PEDAQOJİ UNİVERSİTETİN XƏBƏRLƏRİ – 2019, C. 67, № 3, s. 37-47
ИЗВЕСТИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА – 2019, Т. 67, № 3, с. 37-47
TRANSACTIONS OF PEDAGOGICAL UNIVERSITY – 2019, V. 67, № 3, pp. 37-47

УДК 514.763

Г.Д.Фаттаев
Бакинский государственный университет
h-fattayev@mail.ru

О МЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ МЕТРИКИ САСАКИ В РАССЛОЕНИИ ТЕНЗОРНЫХ РЕПЕРОВ ТИПА $(1,1)$

Ключевые слова: *тензорный репер типа* $(1,1)$*, метрика Сасаки, адаптированный репер, горизонтальный лифт, тензор кривизны, метриическая связность*

В работе рассматривается расслоение тензорных реперов типа $(1,1)$ над римановым многообразием, в этом расслоении определяются аналог метрики Сасаки и соответствующая риманова связность. Также устанавливается, что горизонтальный лифт произвольной симметричной линейной связности является метрической связностью с кручением метрики Сасаки в расслоении тензорных реперов типа $(1,1)$.

H.D.Fəttayev

$(1,1)$ TİPLİ TENZOR REPERLƏRİNİN LAYLANMASINDA SASAKİ METRİKASININ METRİK RABİTƏSİNƏ DAİR

Açar sözlər: $(1,1)$ *tipli tenzor reperi, Sasaki metrikası, adaptə olunmuş reper, horizontal lift, əyrilik tenzoru, metrik rabitə*

İşdə Riman çoxobrazlısı üzərində $(1,1)$ tipli tenzor reperlərinin laylanmasına baxılır, bu laylanmada Sasaki metrikasının analoqu və uyğun Riman rabitəsi təyin olunur. Həmçinin müəyyən edilir ki, $(1,1)$ tipli tenzor reperlərinin laylanmasında Riman rabitəsinin horizontal lifti Sasaki metrikasının buruqluğa malik metrik rabitəsidir.

H.D.Fattayev

ABOUT METRIC CONNECTION OF SASAKI METRIC IN A BUNDLE OF $(1,1)$ TYPE TENSOR FRAMES

Keywords: $(1,1)$ *type tensor frame, Sasakian metric, adapted frame, horizontal lift, curvature tensor, metric connection*

In this paper, we consider a bundle of $(1,1)$ type tensor frames over a Riemannian manifold; in this bundle, an analogue of the Sasaki metric and the corresponding Riemannian connection are determined. It is also established that the horizontal lift of the Riemannian connection is a metric connection with torsion of the Sasaki metric in the bundle of $(1,1)$ type tensor frames.

1. Введение

Пусть M является $n-$мерным гладким многообразием из класса C^{∞}. Продолжению дифференциально-геометрических структур, заданных на M, в различные расслоенные пространства посвящены целый ряд работ. Обзор этих работ можно найти в книге Яно и Ишихары [1] (см. также [2]). Риманова метрика в касательном расслоении впервые введена в фундаментальной работе Сасаки [3]. Аналог метрики Сасаки в кокасательном расслоении изучен в работах Мока [4], Салимова и Оджак [5]. В работах Мока [6], Ковальски и Секизавы [7], Салимова и Фаттаева [8] определены метрики Сасаки в расслоениях линейных реперов и линейных кореперов.

Целью настоящей работы является определение метрической связности метрики Сасаки в расслоении тензорных реперов типа $(1,1)$ над римановым многообразием.

В разделе 2 кратко излагаются основные определения и результаты, которые будут использованы позже. В разделе 3 определяется метрика Сасаки в расслоении тензорных реперов типа $(1,1)$ риманова многообразия, также изучаются свойства связности Леви-Чивита этой метрики. В разделе 4 решается вопрос о горизонтальном лифте линейной связности в расслоение тензорных реперов типа $(1,1)$, в случае связности Леви-Чивита доказывается, что построенный лифт является метрической связностью метрики Сасаки.

2. Предварительные сведения

Кратко изложим основные определения и результаты, которые будут исполь-зованы позже. Пусть M $n-$мерное дифференцируемое многообразие класса C^{∞} и $L_1^1(M)$ его расслоение тензорных реперов типа $(1,1)$ (т.е., аффинорных реперов) (см. [9]). Расслоение $L_1^1(M)$ над M состоит из всех пар (x, A_x), где x- точка из M и $A_x = (X_1^1,..., X_n^1,..., X_1^n,..., X_n^n)$ есть базис (тензорный репер типа $(1,1)$) для линейного пространства $T_1^1(x)$ всех тензоров типа $(1,1)$ в точке x. Пусть π естественная проекция расслоения $L_1^1(M)$ в M, определяемая по формуле $\pi(x, A_x) = x$. Если $(U; x^i)$ система локальных координат в M, то $\{L_1^1(U);(x^i, X_{\beta i}^{\alpha j})\}$ является системой локальных координат в $L_1^1(U)$ (см. [9]). Индексы $i, j, k, ..., \alpha, \beta, \gamma, ...$ прибегают значения в $\{1,2,...,n\}$, в то время как индексы $A, B, C, ...$ и индексы $i_{\alpha\beta}, j_{\gamma\delta}, k_{\sigma\tau}, ...$ прибегают значения в $\{1,...,n, n+1,...,n+n^4\}$ и $\{n+1,...,n+n^4\}$, соответственно. Суммирование по повторяющимся индексам всегда подразумевается.

