PEDAQOJİ UNİVERSİTETİN XƏBƏRLƏRİ – 2019, C. 67, № 3, s. 24-36
ИЗВЕСТИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА – 2019, Т. 67, № 3, с. 24-36
TRANSACTIONS OF PEDAGOGICAL UNIVERSITY – 2019, V. 67, № 3, pp. 24-36

УДК 517.95

Ф.Х.Ализаде
Бакинский государственный университет
farxad@gmail.com

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ И ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЯМИ

Ключевые слова: *обратная краевая задача, уравнения Буссинеска, метод Фурье, классическое решение*

Исследуется обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвёртого порядка с периодическим и интегральным условиями. Задача рассматривается в прямоугольной области. При решении исходной обратной краевой задачи осуществляется переход от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной обратной задаче. С помощью принципа сжатых отображений доказываются существование и единственность решения вспомогательной задачи. Затем вновь производится переход к исходной обратной задаче, в результате делается вывод о разрешимости исходной обратной задаче.

F.H.Əlizadə

PERİODİK VƏ İNTEQRAL ŞƏRTLİ DÖRD TƏRTİBLİ BİR BUSSİNESK TƏNLİYİ ÜÇÜN TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

Açar sözlər: *tərs sərhəd məsələsi, Bussinesk tənliyi, Furye metodu, klassik həll*

Periodik və inteqral şərtli dörd tərtibli bir Bussinesk tənliyi üçün tərs sərhəd məsələsi tədqiq olunur. Məsələyə düzbucaqlı oblastda baxılır. Verilmiş tərs sərhəd məsələsinin həlli köməkçi tərs məsələyə gətirilir. Sıxılmış inikas prinsipinin köməyi ilə köməkçi məsələnin həllinin varlıq və yeganəliyi isbat olunur. Daha sonra isə verilmiş tərs məsələnin həllinin varlıq və yeganəliyi isbat olunur.

F.Kh.Alizadeh

INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FOURTH-ORDER BOUSSINESQ EQUATION WITH PERIODIC AND INTEGRAL CONDITIONS

Keywords: *inverse boundary value problem, Boussinesq equation, Fourier method, classical solution*

An inverse boundary value problem for a fourth-order Boussinesq equation with periodic and integral conditionsis is investigated. The problem is considered in a rectangular domain. To investigate the solvability of the inverse problem, we perform a conversion from the original problem to some auxiliary inverse problem with trivial boundary conditions. By the contraction mapping principle we prove the existence and uniqueness of solutions of the auxiliary problem. Then we make a conversion to the stated problem again and, as a result, we obtain the solvability of the inverse problem.

1. Введение

В настоящее время теория нелокальных задач интенсивно развивается и представляет собой важный раздел теории дифференциальных уравнений с частными производными. Большой интерес в этой области представляют задачи с нелокальными интегральными условиями. Появление интегральных условий связно с тем, что при изучении некоторых физических процессов границы областей их протекания могут оказаться недоступными для непосредственных измерений, но известно среднее значение искомых величин. Условия такого вида могут появиться при математическом моделировании явлений, связанных с физикой плазмы [1], распространением тепла [2; 3], процессом влагопереноса в капилярно-пористых средах [4], вопросами демографии и математической биологии.

В последнее время уделяется большое внимание изучению различных нелинейных эволюционных уравнений, описывающих волновые процессы в средах с дисперсией. Одним из них является уравнение Буссинеска, выведенное автором в [5] и описывающее распространение длинных волн на мелкой воде. Это уравнение интересно как с физической, так и с математической точки зрения.

Обратными задачами для дифференциальных уравнений принято называть задачи определения дифференциальных уравнений по дополнительной информации об их решениях.

Целью данной работы является доказательство единственности и существования решений обратной краевой задачи для одного уравнения Буссинеска четвёртого порядка с периодическим и интегральным условием.

