PEDAQOJİ UNİVERSİTETİN XƏBƏRLƏRİ – 2019, C. 67, № 2, s. 25-31
ИЗВЕСТИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА – 2019, Т. 67, № 2, с. 25-31
TRANSACTIONS OF PEDAGOGICAL UNIVERSITY – 2019, V. 67, № 2, pp. 25-31

UOT 512

V.M.Cabbarzadə
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
jabbarzadevm@gmail.com

KONQRUENS DİSTRİBUTİV ÇOXOBRAZLILARDA MÜSTƏQİL AKSİOMATİK SİSTEMƏ MALİK OLMAQ VƏ ÖRTMƏ PROBLEMLƏRİNİN TƏDQİQİ

Açar sözlər*: çoxobrazlı, qəfəslə nizamlanmış qruplar, müstəqil basis, interval, atom*

Struktur lokal sonlu və sonlu aksiomatikləşdirilə bilən qəfəslə nizamlanmış qruplar çoxobrazlısı üçün Tarski A. və Jonson B. problemləri həll olunmuşdur. İsbat olunmuşdur ki, əgər W çoxobrazlısı struktur lokal sonlu və sonlu aksiomatikləşdirilə bilən qəfəslə nizamlanmış qruplar çoxobrazlısıdırsa, onda onun ixtiyari V alt çoxobrazlısı asılı olmayan bazisə malikdir və əgər V≠W, onda [V,W] intervalında atom var.

В.М.Джаббарзаде

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМЫ НЕЗАВИСИМОЙ БАЗИРУЕМОСТИ И ПОКРЫВАЕМОСТИ В КОНГРУЭНЦ-ДИСТРИБУТИВНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Ключевые слова: *многообразие, решеточно упорядоченные группы, независимая базируемость, интервал, атом*

Решены проблемы Тарского А. и Йонсона Б. для многообразия структурно локально конечных решеточно упорядоченных групп. Доказано, что если W – конечно базируемых многообразие структурно локально конечных решеточно упорядоченных групп, то каждое подмногообразие V многообразия W является независимо базируемым, и если V≠W, то в [V,W] интервале есть атом.

V.M.Jabbarzadeh

INVESTIGATION OF THE PROBLEM OF INDEPENDENT BASIS AND COVERAGE IN CONGRUENZ DISTRIBUTIVE VARIETIES

Key words: *varieties, lattice ordered group, independently based, interval, atom*

Solved the problem of Tarski A. and Jonson B. for structurally locally finite and finitely axiomaizable lattice-ordered groups. Proved that,if W structure locally finite and finitely axiomatizable lattice-ordered groups varieties, then it's any V subvarieties has idenpedently based and has V≠W, then atom in [V,W] interval.

Giriş

Aksiomatikləşdirilə bilən siniflər içərisində çoxobrazlılar ən çox tədqiq olunan sahələrdən biridir. Qəfəslə nizamlanmış qrupların çoxobrazlılar sinfi müəyyən eyniliklər külliyyatı ilə təyin olunur. Belə ki, bu eyniliklər ilə qəfəslə nizamlanmış qrupların bir çox mühüm xassələri verilə bilir və riyazi məntiq vasitəsi ilə tədqiq olunur. Digər tərəfdən, çoxobrazlılar üçün sturktur Birkqof teoreminə görə, çoxobrazlılar – alt cəbrlər, homomorfizmlər və Dekart hasillər ilə qurula bilir və tədqiq olunur.

Qəfəslə nizamlanmış qrupların çoxobrazlılar nəzəriyyəsi qruplar, halqalar, struktur və digərlərinə aid olan problemlərin tədqiqində mühüm rol oynayır. Çoxobrazlılar nəzəriyyəsinin inkişafı ümumi nəzəriyyənin "daxili" ideyalarının və həmçinin konkret klassik qəfəslə nizamlanmış qrupların, qrupların, halqaların və strukturların tədqiqində yaranan problemlərin təsiri ilə inkişaf edir.

Qəfəslə nizamlanmış qrupların çoxobrazlılar nəzəriyyəsində tədqiq olunan məsələlərinin dairəsi çox genişdir və bu dairəyə daxil olan ən mühüm istiqamətlərdən biri də konqruens şərti ödəyən çoxobrazlılarda müstəqil bazisə malik olmaq probleminin tədqiqidir.

