfini $-H = -\left(V_0^{(1)} - V_0^{(2)}\right)$ funksiyasına vurub, (32) sərhəd şərtlərini nəzərə almaqla hissə-hissə inteqrallayıb, müəyyən çevirmələrdən sonra alırıq:

$$2^{-(2k+2)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial H}{\partial\tau}\right)^{2k+2} d\tau + \int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial W}{\partial\tau}\right)^2 d\tau \le 0.$$

Sonuncu bərabərsizlikdən alınır ki, $\frac{\partial H}{\partial\tau} = 0$ olmalıdır. Buradan isə $H = V_0^{(1)} - V_0^{(2)} = c(t)$ olduğu alınır. ($c(t)$ funksiyası τ dəyişənindən asılı deyil). (32) sərhəd şərtlərindən birincisini nəzərə aldıqda $V_0^{(1)} \equiv V_0^{(2)}$ olduğu alınır. Beləliklə, (25), (29) məsələsinin həllinin yeganəliyi isbat oundu.

İndi isə (25), (29) məsələsinin həllinin varlığını isbat edək. $\frac{\partial V_0}{\partial\tau} = q$ işarə edərək asanlıqla göstərmək olar ki, (25) tənliyinin ümumi həlli parametrik şəkildə

$$V_0 = C_1(t) - \frac{1}{a}\left(q^{2k+1} + q\right),\ \tau = C_2(t) - \frac{1}{a}\left(\frac{2k+1}{2k}q^{2k} + \ln|q|\right) \tag{33}$$

düsturları ilə verilir. $C_1(t), C_2(t)$ funksiyalarını (29) sərhəd şərtlərinə əsasən təyin edib (33) düsturlarında yerlərinə yazdıqda (25), (29) sərhəd məsələsinin həllinin parametrik şəkildə

$$\tau = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{q}{q_0}\right| - \frac{2k+1}{2ak}\left(q^{2k} - q_0^{2k}\right),\ V_0 = -\frac{1}{a}\left(q^{2k+1} + q\right) \tag{34}$$

düsturları ilə verildiyi alınır. Burada $q_0(t)$ ilə

$$q^{2k+1}+q+a\varphi(t)=0$$

cəbri tənliyinin həqiqi kökü işarə olunmuşdur.

(25), (29) məsələsinin həllinin diferensial xassələri və (30) qiymətləndirməsi (34) düsturlarından istifadə edilməklə asanlıqla isbat olunurlar.

Lemma 2 isbat olundu.

V funksiyasının (20) ayrılışına daxil olan qalan $V_1, V_2, ..., V_{n+1}$ funksiyalarının təyin edilməsinə keçək. Əvvəlcə qeyd edək ki, onların təyin ediləcəkləri (26) tənliklərini belə yazmaq olar:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\psi(t,\tau)\frac{\partial V_j}{\partial\tau}\right]+a\frac{\partial V_j}{\partial\tau}=h_j(t,\tau);\ \ j=1,2,...,n+1. \quad (35)$$

Burada $h_j(t,\tau)$ -ilə $\omega_0, \omega_1, ..., \omega_{j-1}; V_0, V_1, ..., V_{j-1}$ funksiyalarından asılı olan məlum funksiyalar işarə olunmuşlar. $\psi(t,\tau)$ funksiyası isə

$$\psi(t,\tau)=(2k+1)\left(\frac{\partial V_0}{\partial\tau}\right)^{2k}+1 \quad (36)$$

düsturu ilə təyin edilir.

Beləliklə, V_j funksiyaları (35) diferensial tənliyinin

$$V_j\Big|_{\tau=0}=g_j(t),\ \lim_{\tau\to+\infty}V_j=0;\ \ j=1,2,...,n+1 \quad (37)$$

sərhəd şərtlərini ödəyən həlləridirlər. Burada $j=1,2,...,n$ olduqda, $g_j(t)=-W_j(t,1),\ j=n+1$ olduqda isə $g_{n+1}(t)=0$ götürülür.

Aşağıdakı təklif doğrudur.

