PEDAQOJİ UNİVERSİTETİN XƏBƏRLƏRİ – 2019, C. 67, № 3, s. 9-16
ИЗВЕСТИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА – 2019, Т. 67, № 3, с. 9-16
TRANSACTIONS OF PEDAGOGICAL UNIVERSITY – 2019, V. 67, № 3, pp. 9-16

Riyaziyyat

УДК 512

А.А.Бабаев, Л.А.Шейхзаманова
Институт математики и механики НАН Азербайджана
ali_babaev@inbox.ru

О НЕРАВЕНСТВАХ ОТНОШЕНИЙ В ТРАКТАТЕ НАСИРЕДДИНА ТУСИ «ИЗЛОЖЕНИЕ КНИГИ АРХИМЕДА «О ШАРЕ И ЦИЛИНДРЕ»

Ключевые слова: *отношения, величина, неравенства, пропорция*

В статье показаны доказательства Туси в его Изложениях к Архимеду о неравенствах между отношениями, используемых Архимедом без доказательств в его сочинении «О шаре и цилиндре», и даны идеи великого ученого об отношениях в его сочинениях «Изложение Евклида» и «Трактат о полном четырехугольнике».

Ə.Ə.Babayev, L.Ə.Şeyxzamanova

NƏSİRƏDDİN TUSİNİN "ARXİMEDİN "KÜRƏ VƏ SİLİNDR HAQQINDA" KİTABINA ŞƏRH TRAKTATI"NDA NİSBƏTLƏRİN BƏRABƏRSİZLİKLƏRİ HAQQINDA

Açar sözlər: *nisbətlər, kəmiyyət, bərabərsizliklər, tənasüb*

Məqalədə N.Tusinin Arximedin "Kürə və silindr" əsərinə yazdığı şərhdə Arximedin istifadə etdiyi bərabərsizliklərin Tusi tərəfindən isbat edilməsi göstərilmiş və dahi alimin "Evklidin şərhi" və "Tam dördtərəfli haqqında traktat" əsərlərində nisbətlər haqqında fikirləri verilmişdir.

A.A.Babaev, L.A.Sheykhzamanova

ON THE INEQUALITIES FOR RATIOS IN THE TREATISE OF NASIREDDIN TUSI "COMMENTS TO "SPHERE AND CYLINDER" OF ARCHIMED"

Keywords: *ratio, quantitative, inequality, proportion*

The article presents the results of restoration and investigation of proofs for the properties of inequalities for ratios given N.Tusi in this treatise "Comments to "Sphere and cylinder" of Archimed". These inequalities were used by Archimed in his treatise

without proofs. This is an addition to development of Tusi theory of ratios, that he is done in his works “Comment of Euclid” and “Treatise on the full quadrilateral”.

Насиреддин Туси в своих трудах «Изложение Евклида» [1], «Трактат о полном четырехстороннике» [2] большое внимание уделяет теории отношений.

В [3] Ф.А.Касумханов приводит определение величины, данное Н.Туси: «В начале книги VII второй редакции «Изложения Евклида» Насирэдина Туси дает следующее определение величины: «Величина есть то, что делимо и обладает частями. Если ее части всегда имеют общие границы, она есть непрерывная величина, в противном случае она есть дискретная величина». Н.Туси переносит представление отношения величин в виде непрерывной дроби в само определение отношения величин. Н.Туси связывает теорию отношений непрерывных величин и теорию числовых отношений. В начале книги V второй редакции «Изложения Евклида» Н.Туси говорит: «Если одна величина измеряет другую один раз, – это равенство, если несколько раз без остатка, то по отношению измеряемого к измеряющему – это доля, а если взять наоборот – это кратное. Если же есть остаток, мы измеряем вторую величину им и то же со всеми предыдущими и последующими остатками. Если это кончается на одном остатке каждая из двух величин в точности является кратным одной величине, измеряющей их, тогда величины называются соизмеримыми. Если не кончается, то они несоизмеримы, т.е. одна из них не равна другой и нет третьей, которая их измеряет»».

И.О.Лютер в работе «Комментарии Ибн-ал-Хайсама к общему определению отношения Евклида» [4] отмечает, что определение отношения как «сущности меры» встречается в обработке «Начал» Евклида Туси [1]. Великий ученый в своей редакции пятой книги «Начал» определяет отношение двух величин как «сущность меры одной из двух однородных величин относительно другой», «Отношение есть любая мера одной из двух однородных величин в другой».

В «Трактате о полном четырехстороннике» [2] Н.Туси сравнивает теорию отношений непрерывных и дискретных величин: «Так же как мы познаем полностью раздельную величину только сравнивая ее с непрерывной величиной, которая предполагается разлагаемой до бесконечности, так же мы можем познать полностью непрерывную величину только сравнивая ее с раздельной величиной, предполагая, что эта величина состоит из величин, являющихся единицами, измеряющими эти величины». Затем он определяет понятие положительного действительного числа через отношение однородных непрерывных величин: «поэтому каждое из этих отношений может быть названо числом, измеряемых единицей, так же как предшествующий член отношения измеряется последующим членом».

