PEDAQOJİ UNİVERSİTETİN XƏBƏRLƏRİ – 2019, C. 67, № 3, s. 17-23
ИЗВЕСТИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА – 2019, Т. 67, № 3, с. 17-23
TRANSACTIONS OF PEDAGOGICAL UNIVERSITY – 2019, V. 67, № 3, pp. 17-23

UOT 51

K.M.Cəfərov
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
dzhafarova.ofeliya@mail.ru

SIFIR SƏVİYYƏSİNDƏ SAXLAMA EKRANLI DOLAŞMA PROSESİNİN SIFIR SƏVİYYƏSİNDƏN ÇIXMA ANI İLƏ SIÇRAMANIN BOYUNUN BİRGƏ PAYLANMASI

Açar sözlər: *dolaşma prosesi, Polumarkov, gecikən arqument, eyni qanunla paylanmış*

Eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan və bir-birindən də asılı olmayan üç təsadüfi kəmiyyət ardıcıllığının cəmi vasitəsi ilə Polumarkov dolaşma prosesi düzəldilir. Alınmış prosesin staxostik inteqralı vasitəsilə sıfır səviyyəsində saxlama ekranlı gecikən arqumentli Polumarkov dolaşma prosesi alınır. Bu prosesin ilk dəfə sıfır səviyyəsindən sıçrama anı ilə sıçramanın boyunun birgə paylanması öyrənilir.

Üçüncü təsadüfi kəmiyyətin vahid qəbul olunan halına baxılır və bu prosesin ilk dəfə sıfır səviyyəsinə çatma anı ilə sıfır səviyyəsindən sıçramanın boyunun birgə paylanması tapılır.

Bu tip proseslər ehtiyatlar nəzəriyyəsində, kütləvi xidmət nəzəriyyəsində, iqtisadiyyatda və s. sahələrdə tətbiq olunur.

К.М.Джафаров

СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ПЕРВОГО СКАЧКА ИЗ НУЛЕВОГО УРОВНЯ И РОСТ СКАЧКА ПРОЦЕССА БЛУЖДАНИЯ С ЗАДЕРЖИВАЮЩИМСЯ ЭКРАНОМ НУЛЕВОГО УРОВНЯ

Ключевые слова: *процесс блуждания, полумарков, запаздывающий аргумент, одинаково распределенный*

По суммам из трех независимых, одинаково распределенных последовательностей случайных величин построен процесс с задерживающимся экраном с запаздывающим аргументом полумарковским блужданием. Изучается совместное распределение момента первого скачка из нулевого уровня и рост скачка. Процессы таких типов применяются в теории запасов, в теории массового обслуживания, в экономике и других областях.

K.M.Jafarov

THE JOINT DISTRIBUTION OF THE MOMENT OF THE FIRST JUMP FROM THE ZERO LEVEL AND THE GROWTH OF THE JUMP OF THE WANDERING PROCESS WITH THE DELAYING SCREEN OF THE ZERO LEVEL

Keywords: *the process of wandering semi-marks with a delayed argument, equally distributed*

According to the sums of three independent, equally distributed sequences of random variables, a process is constructed with a delayed screen with a delayed argument with a semi-Markov walk. The joint distribution of the moment of the first jump from the zero level and the growth of the jump are studied. Processes of these types are used in the theory of reserves, in the theory of mass service, in the economy and other fields.

Tutaq ki, eyni qanunla paylanmış bir-birindən asılı olmayan $\{\xi_n, \eta_n, \varsigma_n\}$, $n=1,2,...$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcllığı verilmişdir. Burada $P\{\xi_k > 0,\ \eta_k > 0,\ \varsigma_k > 0\} = 1,\ \ k = 1,2,...$

Bu ardıcıllıqların cəmi vasitəsilə aşağıdakı gecikən arqumentli Polumarkov dolaşma prosesi düzəldək.

$$\chi_1(t) = \begin{cases} x - t + \sum_{k=1}^{m-1}(\xi_k + \eta_k),\ Q_{m-1} \le t < Q_{m-1} + \xi_m \\ x + t + \sum_{k=1}^{m-1}(\xi_k + \eta_k),\ Q_{m-1} = \xi_m \le t \le Q_{m-1} < \xi_m \end{cases}$$