Lemma 3. Fərz edək ki, $g_j(t)\in C^m[0,1],\ h_j(t,\tau)$ funksiyası τ dəyişəninə nəzərən sonsuz diferensiallanan, t dəyişəninə nəzərən isə m tərtib kəsilməyən törəmələrə malikdir və

$$\left|\frac{\partial^i h_j(t,\tau)}{\partial t^{i_1}\partial\tau^{i_2}}\right|\le C_j^{(1)}(1+\tau+\tau^2+...+\tau^s)\exp(-a\tau) \quad (38)$$

şərtini ödəyir ($C_j^{(1)}=const>0,\ i=i_1+i_2;\ i_1=0,1,...,m;\ s$ və m -müəyyən natural ədədlərdir). Onda (35), (37) sərhəd məsələsinin yeganə $V_j(t,\tau)$ həlli vardır. Bu həll τ dəyişəninə nəzərən sonsuz diferensiallanandır, t dəyişəninə nəzərən m tərtib kəsilməyən törəmələrə malikdir və aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\left|\frac{\partial^i V_j(t,\tau)}{\partial t^{i_1}\partial\tau^{i_2}}\right|\le C_j^{(2)}(1+\tau+\tau^2+...+\tau^{s+1})\exp(-a\tau);\ i=i_1+i_2;\ i_1=0,1,...,m. \quad (39)$$

İsbat. Göstərmək olar ki, (35), (37) məsələsinin həlli

$$V_j(t,\tau) = \left\{ g(t) - \int_0^{\tau} \psi^{-1}(t,z) \left[\int_z^{+\infty} h(t,\xi)d\xi \right] \exp\left[\nu(t,z)\right] dz \right\} \exp\left[-\nu(t,\tau)\right] \tag{40}$$

düsturu ilə təyin edilir. Burada $\nu(t,\tau)$ ilə

$$\nu(t,\tau) = a\int_0^{\tau} \psi^{-1}(t,\xi)d\xi \tag{41}$$

düsturu ilə təyin olunan funksiya işarə olunmuşdur.

(40) düsturuna əsasən $V_j(t,\tau)$ funksiyasının Lemma 3-ün hökmündə qeyd olunan diferensial xassələrə malik olmasını yoxlamaq asandır.

$V_j(t,\tau)$ funksiyası üçün (39) qiymətləndirməsinin doğruluğu da (40) düsturundan istifadə edilməklə isbat olunur. Onu qeyd etmək lazımdır ki, (36) düsturu ilə təyin edilən $\psi(t,\tau)$ funksiyası üçün $\psi^{-1}(t,\tau)$ funksiyası və onun törəmələri məhduddurlar. Digər tərəfdən, (41) düsturu ilə təyin edilən $\nu(t,\tau)$ funksiyası üçün

$$\exp\left[-\nu(t,\tau)\right] \le C\exp(-a\tau)$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Bu iki faktdan və (40) düsturundan istifadə etməklə, $V_j(t,\tau)$ funksiyası üçün (39) qiymətləndirməsinin doğru olduğu isbat olunur.

Lemma 3 isbat olundu.

Qurulmuş bütün V_j funksiyaları hamarlayıcı funksiyalara vurulur və alınan yeni funksiyalar üçün əvvəlki $V_j;\, j=0,1,...,n$ işarələri saxlanılır. Hamarlayıcı funksiyalar hesabına bütün $V_j;\, j=0,1,...,n+1$ funksiyaları $x=0$ olduqda sıfra çevrilirlər. Ona görə də (20) düsturu ilə təyin edilən V funksiyası da $x=0$ oldquda sıfra çevrilir. Buradan və (10) bərabərliklərinin ikincisindən alınır ki, qurulan $W+V$ cəmi (21) sərhəd şərtindən əlavə

$$(W+V)\big|_{x=0} = 0 \tag{42}$$

sərhəd şərtini də ödəyir. (10) bərabərliklərinin birincisinə görə, bu cəmin həm də

$$(W+V)\big|_{t=0} = 0 \tag{43}$$

sərhəd şərtini ödəməsi üçün V funksiyası $t=0$ olduqda sıfra çevrilməlidir. Əgər $f(t,x)$ funksiyası

$$\frac{\partial^i f(0,1)}{\partial t^i} = 0;\;\; i = 0,1,...,2(n+1) \tag{44}$$

şərtini ödəyərsə, onda V_j; $j = 0,1,...,n+1$ funksiyaları hamısı $t = 0$ olduqda sıfra çevrilirlər. Deməli, (44) şərti ödənildikdə (43) sərhəd şərti də ödəniləcəkdir.