Обозначим через $\Im_s^r(M)$ множество всех дифференцируемых тензорных полей типа (r,s), заданных на M. Пусть ∇-аффинная связность с компонентами Γ_{ij}^k, а $V = V^i \partial_i$ и $B = B_j^i \partial_i \otimes dx^j$ - локальные разложения в $U \subset M$ векторного и аффинорного полей $V \in \Im_0^1(M)$ и $B \in \Im_1^1(M)$, соответственно. Тогда горизонтальный лифт ${}^H V \in \Im_0^1(L_1^1(M))$ векторного поля V и $\alpha\beta -$й вертикальный лифт ${}^{V_{\alpha\beta}} B \in \Im_0^1(L_1^1(M))$ аффинорного поля B для каждой пары значений $\alpha, \beta = 1,2,...,n$, имеют компоненты

$$ {}^H V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i} + V^k (X_{\beta m}^{\alpha j} \Gamma_{ki}^m - X_{\beta i}^{\alpha m} \Gamma_{km}^j) \frac{\partial}{\partial X_{\beta i}^{\alpha j}}, \qquad (2.1) $$

$$ {}^{V_{\alpha\beta}} B = \delta_\alpha^\gamma \delta_\sigma^\beta B_i^j \frac{\partial}{\partial X_{\sigma i}^{\gamma j}}, \qquad (2.2) $$

по отношению к натуральному реперу $\{\partial_i, \partial_{i_{\alpha\beta}}\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial X_{\beta i}^{\alpha j}} \right\}$ (см.[9]).

Вертикальный лифт гладкой функции f на M является функцией на $L_1^1(M)$, определяемой в виде ${}^V f = f \circ \pi$.

Пусть $(U; x^i)$ - система локальных координат в M. В $U \subset M$, положим

$$ X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^i} = \delta_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} \in \Im_0^1(M_n), $$

$$ \Lambda_i^j = \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j = \delta_i^h \delta_k^j \partial_h \otimes dx^k \in \Im_1^1(M_n), i, j = 1,2,...,n. $$

Принимая во внимание (2.1) и (2.2), легко видеть, что компоненты ${}^H X_{(i)}$ и ${}^{V_{\alpha\beta}} \Lambda_i^j$, соответственно, задаются формулами

$$ {}^H X_{(i)} = \delta_i^h \partial_h + (X_{\beta m}^{\alpha k} \Gamma_{hi}^m - X_{\beta i}^{\alpha m} \Gamma_{hm}^k) \frac{\partial}{\partial X_{\beta h}^{\alpha k}}, \qquad (2.3) $$

$$^{V_{\alpha\beta}}\Lambda_i^j = \delta_\gamma^\alpha \delta_\beta^\sigma \delta_i^h \delta_k^j \frac{\partial}{\partial X_{\sigma h}^{\gamma k}} \tag{2.4}$$

относительно натурального репера $\{\partial_i, \partial_{i_{\alpha\beta}}\}$. Набор $\{^H X_{(i)}, {}^{V_{\alpha\beta}}\Lambda_i^j\}$ назовем репером, адаптированным к связности ∇. Полагая

$$D_i = {}^H X_{(i)}, \quad D_{i_{\alpha\beta}} = {}^{V_{\alpha\beta}}\Lambda_i^j,$$

будем обозначать адаптированный репер в виде $\{D_I\} = \{D_i, D_{i_{\alpha\beta}}\}$. Из (2.1)-(2.4) следует, что $^H V$ и $^{V_{\alpha\beta}}B$ имеют, соответственно, компоненты

$$^H V = V^i D_i = \left(^H V^I\right) = \begin{pmatrix} V^i \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$^{V_{\alpha\beta}}B = B_i^j \delta_\alpha^\gamma \delta_\sigma^\beta D_{i_{\alpha\beta}} = (^{V_{\alpha\beta}}B^I) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_\alpha^\gamma \delta_\sigma^\beta B_i^j \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

относительно адаптированного репера $\{D_I\}$.