Qəfəslə nizamlanmış qruplar keçən əsrin 40-cı illərində bir çox riyaziyyatçıların, xüsusən A.İ.Maltsevin və Q.Birkqofun aldıqları nəticələrə görə tam nəzəriyyə kimi formalaşmışdır. Son 40 ildə qəfəslə nizamlanmış qruplar nəzəriyyəsi xüsusən intensiv inkişaf etmiş və riyaziyyatın müxtəlif sahələrinə tətbiq olunan, öz geniş problematikası olan nəzəriyyəyə çevrilmişdir. Qrupda qəfəs nizamının verilməsi qəfəs və ya ona yaxın nizama malik analizin obyektlərinə və xüsusi halda təbii qəfəs strukturlu və ona yaxın strukturlu bir çox funksional fəzaları tədqiq etməyə imkan verir. İsbat olunmuşdur ki, (Reyli [5]) kontinium sayda cüt-cüt müqayisə oluna bilməyən qəfəslə nizamlanmış qruplar çoxobrazlısı və müstəqil bazisə malik olmayan Z çoxobrazlıları var [6].

Bu istiqamətdə Maltsev A.İ., Tarski A., Jonson B. və Makkenzi tərəfindən (ümumi çoxobrazlılar nəzəriyyəsi və universal cəbrlər arasında dərin əlaqə olduğunu göstərən) çox mühüm elmi nəticələr alınmışdır. İntensiv elmi-tədqiqat işləri əsasən ABŞ, Kanada, Almaniya, Avstraliya, İngiltərə, Çexiya Polşa, İtaliya, Macarıstan və Yaponiyada aparılır. MBD ölkələrində bu istiqamətdə elmi-tədqiqat işləri əsasən Moskva, Kiyev, Minsk, Novosibirsk, Yekaterinburq, Alma-Ata və digər şəhərlərdə aparılır. 70-ci illərdən başlayaraq AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunda bu istiqamətdə elmi-tədqiqat işləri R.A.Bayramovun rəhbərliyi ilə aparılırdı.

Qəfəslərin çoxobrazlılar nəzəriyyəsində:

Tarski problemi. İxtiyari qəfəslər çoxobrazlısı L qəfəslər çoxobrazlısında asılı olmayan bazisə malikdir.

Makkenzi problemi. İxtiyari sonlu hündürlüklü qəfəslər çoxobrazlısı sonlu cəbr vasitəsi ilə doğrulur.

Jonson B. problemi. İxtiyari qəfəslər çoxobrazlıları V, W, $V \subset W$ və $V \neq W$ üçün [V,W] intervalında atom var.

Bu problemlərin tədqiqi mühüm əhəmiyyət daşıyır.

Bu istiqamətdə müəllif tərəfindən teorem 1 [1] isbat olunmuşdur:

Teorem 1: Fərz edək ki, E nəzəriyyəsi və $N \subset M \subset \mathrm{var}(E)$ çoxobrazlıları,

1) $[N, \mathrm{var}(E)]$ intervalı L $(\mathrm{var}(E))$ qəfəsində modulyardır.

2) M daxilində sonlu bazisə malik ixtiyari $N \subset M'$, $[N,M]$ intervalında atom var.

3) İxtiyari sonlu $M \in \mathrm{Eq}v(V)$ altçoxluğu $\mathrm{Eq}v(V)$ bir eyniliyə ekvivalentdir.

4) M daxilində N sonlu bazis vasitəsi ilə ifadə etmək olmaz.

Onda N çoxobrazlısı M daxilində sonsuz müstəqil aksiomatik bazisə malikdir.

Tarski, Makkenzi və Jonsson problemlərinin üçü də müəllif [1,3,4] tərəfindən sanki distributiv sonlu lokal qəfəslər çoxobrazlıları üçün həll edilmişdir.

Elmi-tədqiqat işi bu istiqamətdə qəfəslə nizamlanmış qrup çoxobrazlıları üçün aparılmışdır.

Zəruri olan tərifləri və teoremləri verək.

Qəfəslə nizamlanmış qrup A=$< A, \cdot, ^{-1}, e, \wedge, \vee >$ siqnaturalı elə cəbrə deyilir ki,

I. $< A, \cdot, ^{-1}, e >$ qrupdur:

1. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
2. $e \cdot a = a$,
3. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

II. A=$< A, \wedge, \vee >$ qəfəsdir:

1. $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$ –$\vee$ və $\wedge$ üçün idenpotentlik qanunu;
2. $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$ –$\vee$ və $\wedge$ üçün kommutativlik qanunu;
3. $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ - –$\vee$ və $\wedge$ üçün assosiativlik qanunu;
4. $a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$ - $\vee$ **və** $\wedge$ üçün udma qanunu.