Qurulmuş $W+V$ cəmini

$$\tilde{U} = W + V, \tag{45}$$

ilə, dəqiq həll ilə $\tilde{u}$ arasındakı fərqi

$$z = u - \tilde{u} \tag{46}$$

ilə işarə edib, z -i qalıq həddi adlandıraq.

(46)-dan u -nu tapıb, (4), (20) və (45)-i nəzərə alsaq, (1), (2) məsələsinin həlli üçün aşağıdakı ayrılış alınır:

$$U = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i W_i + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^j V_j + z. \tag{47}$$

İndi isə qalıq həddini qiymətləndirək. Aşağıdakı təklif doğrudur.

Lemma 4. z qalıq həddi üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\int_0^1 z^2 dx + \varepsilon^p \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{p+1} dx\, d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{p+2} dx\, dt + c_1 \int_0^t \int_0^1 z^2 dx\, d\tau \le C_2 \varepsilon^{n+2}. \tag{48}$$

Buradakı $c_1 > 0, c_2 > 0$-sabitləri ε -dan asılı deyillər.

İsbatı. (5) və (22) bərabərliklərini tərəf-tərəfə toplayıb (46)-nı nəzərə alsaq,

$$L_\varepsilon \tilde{u} = O\left(\varepsilon^{n+1}\right) \tag{49}$$

olar. (1)-dən (49)-u tərəf-tərəfə çıxdıqda

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \varepsilon^p \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^p - \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right)^p \right] - \varepsilon \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b(t,x) z = \varepsilon^{n+1} F(\varepsilon, t, x) \tag{50}$$

alınır. $F(\varepsilon, t, x)$ -funksiyası ε -nun $\left[0, \varepsilon_0\right)$ yarımintervalından olan bütün qiymətlərində D -də məhdud funksiyadır. (2), (21), (42), (43) və (46)-dan alınır ki, z funksiyası aşağıdakı sərhəd şərtlərini ödəyir:

$$z\big|_{t=0} = 0, \quad z\big|_{x=0} = z\big|_{x=1} = 0. \tag{51}$$

(50) bərabərliyinin hər iki tərəfini $z = u - \tilde{u}$ funksiyasına vurub (51) sərhəd şərtlərini nəzərə almaqla, hissə-hissə inteqrallamaqla, müəyyən çevirmələrdən sonra (48) qiymətləndirməsi alınır.

Lemma 4 isbat olundu.

Bu məqalədə alınan nəticələri aşağıdakı teorem şəklində yekunlaşdırmaq olar.

Teorem. $f(t,x) \in C^{2(n+1)} D$ olub, (11) və (44) şərtləri ödənildikdə (1), (2) məsələsinin həlli üçün (47) asimptotik ayrılışı doğrudur. Burada W_i -

funksiyaları birinci iterasiya prosesində təyin olunurlar, V_j -funksiyaları $x=1$ yaxınlığında sərhəd zolaq tipli funksiyalar olub, ikinci iterasiya prosesində təyin olunurlar, z -isə qalıq həddidir və onun üçün (48) qiymətləndirməsi doğrudur.

ƏDƏBİYYAT

1. *Бутузов В.Ф.* О сингулярно возмущенной двумерной параболической задаче в случае пересечения корней вырожденного уравнения // Вычисл. матем. и матем. физики, 2010, Т. 50, №2, с.268-275
2. *Mizoguchi Norico, Yunagida Eiji.* Life span of solutions for a semilinear parabolic problem with small diffusion // J. Math. Anat. and Appl., 2001, V.262, No1, pp.350-368
3. *Треногин В.А.* Об асимптотике решения почти линейных параболических уравнений с параболическим погранслоем // УМН, 1961, Т. 16, вып. 1 (97), с.163-169