В $\pi^{-1}(U)$ рассмотрим локальные $1-$формы $\tilde{\eta}^I$, определяемые в виде

$$\tilde{\eta}^I = \bar{A}^I{}_J dx^J,$$

где

$$A^{-1} = (\bar{A}^I{}_J) = \begin{pmatrix} \bar{A}^i{}_j & \bar{A}^i{}_{j_\beta} \\ \bar{A}^{i_\alpha}{}_j & \bar{A}^{i_\alpha}{}_{j_\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ -X_m^\alpha \Gamma_{ij}^m & \delta_\beta^\alpha \delta_i^j \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Матрица (2.7) является обратной к матрице

$$A = (A_K{}^J) = \begin{pmatrix} A_k{}^j & A_{k_\gamma}{}^j \\ A_k{}^{j_\beta} & A_{k_\gamma}{}^{j_\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_k^j & 0 \\ X_m^\beta \Gamma_{jk}^m & \delta_\gamma^\beta \delta_j^k \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

преобразования $D_K = A_K{}^J \partial_J$ (см. (2.3) и (2.4)). Легко установить, что набор $\{\tilde{\eta}^I\}$ является корепером, двойственным к адаптированному реперу $\{D_K\}$, т.е.

$$\tilde{\eta}^I(D_K) = \bar{A}^I{}_J A_K{}^J = \delta_K^I.$$

Пусть $B \in \Im_1^1(M)$ и $B = B_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^i$. Тогда на расслоении $L_1^1(M)$ определяются векторные поля γB и $\tilde{\gamma} B$, имеющие компоненты

$$\begin{cases} \gamma B = (X^{\alpha m}_{\beta i} B^j_m) \dfrac{\partial}{\partial X^{\alpha j}_{\beta i}}, \\ \tilde{\gamma} B = (X^{\alpha j}_{\beta m} B^m_i) \dfrac{\partial}{\partial X^{\alpha j}_{\beta i}} \end{cases}$$

относительно натурального репера $\{\partial_i, \partial_{i_{\alpha\beta}}\}$.

Скобки Ли вертикального и горизонтального лифтов выражаются формулами

$$[{}^{V_{\alpha\beta}}B, {}^{V_{\lambda\tau}}C] = 0,$$

$$[{}^H X, {}^{V_{\alpha\beta}}B] = {}^{V_{\alpha\beta}}(\nabla_X B), \tag{2.9}$$

$$[{}^H X, {}^H Y] = {}^H[X,Y] + (\tilde{\gamma} - \gamma)(R(X,Y))$$

для всех $X, Y \in \Im^1_0(M_n)$, $B, C \in \Im^1_1(M_n)$, где $R(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$ и

$$(\tilde{\gamma} - \gamma)B = \begin{pmatrix} 0 \\ X^{\alpha j}_{\beta m} B^m_i - X^{\alpha m}_{\beta i} B^j_m \end{pmatrix}.$$

Легко устанавливается, что векторное поле $(\tilde{\gamma} - \gamma)(R(X,Y)) \in \Im^1_0(L^1_1(M_n))$ можно представить в виде

$$(\tilde{\gamma} - \gamma)(R(X,Y)) = \sum_{\alpha,\gamma=1}^{n} ({}^{V_{\alpha\gamma}} X^{\alpha}_{\gamma} \circ R(X,Y)). \tag{2.10}$$

3. Метрика Сасаки в расслоении тензорных реперов типа (1,1)

Пусть (M, g) риманово многообразие. Для каждой точки $x \in M$ на линейном пространстве $L^1_1(x) = \pi^{-1}(x)$ вводим скалярное произведение

$$G(B,C) = g_{pq} g^{ij} B^p_i C^q_j,$$

где $B, C \in \Im^1_1(M)$.

Метрику Сасаки ${}^S g$ в расслоении $L^1_1(M)$ определяем при помощи равенств

$${}^S g({}^{V_{\alpha\beta}}B, {}^{V_{\gamma\sigma}}C) = \delta^{\alpha\gamma} \delta_{\beta\sigma} {}^V(G(B,C)), \tag{3.1}$$

$${}^S g({}^{V_{\alpha\beta}}B, {}^H Y) = 0, \tag{3.2}$$

$${}^S g({}^H X, {}^H Y) = {}^V(g(X,Y)) \tag{3.3}$$

для всех $X, Y \in \Im^1_0(M)$ и $B, C \in \Im^1_1(M)$.

Из (3.1)-(3.3) следует, что метрика Сасаки ${}^S g$ имеет компоненты

$$\left({}^S g_{IJ}\right)=\begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & \delta^{\alpha\gamma}\delta_{\beta\sigma}g_{pq}g^{ij} \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

$$\left({}^S g^{IJ}\right)=\begin{pmatrix} g^{ij} & 0 \\ 0 & \delta_{\alpha\gamma}\delta^{\beta\sigma}g^{pq}g_{ij} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

по отношению к адаптированному реперу $\{D_I\}$, здесь g_{ij} и g^{ij}, соответственно ковариантные и контравариантные локальные компоненты метрики g на M.