Н.Туси в своих «Комментариях к трактату Архимеда «О шаре и цилиндре»» [5], оставаясь верным своим принципам, доказывает некоторые теоремы о неравенствах между отношениями, используемы Архимедом без доказательства.

а) Если

$\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$, то обратное отношение $\frac{B}{A} < \frac{D}{C}$. Возьмем $\frac{C}{D} = \frac{A}{X}$, тогда

$$\frac{A}{B} > \frac{A}{X} \text{ и } X > B.$$

Разделим обе части последнего неравенства на A

$$\frac{B}{A} < \frac{X}{A} = \frac{D}{C},$$

т.е. $\frac{B}{A} < \frac{D}{C}$, что и требовалось доказать.

б) Если $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$, то $\frac{A}{C} > \frac{B}{D}$

$$\begin{array}{ccc} B| & & |A \\ & X| & \\ D| & & |C \end{array}$$

Рис.1

Пусть $\frac{X}{B} = \frac{C}{D}$, взяв отношение $\frac{X}{C}$, имеем $\frac{X}{C} = \frac{B}{D}$, $\frac{A}{B} > \frac{C}{D} = \frac{X}{B}$, $\frac{A}{B} > \frac{X}{B}$, и $A > X$. Из $A > X$ следует неравенств $\frac{A}{C} > \frac{X}{C}$, то есть $\frac{A}{C} > \frac{B}{D}$ (рис. 1).

в) Если $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$, то $\frac{A+B}{B} > \frac{C+D}{D}$

Это вследствие того, что, как и показано выше

$$A > X .$$

Тогда сумма

$$A+B > X+B \text{ и } \frac{A+B}{B} > \frac{X+B}{B},$$

возьмем $\frac{X+B}{B} = \frac{C+D}{D}$ то есть,

$$\frac{A+B}{B} > \frac{C+D}{D}.$$

г)Если $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$, то $A \times D > C \times B$. Потому, что берём $\frac{X}{B} = \frac{C}{D}$, $X \times D = C \times B$

и из $A > X$ следует

$$A \times D > X \times D = C \times B$$

В пунктах а), б), в), г) Н. Туси получил из неравенства $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ производные неравенства.

Схожая техника доказательств соотношений между отношениями содержится в «Комментариях к трудным постулатам книги Евклида» [6] Омара Хайама (1048-1131). «Если отношение A к B меньше отношения C к D

$$\frac{A}{B} < \frac{C}{D},$$

то предположим, что A относится к B, как C к E

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{E},$$

и поэтому отношение C к E меньше отношения C к D, и E больше D».

При доказательстве Насиреддином Туси неравенств отношений применяется следующая теорема О. Хайама.

Теорема. Дано отношение A к B и дана величина C. Необходимо существует такая другая величина D, что C относится к ней, как A к B.

Доказательство. Для удвоения величин и для деления их пополам нет ограничения, и их можно удваивать до бесконечности и точно также их можно до бесконечности делить пополам. Поэтому необходимо существует такая очень большая величина, что отношение C к ней меньше отношения A к B, пусть это будет E

$$\frac{C}{E} < \frac{A}{B}.$$

Точно также необходимо существует такая очень малая величина, что отношение C к ней больше отношения A к B, пусть это будет G

$$\frac{C}{G} > \frac{A}{B}.$$

Так как делимость величин бесконечна между E и G, необходимо существует такая величина, что C относится к ней, как A к B, и для этого нет никаких препятствий, так как можно отнять от E или прибавить к G все что угодно, пусть это будет D

$$G < D < E,$$

$$\frac{C}{D} = \frac{A}{B}.$$

Это и есть то, что мы хотели доказать.

д)

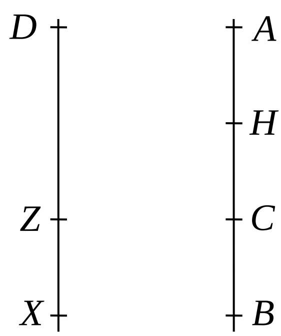

Рис.2

Пусть

$$\frac{AB}{BC} > \frac{DX}{XZ}.$$

Требуется доказать, что

$$\frac{AC}{CB} > \frac{DZ}{ZX}.$$

Пусть

$$\frac{HB}{BC} = \frac{DX}{ZX}.$$

Если сгруппировать, имеем равенство

$$\frac{HC}{CB} = \frac{DZ}{ZX}$$

Здесь Н.Туси пользуется теоремой «о пропорциональных отрезках», которая доказывается в [6].

$$AC > HC$$

$$\frac{AC}{CB} > \frac{HC}{CB} = \frac{DZ}{ZX}, \quad \text{т.е. } \frac{AC}{CB} > \frac{DZ}{ZX},$$

что и мы хотели доказать.