III. Bundan başqa, qrup və qəfəs əməliyyatları üçün:

1. $u \cdot (a \vee b) \cdot q = u \cdot a \cdot q \vee u \cdot b \cdot q$
2. $u \cdot (a \wedge b) \cdot q = u \cdot a \cdot q \wedge u \cdot b \cdot q$

eyniliklikləri doğrudur.

Aksiomatikadan görünür ki, qəfəslə nizamlanmış qruplar sinfi çoxobrazlıdır.

Konqruens kommutativ çoxobrazlılar üçün Maltsev teoremi:

Teorem 2: V çoxobrazlısı üçün aşağıdakı şərtlər ekvivalentdir:

1) V konqruens kommutativdir.

2) F_V (3) qəfəslə nizamlanmış qrup konqruens kommutativdir.

3) Elə P(x,y,z) (V çoxobrazlısının siqnaturalı) termi var ki, V çoxobrazlısında:

$$P(x,z,z)=x$$
$$P(x,x,z)=z$$

eynilikləri doğrudur.

Nəticə. Qəfəslə nizamlanmış qruplar çoxobrazlısı konqruens kommutativlik xassəsinə malikdir.

İsbatı: Doğrudan da, $P(x,y,z)=x\cdot y^{-1}\cdot z$ götürsək, onda:

$$P(x,x,z)=x\cdot x^{-1}\cdot z=1\cdot z=z$$
$$P(x,z,z)=x\cdot z^{-1}\cdot z=x$$

olar.

A qəfəslə nizamlanmış qrup konqruens-modulyar (konqruens-distributiv) adlanır o vaxt ki, onun Con(*A*) qəfəsi modulyardır (distributivdir). V çoxobrazlısı konqruens modulyar (konqruens-distributiv) adlanır o vaxt ki, ona daxil olan hər bir ümumi cəbr konqruens-modulyar (konqruens-distributiv) olsun.

Teorem 3 (Konqruens-modulyar çoxobrazlılar üçün):

İxtiyari *V* çoxobrazlısı üçün aşağıdakı şərtlər ekvivalentdir:

1) *V* – konqruens modulyardır.

2) F_V (4) qəfəslə nizamlanmış qrup konqruens-modulyardır.

3) İxtiyari $A\epsilon V$ üçün və ixtiyari $a,b,c,d\epsilon A$ üçün:

$(a,d)\epsilon\theta(b,c)\vee((\theta(a,d)\vee\theta(b,c))\wedge\theta(a,b)\vee\theta(c,d))$

4) Müəyyən n natural ədədi üçün elə P_0(x,y,z,u), P_1(x,y,z,u),...,P_n(x,y,z,u) termləri var ki, P_0(x,y,z,u)=x , P_n(x,y,z,u)=u, P_i(x,y,y,x)=x ixtiyari *i* üçün

$$P_i(x,y,y,u)=P_{i+1}(x,y,y,u) \quad i \text{ – tək ədəddirsə,}$$
$$P_i(x,x,u,u)=P_{i+1}(x,x,u,u) \quad i \text{ – cüt ədəddirsə.}$$

Teorem 4 (Konqruens-distributiv çoxobrazlılar üçün Jonson B. teoremi):

İxtiyari *V* çoxobrazlısı üçün aşağıdakı şərtlər ekvivalentdir:

1) *V* – konqruens-distributivdir.

2) İxtiyari $A\epsilon V$ üçün və ixtiyari $a,b,c\epsilon A$ üçün:

$(a,c)\epsilon(\theta(a,b)\wedge\theta(a,c))\vee(\theta(b,c)\wedge\theta(a,c))$

3) F_V (3) qəfəslə nizamlanmış qrup konqruens-distributivdir.

4) Müəyyən n natural ədədi üçün elə P_0(x,y,z,), P_1(x,y,z,), ..., P_n(x,y,z,) termləri vardır ki, P_0(x,y,z,)=x , P_n(x,y,z,)=z, P_i(x,y,x)=x ixtiyari *i* üçün

$$P_i(x,x,z)=P_{i+1}(x,x,z) \quad i \text{ – cüt olduqda,}$$

P_i(x,z,z)= P_{i+1}(x,z,z) i – tək ədəd olduqda.

Əsas hissə.

Jonson B. teoremindən istifadə edərək isbat edək ki,

Teorem 5. İxtiyari qəfəslə nizamlanmış qruplar çoxobrazlısı konqruens-distributivdir.