Так как адаптированный репер $\{D_I\}$ является неголономным, имеем:

$$[D_I, D_J]=\Omega_{IJ}{}^K D_K,$$

откуда следует, что

$$\Omega_{IJ}{}^K=(D_I A_J{}^L - D_J A_I{}^L)\tilde{A}^K{}_L.$$

Пользуясь равенствами (2.3), (2.4), (2.7) и (2.8) находим ненулевые компоненты объекта неголономности $\Omega_{IJ}{}^K$ в виде

$$\begin{cases} \Omega_{ij_{\beta\sigma}}{}^{k_{\tau\lambda}}=-\Omega_{j_{\beta\sigma}i}{}^{k_{\tau\lambda}}=\delta^\tau_\beta\delta^\sigma_\lambda(\delta^j_k\Gamma^r_{il}-\delta^r_l\Gamma^j_{ik}), \\ \Omega_{ij}{}^{k_{\tau\lambda}}=X^{\tau r}_{\lambda m}R^m_{ijk}-X^{\tau m}_{\lambda k}R^r_{ijm}, \end{cases} \tag{3.6}$$

здесь $R_{ijk}{}^h$ компоненты тензора кривизны R метрики g на M.

Пусть ${}^S\nabla$ является связностью Леви-Чивита (римановой связностью) метрики сасаки ${}^S g$ и по отношению к адаптированному реперу $\{D_I\}$ справедливо разложение

$${}^S\nabla_{D_I}D_J={}^S\Gamma^K_{IJ}D_K,$$

здесь ${}^S\Gamma^K_{IJ}$ - компоненты связности ${}^S\nabla$. Тогда компоненты ${}^S\Gamma^K_{IJ}$ удовлетворяют соотношениям

$${}^S\Gamma^K_{IJ}-{}^S\Gamma^K_{JI}=\Omega_{IJ}{}^K, \tag{3.7}$$

$$D_L{}^S g_{IJ}-{}^S\Gamma^K_{LI}{}^S g_{KJ}-{}^S\Gamma^K_{LJ}{}^S g_{IK}=0. \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) следует, что

$${}^S\Gamma^K_{IJ}=\frac{1}{2}{}^S g^{KL}\left(D_I{}^S g_{LJ}+D_J{}^S g_{IL}-D_L{}^S g_{IJ}\right)+\frac{1}{2}\left(\Omega_{IJ}{}^K+\Omega^K_{\cdot\ IJ}+\Omega^K_{\cdot\ JI}\right), \tag{3.9}$$

здесь $\Omega^K_{\cdot\ IJ}={}^S g^{KL}\,{}^S g_{PJ}\Omega_{LI}{}^P$.

Принимая во внимание (3.4)-(3.6), из (3.9) получаем:

$$\begin{cases} {}^S\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}, \quad {}^S\Gamma^{k_{\tau\lambda}}_{ij} = \frac{1}{2}\left(X^{\ \tau r}_{\lambda m} R^m_{ijk} - X^{\ \tau m}_{\lambda k} R^r_{ijm}\right), \\ {}^S\Gamma^k_{i_{\alpha\gamma} j_{\beta\sigma}} = {}^S\Gamma^{k_{\tau\lambda}}_{i_{\alpha\beta} j} = {}^S\Gamma^{k_{\tau\lambda}}_{i_{\alpha\gamma} j_{\beta\sigma}} = 0, \\ {}^S\Gamma^k_{ij_{\beta\sigma}} = \frac{1}{2}\left(g_{la} X^{\ \beta a}_{\sigma m} R^{mj\ \ k}_{\cdot\cdot i} - g^{jb} X^{\ \beta m}_{\sigma b} R^k_{lmi}\right), \\ {}^S\Gamma^{k_{\tau\lambda}}_{ij_{\beta\sigma}} = \delta^\tau_\beta \delta^\sigma_\lambda (\delta^j_k \Gamma^r_{il} - \delta^r_l \Gamma^j_{ik}), \\ {}^S\Gamma^k_{i_{\alpha\gamma} j} = \frac{1}{2}(g_{ha} X^{\ \alpha a}_{\gamma m} R^{mi\ \ k}_{\cdot\cdot j} - g^{ib} X^{\ \alpha m}_{\gamma b} R^k_{hmj}). \end{cases}$$

Соотношениями (2.5), (2.6), (2.9), (2.10), (3.1)-(3.3), устанавливается справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть* M *- риманово многообразие с метрикой* g *и* ${}^S\nabla$ *является связностью Леви-Чивита расслоения аффинорных реперов* $L^1_1(M_n)$*, снабженного метрикой* ${}^S g$ *. Тогда для всех* $X,Y \in \Im^1_0(M_n)$ *и* $A,B \in \Im^1_1(M)$ *связность* ${}^S\nabla$ *удовлетворяет соотношения*

$$i)\ \ {}^S\nabla_{{}^H X}{}^H Y = {}^H(\nabla_X Y) + \frac{1}{2}\sum_{\tau,\lambda=1}^{n} {}^{V_{\tau\lambda}}(X^\tau_\lambda \circ R(X,Y) - R(X,Y)\circ X^\tau_\lambda),$$

$$ii)\ \ {}^S\nabla_{{}^H X}{}^{V_{\beta\sigma}} B = {}^{V_{\beta\sigma}}(\nabla_X B)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\tau,\lambda=1}^{n} \delta^{\tau\beta}\delta_{\lambda\sigma}\,{}^H(g_{pq}(X^{\ \tau p}_{\lambda s}(g^{-1}\circ R(\ \ ,X)^s_i))B^{iq} + g^{ij}(R(X^\tau_{\lambda i},X))B_j),$$

$$iii)\ \ {}^S\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^H Y = \frac{1}{2}\sum_{\tau,\lambda=1}^{n} \delta^{\tau\alpha}\delta_{\lambda\gamma}\,{}^H(g_{pq}(X^{\ \tau p}_{\lambda s}(g^{-1}\circ R(\ \ ,Y)^s_i A^{iq}$$

$$+ g^{ij}(R(X^\tau_{\lambda i},Y))A_j),$$

$$iv)\ \ {}^S\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{V_{\beta\sigma}} B = 0,$$