2. Постановка задачи и её сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим для уравнения [5].

$$u_{tt}(x,t)-2\alpha u_{txx}(x,t)+\beta u_{xxxx}(x,t)=a(t)u(x,t)+b(t)g(x,t)+f(x,t) \qquad (1)$$

в области $D_T=\{(x,t):\ 0\le x\le 1,\ 0\le t\le T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x)\ (0\le x\le 1), \qquad (2)$$

периодическими условиями

$$u(0,t)=u(1,t), u_x(0,t)=u_x(1,t), u_{xx}(0,t)=u_{xx}(1,t)\ (0\le t\le T), \qquad (3)$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t)dx=0 \quad (0\le t\le T) \qquad (4)$$

и с дополнительным условием

$$u(x_i,t)=h_i(t)\ \ (,0<x_i<1,\ i=1,2,\quad x_1\ne x_2,\ 0\le t\le T), \qquad (5)$$

где $x_0\in(0,1)$- фиксированное число, $\alpha>0, \beta>\alpha^2$ заданные числа , $f(x,t)$, $g(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(t)$ - заданные функции, а $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$ - искомые функции.

Обозначим

$$\tilde{C}^{(4,2)}(D_T)=\{u(x,t): u(x,t)\in C^2(D_T), u_{txx}(x,t), u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t)\in C(D_T)\}.$$

Определение. Тройку $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ функций $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$, будем называть классическим решением обратной краевой задачи (1)-(5), если $u(x,t)\in\tilde{C}^{(4,2)}(D_T)$, $a(t)\in C[0,T]$, $b(t)\in C[0,T]$ и $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ удовлетворяет (1)-(5) в обычном смысле.

Аналогично [6]. доказывается следующая

Лемма 1. Пусть $f(x,t)\in C(D_T), \varphi(x),\psi(x)\in C[0,1]$, $h_i(t)\in C^2[0,T]\ (i=1,2)$, $h(t)=h_1(t)g(x_2,t)-h_2(t)g(x_1,t)\ne 0$,

$$\int_0^1 f(x,t)dx=0, \int_0^1 g(x,t)dx=0 \qquad (0\le t\le T),\quad \int_0^1\varphi(x)dx=0,\quad \int_0^1\psi(x)dx=0,$$

$$\varphi(x_i)=h_i(0),\ \psi(x_i)=h_i'(0)\ (i=1,2).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(5) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t)\in\tilde{C}^{(4,2)}(D_T)$, $a(t)\in C[0,T]$, $b(t)\in C[0,T]$, из (1)-(3) и

$$u_{xxx}(0,t)=u_{xxx}(1,t)\ (0\le t\le T), \qquad (6)$$

$$a(t)h_i(t)+b(t)g(x_i,t)+f(x_i,t)=h_i''(t)-2\alpha u_{txx}(x_i,t)+\beta u_{xxxx}(x_i,t)\quad (i=1,2;\ 0\le t\le T). (7)$$

3. Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Известно [7], что система

$$1, \cos\lambda_1 x, \sin\lambda_1 x, \ldots, \cos\lambda_k x, \sin\lambda_k x, \ldots \tag{8}$$

образует базис в $L_2(0,1)$, где $\lambda_k = 2k\pi \ (k = 1,2,\ldots)$.

Так как система (8) образует базис в $L_2(0,1)$, то очевидно, что для каждого классического решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(3),(6),(7) его первая компонента $u(x,t)$ имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t)\cos\lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t)\sin\lambda_k x \quad (\lambda_k = 2\pi k), \tag{9}$$

где

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x,t)dx, u_{1k}(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx \ (k = 1,2,\ldots),$$

$$u_{2k}(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx \ (k = 1,2,\ldots).$$

Применяя формальную схему метода Фурье, для определения искомых коэффициентов $u_{1k}(t) \ (k = 0,1,\ldots)$ и $u_{2k}(t) \ (k = 1,2,\ldots)$ функции $u(x,t)$, из (1) и (2) получаем:

$$u''_{10}(t) = F_{10}(t;u,a,b) \ (0 \le t \le T), \tag{10}$$

$$u''_{1k}(t) + 2\alpha\lambda_k^2 u'_{1k}(t) + \beta\lambda_k^4 u_{1k}(t) = F_{1k}(t;u,a,b) \ (k = 1,2,\ldots; 0 \le t \le T), \tag{11}$$

$$u_{1k}(0) = \varphi_{1k}, \ \ u'_{1k}(0) = \psi_{1k} \quad (k = 0,1,\ldots), \tag{12}$$

$$u''_{2k}(t) + 2\alpha\lambda_k^2 u'_{2k}(t) + \beta\lambda_k^4 u_{2k}(t) = F_{2k}(t;u,a,b) \ (k = 1,2,\ldots; 0 \le t \le T), \tag{13}$$

$$u_{2k}(0) = \varphi_{2k}, \ \ u'_{2k}(0) = \psi_{2k} \quad (k = 1,2,\ldots), \tag{14}$$