Burada $Q_m = \sum_{k=1}^{m}(\xi_k + \eta_k)$, x-gecikən arqumentli Polumarkov prosesinin başlanğıc vəziyyətidir. Bu proses müsbət sıçrayışlı, mənfi köçürməli, təsadüfi gecikən arqumentli *Polumarkov prosesi* adlanır. Bu prosesdən sıfır səviyyəində saxlama ekranlı təsadüfi proses düzəldək. Belə proses sıfır səviyyəsinə çatdıqdan sonra həmin səviyyəsində proses yeni qiymət alana qədər qalır. Bu prosesin paylanması əvvəlki prosesin paylanması ilə eyni olur, ancaq prosesin başlanğıc vəziyyəti sıfır səviyyəsindən yeni aldığı qiymətə bərabər olur. Belə $x(t)$ prosesinə aşağıdakı staxostik tənliyin həlli kimi baxmaq olar.

$$x(t) = x_1(0) + \int_0^t \varepsilon(x_1(t))dx_1(t)$$

Buradan $x > 0$ olduqda $\varepsilon(x) = 1$ olur; $x \le 0$ olduqda $\varepsilon(x) = 0$ olur. Bu proses müsbət sıçrayışlı, mənfi köçürməli təsadüfi gecikən arqumentli, sıfır səviyyəsində saxlama ekranlı Polumarkov dolaşma prosesi adlanır.

[1]-də belə prosesin müəyyən funksionalının paylanması tapılmışdır.

Bu işdə $P\{\xi_k > 1,\ k = 1,2,..\} = 1$ olan halına baxılır. Belə prosesin əhəmiyyətinə [1]-də baxılıb. Bu halda saxlama ekranlı prosesin paylanmasının təyin edilməsi ola bilsin ki, müəyyən qədər asan olsun. [1]-dəki işdən alınır ki, prosesin paylanmasını tapmaq üçün τ_x^- və γ_x^- kəmiyyətlərinin birgə paylanmasını tapmaq lazımdır. Burada τ_x^- kəmiyyəti $x(t)$ prosesinin ilk dəfə sıfır səviyyəsinə çatdıqdan sonra sıfır səviyyəsindən çıxma anıdır, $\gamma_x^- = -\chi(\tau_x^-) - \tau_x^-$ sıçramanın boyudur.

Aydındır ki, əgər $x - Q_1 > 0$, $x - Q_1 + (1 - Q_2) > 0,...$ $x - Q_1 + (1 - Q_2) + ... + (1 - Q_{n-1}) > 0,\ x - Q_1 + (1 - Q_2) + ... + (1 - Q_{n-1}) < 0,$ onda $\tau_x^- = Q_1 + Q_2 + ... + Q_n$ və $\gamma_x^- = \left(Q_1 + Q_2 + ... + Q_n\right) - (n-1) - n$ olar.

$Q_i' = Q_{i+1} - 1,\ i = 1,2,...,\qquad X_n' = Q_1' + Q_2' + ... + Q_n'$;

ν_y' və γ_y' -ilə $\{x_n'\}$ təsadüfi dolaşmanın ilk dəfə y səviyyəsini aşması anını və aşma-nın boyunu işarə edək. Onda $\tau_x^- = Q_1$, $Q_1 > x$. $\gamma_x^- = x - Q_1$, $Q_1 \ge x$. Əgər $Q_1 < x$ olsa, onda

$$\gamma_x^- = \gamma_{x-Q_1}' \ \gamma_x^- = Q_1 + Q_2 + ... + Q_{1+\nu_{x-Q_1}'} - \nu_{x-Q_1}' - x.$$

Ona görə τ_x^- və γ_x^- təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanmasını tapmaq üçün γ_y' və ν_y' təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanmasını tapmaq kifayətdir.

Aydındır ki

$$\nu_y' = \begin{cases} 1, & Q_1' > y \\ 1 + Q_{Q_1'} \cdot \nu_y', & Q_1' \le y, \end{cases}$$

$$\gamma_y' = \begin{cases} Q_1' > y, & Q_1' > y \\ Q_{Q_1'} \cdot \gamma_y', & Q_1' \le y \end{cases}$$

$B(\lambda, \mu, y) = Me^{-\lambda \nu_y' - \mu \gamma_y'}$ işarə edək. Onda ν_y' və γ_y' kəmiyyətlərinin birgə Laplas çevirməsi aşağıdakı kimi hesablanır.

$$B(\lambda, \mu, y) = Me^{-\lambda \nu_y' - \mu \gamma_y'} I_{\{Q_1' > y\}} + Me^{-\lambda \nu_y' - \mu \gamma_y'} I_{\{Q_1' \le y\}} = \int_y^\infty e^{-\lambda - \mu(z-y)} P\{Q_1' \in dz\} +$$
$$+ \int_{-\infty}^{y} e^{-\lambda} B(\lambda, \mu, y - z) P\{Q_1' \in dz\} = B(\lambda, \mu, y) + \int_{-\infty}^{y} B(\lambda, \mu, y - z)\psi\{\lambda, dz\} \tag{1}$$