здесь $B_j = (B^q_j)$, $B^{iq} = g^{ij}B^q_j$, $X^\tau_{\lambda i} = (X^{\ \tau s}_{\lambda i})$, $R(\ \ ,X)Y \in \Im^1_1(M_n)$ *и* $g^{-1}\circ R(\ \ ,X)Y \in \Im^2_0(M_n)$.

4. Горизонтальный лифт аффинной связности как метрическая связность метрики Сасаки

В разделе 3 была определена метрика Сасаки ${}^S g$ в расслоении $L^1_1(M)$ над римановым многообразием (M,g) и изучена свойства связности Леви-Чивита ${}^S\nabla$ этой метрики. ${}^S\nabla$ является единственной линейной связностью без кручения на расслоении $L^1_1(M)$, удовлетворяющая условию ${}^S\nabla{}^S g = 0$. Однако, на $L^1_1(M)$ существует другая линейная связность $\tilde{\nabla}$ с нетривиальным тензором кручения и удовлетворяющая условию $\tilde{\nabla}{}^S g = 0.$ Эту связность $\tilde{\nabla}$ назовем метрической связностью метрики ${}^S g$.

Пусть ∇ произвольная линейная связность на многообразии M. Горизонтальный лифт ${}^H\nabla$ связности ∇ в расслоение $L_1^1(M)$ определяется при помощи равенств

$$
\begin{aligned}
&{}^H\nabla_{{}^H X}{}^H Y = {}^H(\nabla_X Y), \qquad &&{}^H\nabla_{{}^H X}{}^{V_{\beta\sigma}}B = {}^{V_{\beta\sigma}}(\nabla_X B),\\
&{}^H\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^H Y = 0, \qquad &&{}^H\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{V_{\beta\sigma}}B = 0
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

для всех $X, Y \in \Im_0^1(M)$ и $A, B \in \Im_1^1(M)$. Отметим, что аналогичные лифты линейной связности в касательном и кокасательном расслоениях, также в расслоениях линейных реперов и линейных корепероов изучены, соответственно, в работах [10], [11], [12] и [13].

Пусть ${}^H\nabla_I = {}^H\nabla_{D_I}$. Компоненты связности ${}^H\nabla$ по отношению к адаптированному реперу $\{D_I\}$ обозначим через ${}^H\Gamma_{IK}^P$, т.е. ${}^H\nabla_I D_K = {}^H\Gamma_{IK}^P D_P$. Тогда пользуясь (2.1) и (2.2), из равенств (4.1) получим:

$$
\begin{gathered}
{}^H\Gamma^{p}_{i_{\alpha\gamma}k_{\beta\sigma}} = 0, \qquad {}^H\Gamma^{p_{\eta\varepsilon}}_{i_{\alpha\gamma}k_{\beta\sigma}} = {}^H\Gamma^{p}_{i_{\alpha\gamma}k} = {}^H\Gamma^{p_{\eta\varepsilon}}_{i_{\tau\gamma}k} = 0,\\
{}^H\Gamma^{p}_{ik} = \Gamma^{p}_{ik}, \qquad {}^H\Gamma^{p_{\eta\varepsilon}}_{ik} = {}^H\Gamma^{p}_{ik_{\beta\sigma}} = 0,\\
{}^H\Gamma^{p_{\eta\varepsilon}}_{ik_{\beta\sigma}} = \delta^{\eta}_{\omega}\delta^{\mu}_{\varepsilon}\delta^{k}_{p}\Gamma^{q}_{il} - \delta^{\eta}_{\omega}\delta^{\mu}_{\varepsilon}\delta^{q}_{l}\Gamma^{k}_{ip}.
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