где

$$F_{1k}(t;u,a,b) = a(t)u_{1k}(t) + b(t)g_{1k}(t) + f_{1k}(t), \quad (k = 0,1,\ldots),$$

$$f_{10}(t) = \int_0^1 f(x,t)dx, \ f_{1k}(t) = 2\int_0^1 f(x,t)\cos\lambda_k x dx \ (k = 1,2,\ldots),$$

$$g_{10}(t) = \int_0^1 g(x,t)dx, \ g_{1k}(t) = 2\int_0^1 g(x,t)\cos\lambda_k x dx \ (k = 1,2,\ldots),$$

$$\varphi_{10} = \int_0^1 \varphi(x)dx, \ \psi_{10} = \int_0^1 \psi(x)dx, \ \varphi_{1k} = 2\int_0^1 \varphi(x)\cos\lambda_k x dx,$$

$$\psi_{1k} = 2\int_0^1 \psi(x)\cos\lambda_k x dx \quad (k = 1,2,\ldots)$$

$$F_{2k}(t;u,a,b)=a(t)u_{2k}(t)+b(t)g_{2k}(t)+f_{2k}(t)\ \ (k=1,2,...),$$

$$f_{2k}(t)=2\int_0^1 f(x,t)\sin\lambda_k x dx\,,\ g_{2k}(t)=2\int_0^1 g(x,t)\sin\lambda_k x dx\ \ (k=1,2,...)\,,$$

$$\varphi_{2k}=2\int_0^1 \varphi(x)\sin\lambda_k x dx,\ \psi_{2k}=2\int_0^1 \psi(x)\sin\lambda_k x dx\ \ (k=1,2,\ldots).$$

Далее, из (10)-(14) находим:

$$u_{10}(t)=\varphi_{10}+t\psi_{10}+\int_0^t (t-\tau)F_{10}(\tau;u,a,b)d\tau\ \ (0\le t\le T)\ , \quad (15)$$

$$u_{ik}(t)=e^{\alpha_k t}\left[\left(\cos\beta_k t-\frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t\right)\varphi_{ik}+\frac{\psi_{ik}}{\beta_k}\sin\beta_k t\right]+$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_{ik}(\tau;u,a,b)\sin\beta_k(t-\tau)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau \qquad (i=1,2;\ k=1,2,\ldots;\ 0\le t\le T)\,, \quad (16)$$

где

$$\alpha_k=-\alpha\lambda_k^2,\ \beta_k=\lambda_k^2\sqrt{\beta-\alpha^{2.}}\ .$$

После подстановки выражений $u_{1k}(t)\ (k=0,1,\ldots)$ и $u_{2k}(t)\ (k=1,2,\ldots)$ в (9), для определения компоненты $u(x,t)$ классического решения $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ задачи (1)-(3),(6),(7) получаем:

$$u(x,t)=\varphi_{10}+t\psi_{10}+\int_0^t (t-\tau)F_{10}(\tau;u,a,b)d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left\{e^{\alpha_k t}\left[\left(\cos\beta_k t-\frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t\right)\varphi_{1k}+\frac{\psi_{1k}}{\beta_k}\sin\beta_k t\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_{1k}(\tau;u,a,b)\sin\beta_k(t-\tau)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau\right\}\cos\lambda_k x+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{e^{\alpha_k t}\left[\left(\cos\beta_k t-\frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t\right)\varphi_{2k}+\frac{\psi_{2k}}{\beta_k}\sin\beta_k t\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_{2k}(\tau;u,a,b)\sin\beta_k(t-\tau)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau\right\}\sin\lambda_k x\,. \quad (17)$$