е)

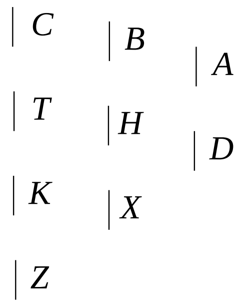

Рис. 3

Пусть отношение A к B больше отношения D к X

$$\frac{A}{B} > \frac{D}{X}.$$

Тогда двойное отношение A к B больше двойного отношения D к X

$$\frac{A}{C} > \frac{D}{Z}$$

Доказательство:

$\begin{cases} A, H, K \\ D, X, Z \end{cases}$ - пропорциональные величины.

Пусть

$$\frac{A}{H} = \frac{D}{X} \qquad (1)$$

Пусть

$$\frac{A}{B} > \frac{A}{H} \text{ и } B < H \qquad (2)$$

Пусть

$$\frac{B}{T}=\frac{X}{Z} \text{ и } \frac{B}{C}>\frac{B}{T} \text{ и } C<T \tag{3}$$

Пусть

$$\frac{B}{T}=\frac{H}{K} \tag{4}$$

Отношение A к C, другими словами, двойное отношение A к B, больше отношения A к K, но A к K равно отношению D к Z. С другой стороны D к Z есть двойное отношение D к X:
Ввиду (2), (3), (4)

$$\frac{A}{C}=\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{C}>\frac{A}{H}\cdot\frac{H}{K}=\frac{A}{K}=\frac{D}{Z}=\frac{D}{X}\cdot\frac{X}{Z}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{A}{C}>\frac{D}{Z}.$$

ж) Пусть прямая AB в точке C разделена пополам, а в точках D и X разделена на части. D ближе к C, чем X к C. Н.Туси доказал, что площадь $AD\times DB$ меньше площади квадрата $AC\times AC$

$$AD\times DB<AC\times AC,$$

потому что, разность между $AC\times AC$ и $AD\times DB$ есть левый нижний квадрат $DC\times DC$. По условию $CA=CF,\ AG=BD,\ FJ=CD$ (Рис.4)

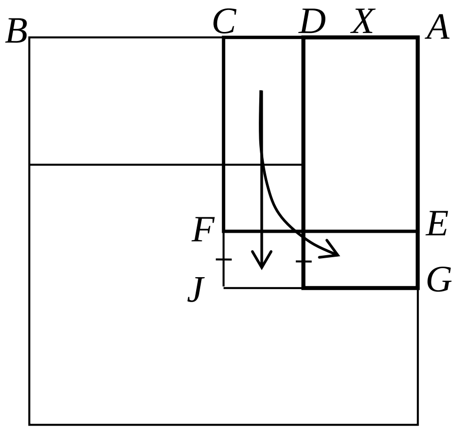

Рис.4

Площадь $AD\times DB$ больше площади $AX\times XB$

По условию, $XQ=XB,\ DR=DB$. Утверждение $AD\times DB$ больше площади $AX\times XB$ непосредственно вытекает из сравнения площадей $AXQP$ и $ADRT$ на рис.5.

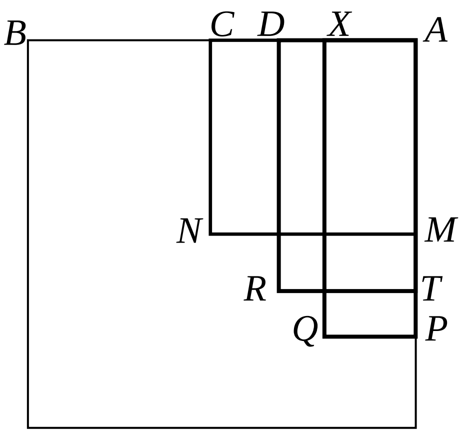

Рис.5

В конце Введения к трактату Н.Туси пишет: «Таким образом я объяснил некоторые положения, в которых нуждается книга».

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики – **Грант № EİF/ MQM/ Elm-Təhsil-1-2016-1(26)-71/11/5.**

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tusi N.* Təhriri Öqlidis. Bakı, 2001
2. *Туси Н.* Трактат о полном четырехстороннике. Баку, 1952
3. *Касумханов Ф.А.* Теория непрерывных величин и учение о числе в работах Мухаммеда Насирэддина Туси // Труды института истории естествознания и техники, Т.1, 1954, с.128-145
4. *Лютер И.О.* Комментарии Ибн-ал-Хайсама к общему определению отношения Евклида // Вестник Пермского Университета, 2018, вып. 1(140), с.62-68
5. *Туси Н.* Тахрир китаб аль-кура валь-устувана ли-Аршимедис (на арабском языке). Хейдарабад, 1940
6. *Хайам О.* Комментарии к трудным постулатам книги Евклида: трактат в 3-х кн., II книга. Об отношении, пропорции и их истинном смысле / Историко-матем. исследования, Т.6, Москва, 1953, с.85-101