Тензор кручения связности ${}^H\nabla$ обозначим через $\tilde{T}$. Тогда $\tilde{T}$ является косо-симметричным тензорным полем на $L_1^1(M)$, определяемым следующим образом:

$$
\tilde{T}({}^{V_{\alpha\gamma}}A, {}^{V_{\beta\sigma}}B) = {}^H\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{V_{\beta\sigma}}B - {}^H\nabla_{{}^{V_{\beta\sigma}}B}{}^{V_{\alpha\gamma}}A - [{}^{V_{\alpha\gamma}}A, {}^{V_{\beta\sigma}}B] = 0,
$$

$$
\tilde{T}({}^{V_{\alpha\gamma}}A, {}^H Y) = -\tilde{T}({}^H Y, {}^{V_{\alpha\gamma}}A) = {}^H\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^H Y - {}^H\nabla_{{}^H Y}{}^{V_{\alpha\gamma}}A -
$$

$$
-[{}^{V_{\alpha\gamma}}A, {}^H Y] = 0,
$$

$$
\tilde{T}({}^H X, {}^H Y) = {}^H\nabla_{{}^H X}{}^H Y - {}^H\nabla_{{}^H Y}{}^H X - [{}^H X, {}^H Y] =
$$

$$
= {}^H(\nabla_X Y) - {}^H(\nabla_Y X) - {}^H[X, Y] - (\tilde{\gamma} - \gamma)(R(X, Y)) =
$$

$$
= {}^H(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) - (\tilde{\gamma} - \gamma)(R(X, Y)) = -(\tilde{\gamma} - \gamma)(R(X, Y)),
$$

здесь R является тензором кривизны связности ∇ и

$$(\tilde{\gamma}-\gamma)(R(X,Y))=(X^{\alpha j}_{\beta m}R_{kli}{}^{m}X^{k}Y^{l}-X^{\alpha m}_{\beta i}R_{klm}{}^{j}X^{k}Y^{l})\frac{\partial}{\partial X^{\alpha j}_{\beta i}}.$$

Таким образом, связность ${}^{H}\nabla$ имеет ненулевое кручение даже для римановой связности ∇_{g}, определяемой g, если g не является локально-плоским.

Пользуясь (3.1)-(3.3) и (4.1), получим:

$$({}^{H}\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{S}g)({}^{V_{\beta\sigma}}B,{}^{V_{\eta\varepsilon}}C)=\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{S}g({}^{V_{\beta\sigma}}B,{}^{V_{\eta\varepsilon}}C)-{}^{S}g({}^{H}\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{V_{\beta\sigma}}B,{}^{V_{\eta\varepsilon}}C)-$$

$$-{}^{S}g({}^{V_{\beta\sigma}}B,{}^{H}\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{V_{\eta\varepsilon}}C)={}^{H}\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}\delta^{\beta\eta}\delta_{\sigma\varepsilon}{}^{V}(G(B,C))=$$

$$=\delta^{\beta\eta}\delta_{\sigma\varepsilon}{}^{V_{\alpha\gamma}}A^{V}(G(B,C))=0,$$

$$({}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{S}g)({}^{V_{\beta\sigma}}B,{}^{V_{\eta\varepsilon}}C)=\nabla_{{}^{H}X}{}^{S}g({}^{V_{\beta\sigma}}B,{}^{V_{\eta\varepsilon}}C)-{}^{S}g({}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V_{\beta\sigma}}B,{}^{V_{\eta\varepsilon}}C)-$$

$$-{}^{S}g({}^{V_{\beta\sigma}}B,{}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V_{\eta\varepsilon}}C)={}^{H}\nabla_{{}^{H}X}\delta^{\beta\eta}\delta_{\sigma\varepsilon}{}^{V}(G(B,C))={}^{S}g({}^{V_{\beta\sigma}}(\nabla_{X}B),{}^{V_{\eta\varepsilon}}C)-$$

$$-{}^{S}g({}^{V_{\beta\sigma}}B,{}^{V_{\eta\varepsilon}}(\nabla_{X}C))=\delta^{\beta\eta}\delta_{\sigma\varepsilon}{}^{H}X^{V}(G(B,C))-\delta^{\beta\eta}\delta_{\sigma\varepsilon}{}^{V}(G(\nabla_{X}B,C))-$$

$$-\delta^{\beta\eta}\delta_{\sigma\varepsilon}{}^{V}(G(B,\nabla_{X}C))=\delta^{\beta\eta}\delta_{\sigma\varepsilon}{}^{V}(X(G(B,C)))-\delta^{\beta\eta}\delta_{\sigma\varepsilon}{}^{V}(G(\nabla_{X}B,C))-$$

$$-\delta^{\beta\eta}\delta_{\sigma\varepsilon}{}^{V}(G(B,\nabla_{X}C))=\delta^{\beta\eta}\delta_{\sigma\varepsilon}{}^{V}(\nabla_{X}G(B,C))-\delta^{\beta\eta}\delta_{\sigma\varepsilon}{}^{V}(G(\nabla_{X}B,C))-$$

$$-\delta^{\beta\eta}\delta_{\sigma\varepsilon}{}^{V}(G(B,\nabla_{X}C))=\delta^{\beta\eta}\delta_{\sigma\varepsilon}{}^{V}((\nabla_{X}G)(B,C))=0,$$

$$({}^{H}\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{S}g)({}^{V_{\beta\sigma}}B,{}^{H}Z)=\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{S}g({}^{V_{\beta\sigma}}B,{}^{H}Z)-{}^{S}g({}^{H}\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{V_{\beta\sigma}}B,{}^{H}Z)-$$

$$-{}^{S}g({}^{V_{\beta\sigma}}B,{}^{H}\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{H}Z)=0,$$