Теперь, из (7), с учетом (16), имеем:

$$a(t)=[h(t)]^{-1}\{g(x_2,t)(h_1''(t)-f(x_1,t))-g(x_1,t)(h_2''(t)-f(x_2,t))+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left(2\alpha u_{1k}'(t)+\beta\lambda_k^2 u_{1k}(t)\right)\left(g(x_2,t)\cos\lambda_k x_1-g(x_1,t)\cos\lambda_k x_2\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left(2\alpha u_{2k}'(t)+\beta\lambda_k^2 u_{2k}(t)\right)\left(g(x_2,t)\sin\lambda_k x_1-g(x_1,t)\sin\lambda_k x_2\right)\Big\}\ , \qquad (18)$$

$$b(t)=[h(t)]^{-1}\{h_1(t)\left(h_2''(t)-f(x_2,t)\right)-h_2(t)\left(h_1''(t)-f(x_1,t)\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left(2\alpha u_{1k}'(t)+\beta\lambda_k^2 u_{1k}(t)\right)\left(h_1(t)\cos\lambda_k x_2-h_2(t)\cos\lambda_k x_1\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left(2\alpha u_{2k}'(t)+\beta\lambda_k^2 u_{2k}(t)\right)\left(h_1(t)\sin\lambda_k x_2-h_2(t)\sin\lambda_k x_1\right)\Big\}\ . \qquad (19)$$

где

$$h(t)=h_1(t)g(x_2,t)-h_2(t)g(x_1,t)\neq 0,$$

Дифференцируя (16) получим:

$$u_{ik}'(t)=e^{\alpha_k t}\left[-\frac{1}{\beta_k}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\varphi_{ik}\sin\beta_k t+\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t+\cos\beta_k t\right)\psi_{ik}\right]+$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_{ik}(\tau;u,a,b)\left(\alpha_k\sin\beta_k(t-\tau)+\beta_k\cos\beta_k(t-\tau)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau (i=1,2;\ 0\le t\le T). \quad (20)$$

Далее, из (16) и (20), получаем:

$$2\alpha u_{ik}'(t)+\beta\lambda_k^2 u_{ik}(t)=e^{\alpha_k t}\left[\left(\beta\lambda_k^2\cos\beta_k t-\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2\alpha_k+2\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\right)\varphi_{ik}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2+2\alpha\alpha_k\right)\sin\beta_k t+2\alpha\cos\beta_k t\right)\psi_{ik}\right]+$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_{ik}(\tau;u,a,b)\left(\left(2\alpha\alpha_k+\beta\lambda_k^2\right)\sin\beta_k(t-\tau)+2\alpha\beta_k\cos\beta_k(t-\tau)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau\Big\}. (21)$$

Тогда из (18), (19) с учетом (27), соответственно находим:

$$a(t)=[h(t)]^{-1}\{g(x_2,t)\left(h_1''(t)-f(x_1,t)\right)-g(x_1,t)\left(h_2''(t)-f(x_2,t)\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left\{e^{\alpha_k t}\left[\left(\beta\lambda_k^2\cos\beta_k t-\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2\alpha_k+2\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\right)\varphi_{1k}+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2+2\alpha\alpha_k\right)\sin\beta_k t+2\alpha\cos\beta_k t\right)\psi_{1k}\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_{1k}(\tau;u,a,b)\left(\left(2\alpha\alpha_k+\beta\lambda_k^2\right)\sin\beta_k(t-\tau)+2\alpha\beta_k\cos\beta_k(t-\tau)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau\right\}\times$$

$$\times\left(g(x_2,t)\cos\lambda_k x_1-g(x_1,t)\cos\lambda_k x_2\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left\{e^{\alpha_k t}\left[\left(\beta\lambda_k^2\cos\beta_k t-\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2\alpha_k+2\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\right)\varphi_{1k}+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2+2\alpha\alpha_k\right)\sin\beta_k t+2\alpha\cos\beta_k t\right)\psi_{1k}\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_{1k}(\tau;u,a,b)\left(\left(2\alpha\alpha_k+\beta\lambda_k^2\right)\sin\beta_k(t-\tau)+2\alpha\beta_k\cos\beta_k(t-\tau)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau\right\}\times$$