Burada

$$\hat{B}(\lambda,\mu,y)=\int_y^{\infty}e^{-\lambda-\mu(z-y)}P\{Q_1'\in dz\}=e^{-\lambda+\mu y}\int_y^{\infty}e^{-\mu z}P\{Q_1'\in dz\},$$

$$\psi(\lambda,A)=-e^{-\lambda}P\{Q_1'\in A\}$$

(1) inteqral tənliyi bükülmə tipli tənlikdir. Bu tənlik ədəd oxunda [2]-də olduğu kimi həll olunur. (1) tənliyini aşağıdakı kimi yazaq:

$$\left.\begin{aligned}&\hat{B}(\lambda,\mu,y)=\int_{-\infty}^{\infty}B(\lambda,\mu,y-z)d(\varepsilon(z)-\psi(\lambda,z)),\ y>0\\&B(\lambda,\mu,y)=0,\quad y\le 0\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Tutaq ki, $\tilde{B}(\lambda,\mu,s)$ funksiyası $B(\lambda,\mu,y)$ funksiyasının Furye çevirməsi olsun. Onda

$$\tilde{B}(\lambda,\mu,s)=\frac{1}{\tilde{\mu}_2(\lambda,s)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{isz}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{B}(\lambda,\mu,z-x)d\,\mu_1(\lambda,x)dz,$$

Burada

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{isx}dx\mu_1(\lambda,x)=\tilde{\mu}_1(\lambda,S)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e^{isx}\psi^k(\lambda,dr)\right\},$$

$$\tilde{\mu}_2(\lambda,S)=\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_0^{\infty}e^{isz}\psi^k(\lambda,dz)\right.$$

$$\psi^k(\lambda,A)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{k-1}(\lambda,A-z)\psi(\lambda,dz),\ \ \psi'(\lambda,A)=\psi(A)$$

s-ə nəzərən tərs Furye çevirməsini tətbiq etsək.

$$B(\lambda,\mu,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(y)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{B}(\lambda,\mu,y-z-u)d\,\mu_2(\lambda,z)d\,\mu_2(\lambda,u),$$

Burada $\mu_2(\lambda,z)$ azalmayan funksiyadır, Furye çevirməsi ilə təyin olunur.

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{isu}d\,\mu_2(\lambda,u)=\frac{1}{\tilde{\mu}_2(\lambda,s)}$$

Tutaq ki,

$$\varphi(\lambda,z)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{izt}\psi(\lambda,dt)=e^{-\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}e^{izt}P\{1-Q_1\in dt\}=M\exp\{iz(1-Q_1)-\lambda=$$

$$=\exp\{iz-\lambda\}M\exp\{i\,zQ_1\}$$

Onda $\psi^k(\lambda, A)$ aşağıdakı bərabərlikdən təyin olunur:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{it\,z\}\psi^k(\lambda, dt) = [\varphi(\lambda, z)]^k$$

və yaxud

$$\psi^k(\lambda, A) = M\, I_{\left\{K - \sum_{j=1}^{k}\theta_j \in A\right\}} \cdot \exp\left\{iz\sum_{j=1}^{k}\theta_j\right\}.$$

Onda ümumiləşmiş $\mu_1(\lambda, dt)$ və $\mu_2(\lambda, dt)$ ölçüləri aşağıdakı münasibətdən təyin olunur.

$$\tilde{\mu}_1(\lambda, s) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\exp\{iks - k\lambda\}}{k} M\, I_{\left\{K - \sum_{j=1}^{k}\theta_j \le 0\right\}} \cdot \exp\left\{-is\sum_{j=1}^{k}\theta_j\right\}\right\}$$

$$\frac{1}{\tilde{\mu}_2(\lambda, s)} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\exp\{iks - k\lambda\}}{k} M\, I_{\left\{K - \sum_{j=1}^{k}\theta_j > 0\right\}} \cdot \exp\left\{-is\sum_{j=1}^{k}\theta_j\right\}\right\}$$