$$({}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{S}g)({}^{V_{\beta\sigma}}B,{}^{H}Z)=\nabla_{{}^{H}X}{}^{S}g({}^{V_{\beta\sigma}}B,{}^{H}Z)-{}^{S}g({}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V_{\beta\sigma}}B,{}^{H}Z)-$$

$$-{}^{S}g({}^{V_{\beta\sigma}}B,{}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{H}Z)=-{}^{S}g({}^{V_{\beta\sigma}}(\nabla_{X}B),{}^{H}Z)-{}^{S}g({}^{V_{\beta\sigma}}B,{}^{H}(\nabla_{X}Z))=0,$$

$$({}^{H}\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{S}g)({}^{H}Y,{}^{V_{\eta\varepsilon}}C)=\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{S}g({}^{H}Y,{}^{V_{\eta\varepsilon}}C)-{}^{S}g({}^{H}\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{H}Y,{}^{V_{\eta\varepsilon}}C)-$$

$$-{}^{S}g({}^{H}Y,{}^{H}\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{V_{\eta\varepsilon}}C)=0,$$

$$({}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{S}g)({}^{H}Y,{}^{V_{\eta\varepsilon}}C)=\nabla_{{}^{H}X}{}^{S}g({}^{H}Y,{}^{V_{\eta\varepsilon}}C)-{}^{S}g({}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{H}Y,{}^{V_{\eta\varepsilon}}C)-$$

$$-{}^{S}g({}^{H}Y,{}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V_{\eta\varepsilon}}C)=-{}^{S}g({}^{H}(\nabla_{X}Y),{}^{V_{\eta\varepsilon}}C)-{}^{S}g({}^{H}Y,{}^{V_{\eta\varepsilon}}(\nabla_{X}C))=0,$$

$$({}^{H}\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{S}g)({}^{H}Y,{}^{H}Z)=\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{S}g({}^{H}Y,{}^{H}Z)-{}^{S}g({}^{H}\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{H}Y,{}^{H}Z)-$$

$$-{}^{S}g({}^{H}Y,{}^{H}\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{H}Z)=({}^{H}\nabla_{{}^{V_{\alpha\gamma}}A}{}^{V}(g(Y,Z))={}^{V_{\alpha\sigma}}A^{V}(g(Y,Z))=0,$$

$$({}^H\nabla_{{}^H X}{}^S g)({}^H Y, {}^H Z) = \nabla_{{}^H X}{}^S g({}^H Y, {}^H Z) - {}^S g({}^H\nabla_{{}^H X}{}^H Y, {}^H Z) -$$
$$- {}^S g({}^H Y, {}^H\nabla_{V_{\alpha\gamma}A}{}^H Z) = ({}^H\nabla_{{}^H X}{}^V(g(Y,Z)) - {}^S g({}^H(\nabla_X Y), {}^H Z) -$$
$$- {}^S g({}^H Y), {}^H(\nabla_X Z)) = {}^H X^V(g(Y,Z)) - {}^V(g(\nabla_X Y, Z)) - {}^V(g(Y, \nabla_X Z)) =$$
$$= {}^V(Xg(Y,Z)) - {}^V(g(\nabla_X Y, Z)) - {}^V(g(Y, \nabla_X Z)) = {}^V(\nabla_X g(Y,Z)) -$$
$$- {}^V(g(\nabla_X Y, Z)) - {}^V(g(Y, \nabla_X Z)) = {}^V((\nabla_X g)(Y,Z)) = 0$$

для любых $X, Y, Z \in \Im_0^1(M)$ и $A, B, C \in \Im_1^1(M)$.

Тем самым, доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть g риманова метрика на M и ∇ ее метрическая связность. Тогда горизонтальный лифт ${}^H\nabla$ связности ∇ является метрии-ческой связностью метрики Сасаки ${}^S g$ на расслоении $L_1^1(M)$.*

Пусть ${}^H R$ является тензором кривизны метрической связности ${}^H\nabla$. Тензор кривизны ${}^H R$ по определению имеет компоненты

$$^H R_{IJK}{}^L = 2(D_{[I}{}^H\Gamma_{J]K} + {}^H\Gamma_{[I|P|}^L{}^H\Gamma_{J]K}^P) - \Omega_{IJ}{}^P{}^H\Gamma_{PK}^L \qquad (4.3)$$

относительно адаптированного репера $\{D_L\}$.