$$\times\left(g(x_2,t)\sin\lambda_k x_1-g(x_1,t)\sin\lambda_k x_2\right)\}, \qquad (22)$$

$$b(t)=\left[h(t)\right]^{-1}\{h_1(t)\left(h_2''(t)-f(x_2,t)\right)-h_2(t)\left(h_1''(t)-f(x_1,t)\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left\{e^{\alpha_k t}\left[\left(\beta\lambda_k^2\cos\beta_k t-\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2\alpha_k+2\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\right)\varphi_{1k}+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2+2\alpha\alpha_k\right)\sin\beta_k t+2\alpha\cos\beta_k t\right)\psi_{1k}\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_{1k}(\tau;u,a)\left(\left(2\alpha\alpha_k+\beta\lambda_k^2\right)\sin\beta_k(t-\tau)+2\alpha\beta_k\cos\beta_k(t-\tau)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau\right\}\times$$

$$\times\left(h_1(t)\cos\lambda_k x_2-h_2(t)\cos\lambda_k x_1\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left\{e^{\alpha_k t}\left[\left(\beta\lambda_k^2\cos\beta_k t-\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2\alpha_k+2\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\right)\varphi_{1k}+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2+2\alpha\alpha_k\right)\sin\beta_k t+2\alpha\cos\beta_k t\right)\psi_{1k}\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_{1k}(\tau;u,a)\left(\left(2\alpha\alpha_k+\beta\lambda_k^2\right)\sin\beta_k(t-\tau)+2\alpha\beta_k\cos\beta_k(t-\tau)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau\right\}\times$$

$$\times\left(h_1(t)\sin\lambda_k x_2-h_2(t)\sin\lambda_k x_1\right)\}. \qquad (23)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3),(6),(7) сведено к решению системы (17), (22) ,(23) относительно неизвестных функций $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1)-(3),(6),(7) важную роль играет следующая

Лемма 2. Если $\{u(x,t),a(t)\}$ - любое решение задачи (1)-(3),(6) ,(7), то функции

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x,t)dx, u_{1k}(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx \quad (k = 1,2,\ldots),$$

$$u_{2k}(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx \quad (k = 1,2,\ldots)$$

удовлетворяют системе (15), (16).

Замечание. Из леммы 2 следует, что для доказательства единственности решения задачи (1)-(3), (6), (7) достаточно доказать единственность решения системы (17), (22) ,(23).

Теперь рассмотрим следующие пространства:

Обозначим через $B_{2,T}^5$ [8], совокупность всех функций вида

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t)\cos\lambda_k x + \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k}(t)\sin\lambda_k x \quad (\lambda_k = 2\pi k),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_{1k}(t)$ $(k = 0,1,\ldots)$ и $u_{2k}(t)$ $(k = 1,2,\ldots)$непрерывна на $[0,T]$ и

$$J_T(u) \equiv \|u_{10}(t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5 \|u_{1k}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5 \|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} = J_T(u).$$

Через E_T^5 обозначим пространство $B_{2,T}^5 \times C[0,T] \times C[0,T]$ вектор-функций $z(x,t) = \{u(x.t), a(t), b(t)\}$ с нормой

$$\|z\|_{E_T^5} = \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + \|a(t)\|_{C[0,T]} + \|b(t)\|_{C[0,T]}.$$

Очевидно, что $B_{2,T}^5$ и E_T^5 являются банаховыми пространствами.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^5 оператор

$$\Phi(u,a,b) = \{\Phi_1(u,a,b), \Phi_2(u,a,b), \Phi_3(u,a,b)\},$$

где

$$\Phi_1(u,a,b) = \tilde{u}(x,t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty}\tilde{u}_{1k}(t)\cos\lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{u}_{2k}(t)\sin\lambda_k x,$$

$$\Phi_2(u,a,b) = \tilde{a}(t), \Phi_3(u,a,b) = \tilde{b}(t),$$

где $\tilde{u}_{10}(t)$, $\tilde{u}_{ik}(t)$ $(i = 1,2;\ k = 1,2,\ldots)$, $\tilde{a}(t)$ и $\tilde{b}(t)$ равны соответственно правым частям (15), (16), (22) и (23).