İsbatı. n=2 götürək. Onda Jonson B. teoreminə görə, elə P_0(x,y,z,), P_1(x,y,z,), P_2(x,y,z,) termləri vardır ki, P_0(x,y,z,)=x , P_2(x,y,z)=z, P_i(x,y,x)=x i=$\overline{0,2}$

$$P_0(x,x,z)= P_1(x,x,z)$$
$$P_1(x,z,z)= P_2(x,z,z)$$

eynilikləri ödənilməlidir.

Əgər $p_0(x,y,z)=x$, $p_1(x,y,z)=((x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x))$, $p_2(x,y,z)=z$ götürsək, onda yuxarıdakı eyniklər (n=2) doğru olar.

Deməli,

Nəticə. İxtiyari qəfəslə nizamlanmış qruplar çoxobrazlısı hesabi konqruens hesabi çoxobrazlıdır.

Teorem 6. İxtiyari qəfəslə nizamlanmış qruplar çoxobrazlısı üçün əgər

$$B \in Var(K)$$

və B cəbri alt Dekart hasilə ayrılmayandırsa, onda B K sinfindən olan qəfəslə nizamlanmış qrupların ultra hasillərinin, alt cəbrlərinin homomorf obrazları sinfinə daxildir.

İsbatı. $B \in Var(K)$ və B cəbri alt Dekart hasilə ayrılmayan olduğundan Birkqof teoreminə görə,

$$B \in HSP(K)$$

Deməli, elə $H_i \in K, i \in \text{İ}$ cəbrləri B, $\prod(H_i;i\in \text{İ})$ Dekart hasilinin A alt qəfəslə nizamlanmış qrup və B də elə φ konqruensiyası var ki, $B/\varphi \cong A$.

$$J \subseteq \text{İ}\ alt\ çoxluğu\ \text{üçün}\ \psi_J:$$
$$f \equiv g(\psi_J) \leftrightarrow \text{İ}(f,g) \subseteq J.$$

$\varkappa = \{J \subseteq \text{İ}\ ;(\psi_J)_{\mathcal{B}} \subseteq \varphi\}$

Onda

1. $\dot{I} \in \varkappa$; $\emptyset \notin \varkappa$.
2. Əgər $J_0 \in \varkappa$ və $J_0 \subseteq J_1$, onda $J_1 \in \varkappa$
3. Əgər $M, N \subseteq \text{İ}$ və $M \cup N \in \varkappa$, onda $M \in \varkappa$ və ya $N \in \varkappa$

$\psi_{\text{İ}} = \omega$ və $\psi_0 = l$ olduğundan 1 xassə asanlıqla alınır.

Əgər $J_0 \subseteq J_1$, onda $\psi_{J_1} \subseteq \psi_{J_0}$ olduğundan 2 xassə doğrudur.

3-ün isbatı üçün $M, N \subseteq \text{İ}$, onda $\psi_{M\cup N} = \psi_M \cap \psi_N$

$(\psi_{M\cup N})_{\mathcal{B}} = (\psi_M)_{\mathcal{B}} \cap \psi_N)_{\mathcal{B}}$

Fərz edək ki, $M \cup N \in \varkappa$, onda

$$(\psi_{M\cup N})_{\mathcal{B}} \subseteq \varphi,$$

yəni

$$\psi_M \cap \psi_N \subseteq \varphi$$

$B\varphi$ cəbri alt Dekart hasilə ayrılmayan olduğundan, onda φ konqruensiyası $Con(B)$ qəfəsində

$(\psi_M)_B \subseteq \varphi$ və ya $(\psi_N)_B \subseteq \varphi$, onda

M və ya $N \in \varkappa$, bu isə 3 xassəsinin doğru olduğunu göstərir.

Fərz edək ki, D P(İ) qəfəsində $D\varphi$ şərtini ödəyən koidealdır və P(İ)də koideallar arasında bu xassəyə malik maksimaldır.

İsbat edək ki, D koidealı sadəddir. (1) şərtinə görə, çoxluq $\notin \varkappa$, buna görə də D koidealı məxsusidir. Əgər D sadə olmasaydı, onda elə $J \subseteq$ İ alt çoxluğu var ki, $J \notin D$ və İ\J$\notin D$. Əgər $J \cap J' \in \varkappa$ bütün $J' \in D$, onda 2 xassəsinə görə, J $\varkappa$ özündə saxlayan koidealdır. $J \notin D$ olduğundan, bu D-nin maksimal olması şərtinə ziddir.