İndi τ_x^- və γ_x^- təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə Laplas çevirməsini hesablayaq:

$$M\exp\left\{-\lambda\tau_x^- - \mu\gamma_x^-\right\} = M\exp\left\{-\lambda\nu'_{x-a_1} - \lambda\gamma'_{x-a_1} - \lambda x - \mu\gamma'_{x-a_1}\right\} I_{\{Q_1 < x\}} +$$

$$+ M\exp\{-\lambda Q_1 - \mu(Q_1 - x)\} I_{\{Q_1 > x\}} = \int_x^{\infty}\exp\{-\lambda z - \mu(z - x)\} P\{Q_1 \in dz\} +$$

$$+ e^{-\lambda x}\int_0^x M\exp\left\{-\lambda\nu'_{x-z} - (\lambda + \mu)\gamma'_{x-z}\right\} P\{Q_1 \in dz\} = e^{\mu x}\int_x^{\infty}\exp\{-(\lambda + \mu)z\} P\{Q_1 \in dz\} +$$

$$+ e^{-\lambda x}\int_0^x B\{\lambda,\ \lambda + \mu,\ x - z\} P\{Q_1 \in dz\}$$

Beləliklə, τ_x^- və γ_x^- təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə Laplas çevirməsi tapılır. Laplas çevirməsi paylanma funksiyasını yeganə şəkildə təyin edir.

$\chi(t)$ prosesinin paylanmasını təyin etmək üçün aşağıdakı tənlikdən istifadə edək.

$$P\{\chi(t) < y / \chi(0) = x\} = P\left\{\chi(t) < y,\ \tau_x^- > t / \chi(0) = x\right\} +$$

$$+ P\left\{\chi(t) < y,\ \tau_x^- \le t / \chi(0) = x\right\} = P\left\{\chi(t) < y,\ \tau_x^- > t / \chi(0) = x\right\} +$$

$$+ \int_0^t P\left\{\tau_x^- \in ds / \chi(0) = x\right\} P\{\chi(t - s) < y, / \chi(0) = 1\}$$

$$E(t, y, x) = P\{\chi(t) < y / \chi(0) = x\},$$

$$\hat{E}(t,y,x)=P\{\chi(t)<y,\ \tau_x^- > t/\chi(0)=x\}$$

işarə edək. Onda alarıq.

$$E(t,y,x)=\hat{E}(t,y,x)+\int_0^t P\{\tau_x^- \in ds/\chi(0)=x\}E(t-s,y,1)\quad(3)$$

$t-$yə nəzərən Laplas çevirməsini tapaq.

$$\tilde{E}(s,y,x)=\hat{E}(s,y,x)+\tilde{E}(s,y,1)\int_0^\infty e^{-sz}P\{\tau_x^- \in dz/\chi(0)=x\}$$

Burada

$$\tilde{E}(s,y,x)=\tilde{\hat{E}}(s,y,x)+\tilde{E}(s,y,1)\int_0^\infty e^{-sz}P\{\tau_x^- \in dz/\chi(0)=x\}$$

Burada $\tilde{E}(s,y,x)=\int_0^\infty e^{-st}E(t,y,x)dt,$

$$\tilde{\hat{E}}(s,y,x)==\int_0^\infty e^{-st}\,\hat{E}(t,y,x)dt,$$

Buradan $E(t,y,x)$ funksiyasından $x=1$ olduqda Laplas çevirməsi üçün həllini taparıq.

$$\tilde{E}(s,y,x)=\left.\frac{\tilde{\hat{E}}(s,y,x)}{1-\int_0^\infty e^{-sz}P\{\tau_x^- \in dz/\chi(0)=x\}}\right|_{x=1}$$

Bu qiyməti (3) tənliyində yerinə yazsaq $\tilde{E}(s,y,x)$ ifadəsini taparıq .

$\hat{E}(t,y,x)$ paylanması aşağıdakı kimi tapılır.

$$\hat{E}(t,y,x)=P\{\chi(t)<y,\ \tau_x^- > t/\chi(0)=x\}=\{\chi(t)<y,\ \tau_x^- > t/\chi_1(t)=x\}=P\{\chi(t)<y\ /\chi(0)=x\}$$

$$-\int_0^t\int_0^\infty P\{\tau_x^- \in ds,\ \gamma_x^- \in dy/\chi(0)=x\}P\{\chi(t-s)<y,/\chi(0)=1-z\}$$

τ_x^- və γ_x^- təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanmasını bildiyimizdən $\hat{E}(t,y,x)$ paylaşmasını təyin edə bilərik .

ƏDƏBİYYAT

1. *Cəfərov K.M.* Üç təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının cəmi ilə düzəldilmiş təsadüfi prosesin tədqiqi / III Beynəlxalq Qafqaz konfransının materialları, Bakı, 2015, s.129-130
2. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. Т.2, М.: Наука, 1973, 567 с.