Очевидно, что

$$\left|\cos\beta_k t - \frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t\right| \le 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} \equiv \varepsilon_1,\ \left|\frac{1}{\beta_k}\sin\beta_k t\right| \le \frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha^2}}\frac{1}{\lambda_k^2} \equiv \varepsilon_2\frac{1}{\lambda_k^2},$$

$$\left|\beta\lambda_k^2\cos\beta_k t-\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2\alpha_k+2\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\right|\le\left(\frac{3\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}+1\right)\beta\lambda_k^2\equiv\varepsilon_3\lambda_k^2,$$

$$\left|\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2+2\alpha\alpha_k\right)\sin\beta_k t+2\alpha\cos\beta_k t\right|\le\frac{\beta+2\alpha^2}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}+2\alpha\equiv\varepsilon_4.$$

$$\frac{1}{\beta_k}\left|\left(2\alpha\alpha_k+\beta\lambda_k^2\right)\sin\beta_k(t-\tau)+2\alpha\beta_k\cos\beta_k(t-\tau)\right|\le\varepsilon_4.$$

Тогда с помощью нетрудных преобразований находим:

$$\left\|\tilde{u}_{10}(t)\right\|_{C[0,T]}\le|\varphi_{10}|+T|\psi_{10}|+T\sqrt{T}\left(\int_0^T|f_{10}(\tau)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+T^2\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u_{10}(t)\|_{C[0,T]}+T^2\|b(t)\|_{C[0,T]}\|g_{10}(t)\|_{C[0,T]}\ ,\qquad(24)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|\tilde{u}_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{5}\varepsilon_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5|\varphi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{5}\varepsilon_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\psi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\varepsilon_1\sqrt{5T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|f_{ik}(\tau)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{5}\varepsilon_1T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\varepsilon_1\sqrt{5T}\|b(t)\|_{C[0,T]}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|g_{ik}(\tau)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\ (i=1,2)\ ,\qquad(25)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\le\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\Big\{\left\|g(x_2,t)\left(h_1''(t)-f(x_1,t)\right)-g(x_1,t)\left(h_2''(t)-f(x_2,t)\right)\right\|_{C[0,T]}+$$
$$+\left\||g(x_2,t)|+|g(x_1,t)|\right\|_{C[0,T]}\left[\frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_3\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5|\varphi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_4\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\psi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$+\frac{\sqrt{6T}}{12}\varepsilon_4\sum_{i=1}^{2}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|f_{ik}(\tau)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_4T\|a(t)\|_{C[0,T]}\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$\left.+\frac{\sqrt{6T}}{12}\varepsilon_4\|b(t)\|_{C[0,T]}\sum_{i=1}^{2}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|g_{ik}(\tau)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\right]\Bigg\}\ ,\qquad(26)$$

$$\left\|\tilde{b}(t)\right\|_{C[0,T]} \le \left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]} \left\{ \left\| h_1(t)\left(h_2''(t) - f(x_2,t)\right) - h_2(t)\left(h_1''(t) - f(x_1,t)\right)\right\|_{C[0,T]} + \right.$$