Beləliklə, elə $J_0 \in D$ var ki, $J \cap J_0 \notin \varkappa$. Eyni qayda ilə göstərilir ki, elə $J_1 \in D$ var ki,(İ-J_1) $\cap J_1 \notin \varkappa$. Onda

$J_0 \cap J_1$=(J$\cap$($J_0 \cap J_1$)) ∪ ((İ − J)$\cap$($J_0 \cap J_1$

Bu isə 3 şərtinə ziddir. Deməli, D sadə koidealdır.

Onda B/φ qəfəslə nizamlanmış qrup $B/\theta(D)_B$ qəfəslə nizamlanmış qrupun homomorf obrazıdır. Deməli, B qəfəslə nizamlanmış qrup K sinfinin qəfəslə nizamlanmış qrupların ultra hasillərinin, alt qəfəslə nizamlanmış qrupların homomorf obrazları sinfinə daxildir. Teorem isbat olundu.

Tərif. W çoxoobrazlısı struktur lokal sonludur deyilir o vaxt ki, bu çoxoobrazlını doğuran elə {A$_i$;i∈ İ} cəbrləri olsun ki, hər var(A$_i$)-nin alt çoxobrazlılar qəfəsi sonlu olsun.

Teorem 7. W struktur sonlu aksiomatikləşdirilə bilən qəfəslə nizamlanmış qruplar çoxobrazlısıdırsa, onda onun ixtiyari alt çoxobrazlısı asılı olmayan bazisə malikdir.

İsbatı. Teorem 1 şərtlərinin ödənilməsini isbat etmək kifayətdir. Teorem 4-ə görə, W konqruens-distributiv çoxoobrazlıdır, deməli, həm də konqruens-modulyardır. İsbat edək ki, ixtiyari:

$$F(x_1,....,x_n)=Q(x_1,....,x_n) \qquad (1)$$

$$R(x_1,....,x_m)=P(x_1,....,x_m) \qquad (2)$$

eynilikləri qəfəslə nizamlanmış qruplar çoxoobrazlısında bir eyniliyə ekvivalentdir. 2 eyniliyinə daxil olan $x_1,....,x_m$ dəyişənlərini, $x_1,....,x_n$, $x_1,....,x_m$ dəyişənlər siyahısına daxil olmayan $z_1,....,z_m$ dəyişənləri ilə əvəz edib

$$F(x_1,....,x_n)\cdot R(z_1,....,z_m)= Q(x_1,....,x_n) \cdot P(z_1,....,z_m) \qquad (3)$$

eyniliyi alınar. 1 və 2-dən 3 aldıq.

Əgər (3)-də, $z_1=....=z_m=e$ götürsək, (1) eyniliyini, $x_1=....=x_n=e$ götürsək, (2) eyniliyini almış olarıq.

$$R \subset W$$

Onda elə $A_i \in W$ var ki, $A_i \notin R$ və var(A_i) alt çoxobrazlılar qəfəsi sonludur. Onda $[R, R \vee \mathrm{var}(A_i)]$ intervalında atom var. Teorem isbat olundu.

Beləliklə, struktur lokal sonlu və sonlu aksiomatikləşdirilə bilən qəfəslə nizamlanmış qruplar çoxobrazlısı üçün Tarski A. və Jonson B. problemləri müsbət həll olunmuşdur.

ƏDƏBİYYAT

1. *Байрамов Р.А.* Исследование строения клонов и близких к ним алгебр финитарных функций, избранные вопросы теории многообразий. Баку: Элм, 2005, 347 с.
2. *Джаббарзаде В.М.* О многообразиях около дистрибутивных решеток: продвижения по проблеме Тарского, Маккензи и Йонсона. Баку, 1987, АзНИИНТИ, № 827-Аз 87 (рукопись деп. 28.07.87. с последующей передачей в ВИНИТИ)
3. *Джаббарзаде В.М*. О независимой базируемости эквоциональных теорий, модальных и интуиционистских логик / V Всесоюзная конференция по математической логике, посвященная 70-летию А.И.Мальцева. Тезисы докладов, Новосибирск, 1979, с.42
4. *Копытов В.М. , Медведев Н.Я.*. Многообразия решеточно упорядоченных групп, УМН, 40:6(246), 1985, с.117-128; Russian Math
5. *Медведев Н. Я.* Z-многообразия без независимого базиса тождеств. Math, slovaca, 2016, v. 32, № 4, pp.417-425