Основываясь на равенства (2.3), (2.4), (3.6) и (4.2), из (4.3) получим:

$$^H R_{ijk}{}^l = R_{ijk}{}^l, \ {}^H R_{i_{\alpha\gamma}jk}{}^l = {}^H R_{ij_{\beta\sigma}k}{}^l = {}^H R_{ijk_{\tau\omega}}{}^l = {}^H R_{i_{\alpha\gamma}j_{\beta\sigma}k}{}^l = {}^H R_{i_{\alpha\gamma}jk_{\tau\delta}}{}^l = 0,$$
$$^H R_{ij_{\beta\sigma}k_{\tau\omega}}{}^l = {}^H R_{ij_{\beta\sigma}k}{}^l = {}^H R_{i_{\alpha\gamma}j_{\beta\sigma}k_{\tau\omega}}{}^l = {}^H R_{ijk}{}^{l_{\eta\varepsilon}} = {}^H R_{i_{\alpha\gamma}jk}{}^{l_{\eta\varepsilon}} = {}^H R_{ij_{\beta\sigma}k}{}^{l_{\eta\varepsilon}} = 0,$$
$$= {}^H R_{i_{\alpha\gamma}j_{\beta\sigma}k}{}^{l_{\eta\varepsilon}} = {}^H R_{i_{\alpha\gamma}jk_{\tau\omega}}{}^{l_{\eta\varepsilon}} = {}^H R_{ij_{\beta\sigma}k_{\tau\omega}}{}^{l_{\eta\varepsilon}} = {}^H R_{i_{\alpha\gamma}j_{\beta\sigma}k_{\tau\omega}}{}^{l_{\eta\varepsilon}} = 0, \qquad (4.4)$$
$$^H R_{ijk_{\tau\omega}}{}^{l_{\eta\varepsilon}} = \delta_\tau^\eta\delta_\varepsilon^\omega(\delta_l^k R_{ijr}{}^q - \delta_r^q{}^H R_{ijl}{}^k).$$

Рассмотрим тензор риччи ${}^H R_{IJ} = {}^H R_{KIJ}{}^K$ метрической связности ${}^H\nabla$. Пользуясь (4.4), находим компоненты тензора риччи ${}^H R$:

$$^H R_{i_{\alpha\gamma}j_{\beta\sigma}} = {}^H R_{i_{\alpha\gamma}j} = {}^H R_{ij_{\beta\sigma}} = 0,$$
$$^H R_{ij} = {}^H R_{kij}{}^k + {}^H R_{k_{\tau\omega}ij}{}^{k_{\tau\omega}} = R_{ij}, \qquad (4.5)$$

здесь R_{ij} тензор риччи связности ∇_g на M. Для скалярной кривизны ${}^H r$ связности ${}^H\nabla$ по отношению к метрики Сасаки ${}^S g$, на основе (3.5) и (4.5), имеем:

$$^H r = {}^S g^{IJ}{}^H R_{IJ} = g^{ij} R_{ij} = r,$$

здесь r - скалярная кривизна связноси ∇_g на M. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. Пусть (M,g)- риманово многообразие и $L_1^1(M)$ расслоение тензорных реперов типа $(1,1)$, снабженное метрикой Сасаки ${}^S g$. Расслоение $L_1^1(M)$ с метрической связностью ${}^H\nabla$ имеет нулевую скалярную кривизну ${}^H r$ по отношению к метрике Сасаки ${}^S g$ тогда и только тогда, когда скалярная кривизна r связности ∇_g на M нулевая.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yano K., Ishihara S.* Tangent and cotangent bundles. New York: Marsel Dekker, Inc., 1973
2. *Cordero L.A., Dodson C.T., Leon de Manuel.* Differential Geometry of Frame Bundles, Mathematics and its Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1989
3. *Sasaki S.* On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds // Tohoku Math.J., 1958, v.10, №3, pp.338-354
4. *Mok K.P.* Metrics and connections on the cotangent bundle // Kodai Math. Sem. Rep., 1977, v.28, pp. 226-238
5. *Ocak F., Salimov A.* Geometry of the cotangent bundle with Sasakian metrics and its applications // Proc. Indian Acad. Sci., 2014, v.124, №3, pp. 427-436
6. *Mok K. P.* On the differential geometry of frame bundles of Riemannian manifolds // J. Reine Angew. Math., 1976, v.302, pp.16-31
7. *Kowalski O., Sekizawa M.* Curvatures of the diagonal lift from an affine manifold to the linear frame bundle // Cent. Eur. J. Math., 2012, v.10, № 3, pp.837-843
8. *Fattayev H.D., Salimov A.A.* Diagonal lifts of metrics to coframe bundle // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan, 2018, v.44, № 2, pp.328-337
9. *Фаттаев Г.Д.* Некоторые вопросы дифференциальной геометрии расслоения аффинорных реперов // Вестн. Бакинск. Унив-та. Сер. физ.-мат. наук, 2018, № 3, с.45-57
10. *Yano K., Ishihara S.* Horizontal lift of tensor fields and connections to tangent bundles // J. Math. Soc. Japan, 1966, v.16, pp.1015-1030
11. *Yano K., Patterson E.M.* Horizontal lift from a manifold to its cotangent bundle // J. Math. Soc. Japan, 1967, v.19, pp.185-198
12. *Cordero L.A., Leon de Manuel.* Horizontal lift of connection to the frame bundle // Boll. Un. Mat. Ital, 1984, v.6, pp.223-240
13. *Salimov A.A., Fattayev H.D.* Connections On The Coframe Bundle, Inter. Elect. J. of Geom., 2019, v.12, №1, pp.93-101