$$+ \left\| |h_2(,t)| + |h_1(t)| \right\|_{C[0,T]} \left[\frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon_3 \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon_4 \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$+ \frac{\sqrt{6T}}{12} \varepsilon_4 \sum_{i=1}^{2} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 | f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon_4 T \|a(t)\|_{C[0,T]} \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\left.\left. + \frac{\sqrt{6T}}{12} \varepsilon_4 \|b(t)\|_{C[0,T]} \sum_{i=1}^{2} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |g_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} . \qquad (27)$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3),(6) ,(7) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x) \in C^4[0,1], \varphi^{(5)}(x) \in L_2(0,1)$ и
$\varphi(0) = \varphi(1), \varphi'(0) = \varphi'(1), \varphi''(0) = \varphi''(1), \varphi'''(0) = \varphi'''(1), \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(1)$.
2. $\psi(x) \in C^2[0,1], \psi^{(3)}(x) \in L_2(0,1)$ и $\psi(0) = \psi(1), \psi'(0) = \psi'(1), \psi''(0) = \psi''(1)$.
3. $f(x,t),\ f_x(x,t),\ f_{xx}(x,t) \in C(D_T),\ f_{xxx}(x,t) \in L_2(D_T)$
и $f(0,t) = f(1,t)$, $f_x(0,t) = f_x(1,t), f_{xx}(0,t) = f_{xx}(1,t)$ $(0 \le t \le T)$.
4. $g(x,t),\ g_x(x,t),\ g_{xx}(x,t) \in C(D_T),\ g_{xxx}(x,t) \in L_2(D_T)$
и $g(0,t) = g(1,t)$, $g_x(0,t) = g_x(1,t), g_{xx}(0,t) = g_{xx}(1,t)$ $(0 \le t \le T)$.
5. $h_i(t) \in C^2[0,T]\ (i = 1,2),\ h(t) = h_1(t)g(x_2,t) - h_2(t)g(x_1,t) \ne 0$ $(0 \le t \le T)$.

Тогда из (24)- (27) получаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^5} \le A_1(T) + B_1(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + C_1(T)\|b(t)\|_{C[0,T]} , \qquad (28)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \le A_2(T) + B_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + C_2(T)\|b(t)\|_{C[0,T]} , \qquad (29)$$

$$\left\|\tilde{b}(t)\right\|_{C[0,T]} \le A_3(T) + B_3(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + C_3(T)\|b(t)\|_{C[0,T]} . \qquad (30)$$

где

$$A_1(T) = \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + T\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + T\sqrt{T}\| f(x,t)\|_{L_2(D_T)} + 2\sqrt{5}\varepsilon_1 \left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} +$$

$$+ 2\sqrt{5}\varepsilon_2 \left\|\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + 2\varepsilon_2\sqrt{5T}\| f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$B_1(T)=(T+2\sqrt{5}\varepsilon_2)T\ ,C_1(T)=(T+2\varepsilon_2)\sqrt{5T}\left\|g_{xxx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}.$$

$$A_2(T)=\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|g(x_2,t)\left(h_1''(t)-f(x_1,t)\right)-g(x_1,t)\left(h_2''(t)-f(x_2,t)\right)\right\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$+\left\|\left|g(x_2,t)\right|+\left|g(x_1,t)\right|\right\|_{C[0,T]}\left[\frac{\sqrt{6}}{6}\varepsilon_3\left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\frac{\sqrt{6}}{6}\varepsilon_3\left\|\psi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sqrt{6T}}{6}\varepsilon_4\left\|f_{xxx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\right]\right\},$$

$$B_2(T)=\frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_4\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\|\left|g(x_2,t)\right|+\left|g(x_1,t)\right|\right\|_{C[0,T]}T\ ,$$

$$C_2(T)=\frac{\sqrt{6T}}{6}\varepsilon_4\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\|\left|g(x_2,t)\right|+\left|g(x_1,t)\right|\right\|_{C[0,T]}\left\|g_{xxx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)},$$

$$\left\|\tilde{b}(t)\right\|_{C[0,T]}\le\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|h_1(t)\left(h_2''(t)-f(x_2,t)\right)-h_2(t)\left(h_1''(t)-f(x_1,t)\right)\right\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$+\left\|\left|h_2(,t)\right|+\left|h_1(t)\right|\right\|_{C[0,T]}\left[\frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_3\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\left|\varphi_{ik}\right|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_4\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\left|\psi_{ik}\right|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$A_3(T)=\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|h_1(t)\left(h_2''(t)-f(x_2,t)\right)-h_2(t)\left(h_1''(t)-f(x_1,t)\right)\right\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$+\left\|\left|h_2(,t)\right|+\left|h_1(t)\right|\right\|_{C[0,T]}\left[\frac{\sqrt{6}}{6}\varepsilon_3\left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\frac{\sqrt{6}}{6}\varepsilon_3\left\|\psi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sqrt{6T}}{6}\varepsilon_4\left\|f_{xxx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\right]\right\},$$

$$B_3(T)=\frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_4\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\|\left|h_2(,t)\right|+\left|h_1(t)\right|\right\|_{C[0,T]}T\ ,$$

$$C_3(T)=\frac{\sqrt{6T}}{6}\varepsilon_4\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\|\left|h_2(,t)\right|+\left|h_1(t)\right|\right\|_{C[0,T]}\left\|g_{xxx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}.$$

Из неравенств (28-(30)) заключаем:

$$\left\|\tilde{u}(x,t)\right\|_{B_{2,T}^5}+\left\|\tilde{a}(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|\tilde{b}(t)\right\|_{C[0,T]}\le$$

$$\leq A(T)+B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}+C(T)\|b(t)\|_{C[0,T]} \qquad (31)$$

где

$$A(T)=A_1(T)+A_2(T)+A_3(T), B(T)=B_1(T)+B_2(T)+B_3(T), C(T)=C_1(T)+C_2(T)+C_3(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1-5 и

$$(B(T)(A(T)+2)+C(T))(A(T)+2)<1. \qquad (32)$$

Тогда задача (1)-(3), (6), (7) имеет в шаре $K=K_R(\|z\|_{E^5_T}\leq R=A(T)+2)$ из E^5_T единственное решение.

Доказательство. В пространстве E^5_T рассмотрим уравнение

$$z=\Phi z, \qquad (33)$$

где $z=\{u,a,b\}$, а компоненты Φ_i $(i=1,2,3)$ оператора $\Phi(u,a,b)$ определены правыми частями (17), (22), (23) соответственно.

Рассмотрим, оператор $\Phi(u,a,b)$ в шаре $K=K_R$ из E^5_T. Аналогично (31) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E^5_T}\leq A(T)+B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}+C(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}, \qquad (34)$$

$$\|\Phi z_1-\Phi z_2\|_{E^5_T}\leq B(T)R(\|a_1(t)-a_2(t)\|_{C[0,T]}+\|u_1(x,t)-u_2(x,t)\|_{B^5_{2,T}})+$$
$$+C(T)\|b_1(t)-b_2(t)\|_{C[0,T]}. \qquad (35)$$

Тогда из оценок (34) и (35), с учетом (32), следует, что оператор *Ф* действует в шаре $K=K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K=K_R$ оператор *Ф* имеет единственную неподвижную точку $\{u,a,b\}$, которая является единственным в шаре $K=K_R$ решением (33), т.е. является единственным в шаре $K=K_R$ решением системы (17), (22), (23).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B^5_{2,T}$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t), u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t)$ в D_T.

Аналогично [6] можно доказывать, что $u_t(x,t)$, $u_{tx}(x,t), u_{txx}(x,t)$, $u_{tt}(x,t)$ непрерывны в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3), (6) и (7) удовлетворяются в обычном смысле. Значит, $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ является классическим решением задачи (1)-(3),(6), (7) и в силу леммы 2 это решение единственно. Теорема доказана.

С помощью леммы 1, легко доказывается следующая

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и

$$\int_0^1 f(x,t)dx = 0, \int_0^1 g(x,t)dx = 0 \qquad (0 \le t \le T), \quad \int_0^1 \varphi(x)dx = 0, \quad \int_0^1 \psi(x)dx = 0,$$

$$\varphi(x_i) = h_i(0), \ \psi(x_i) = h_i'(0) \ (i = 1,2).$$

Тогда задача (1)-(5) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^5} \le R = A(T) + 2)$ из E_T^5 единственное классическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1980, Т.16, №11, с.1925-1935
2. *Cannon J. R.* The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math., 1963, v.5, 21, p.155-160
3. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения, 1977, Т.13, №2, с.294-304
4. *Нахушев А.М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения, 1982, Т.18, №1, с.72-81
5. *Boussinesq* J. Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide content dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de surface au fond // J. Math. Pures Appl. 1872, v.17, pp. 55-108
6. Мегралиев Я.Т., Ализаде Ф.Х., Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с интегральным условием // *Чебышевский сб.*, 14:4 2013, Т.14, В.4, с.167-179
7. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. Москва: Наука, 1972, 668 с.
8. *Худавердиев К.И., Велиев А.А.* Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. Баку: Чашыоглы, 2010, 168 с.