Pedaqoji Universitetin Xəbərləri. **Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası – 2021, C. 69, №1, s. 23-29**
Transactions of Pedagogical University. **Series of mathematics and natural sciences – 2021, V. 69, №1, pp. 23-29**

UOT 517.95

E.M.Əhmədov
Bakı Dövlət Universiteti
etibar.03aze@gmail.com

ÜMUMİ XƏTTİ BİRTƏRTİBLİ HİPERBOLİK TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN YARIMOXDA SƏPİLMƏ MƏSƏLƏSİ

Açar sözlər: *səpilmə məsələsi, səpilmə operatoru, Volter operatoru, tərs səpilmə məsələsi*

İşdə birtərtibli xətti *n* sayda hiperbolik tənliklər sistemi üçün yarımoxda iki səpilən dalğa halında düz səpilmə məsələsi öyrənilmişdir. *n*-2 sayda məsələyə baxılmışdır. Səpilmə məsələsinin sanki hər yerdə məhdud, ölçülən funksiyalar fəzasında həllinin varlığı və yeganəliyi göstərilmişdir. Gələn dalğaları səpilən dalğalara çevirən səpilmə operatoru təyin edilmişdir.

E.M.Ахмедов

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЩИХ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПОЛУОСИ

Ключевые слова: *задача рассеяния, оператор рассеяния, Вольтеровский оператор, обратная задача рассеяния*

В работе изучается задача рассеяния для системы *n* гиперболических линейных уравнений первого порядка на полуоси с заданными рассеянными волнами. Была рассмотрена задача для системы *n*-2 уравнений. Задача рассеяния ограничена почти повсюду, в пространстве измеримых функций показано существование и единственность решения. Определен оператор рассеяния, превращающий приходящие волны в рассеянные.

E.M.Ahmadov

THE SCATTERING PROBLEM FOR A GENERAL LINEAR HIPERBOLIC SYSTEM OF FIRST ORDER EQUATIONS ON THE SEMI-AXIS

Keywords: *scattering problems, scattering operator, Volterrs operators, inverse scattering problem*

In present paper the direct scattering problem for a system of an *n* one-dimensional linear hyperbolic equations in the case of two scattering waves in a semi-axis is studied. In the work is considered *n*-2 problems. The existence and uniqueness of the solution of the scattering problem in the space of finite and measurable functions is shown. The scattering operator for convert the incident waves into scattered ones is determined.

Yarımoxda ($x \geq 0$) aşağıdakı tənliklər sisteminə baxaq:

$$\xi_i \frac{\partial U_i(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial U_i(x,t)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}(x,t) U_j(x,t), \tag{1}$$

$$i = \overline{1,n}\ , \ -\infty < t < +\infty \ ,$$

Burada $\xi_i > \ldots > \xi_{n-2} > 0 > \xi_{n-1} > \xi_n$ ($n-2$ gələn, iki səpilən dalğa halı) , $C_{ij}(x,t)$ $(i,j = \overline{1,n})$ əmsalları isə kompleksqiymətli ölçülən funksiyalardır və

$$|C_{ij}(x,t)| \leq \frac{c}{(1+x)^{1+\varepsilon}(1+|t|)^{1+\varepsilon}} \tag{2}$$

$$C_{ii}(x,t) = 0\,, \qquad i,j = \overline{1,n}\,, \qquad c = const > 0$$

şərtlərini ödəyirlər.

Qeyd edək ki, $n = 2$ halında bütün oxda və yarımoxda düz və tərs səpilmə məsələsi L.P.Nijnik [1] tərəfindən öyrənilmiş və qeyri-xətti Devi-Styartson

$$iU_t = -U_{xx} - kU_{yy} + \eta WU$$

$$W_{xy} = 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|U|^2 \tag{3}$$

tənliyinin tərs məsələlər üsulu ilə inteqrallamasına tətbiq edilmişdir. $n \geq 3$ olduqda (1) tənliklər sistemi üçün $\xi_1 > \xi_2 > \cdots > \xi_n$ halında bütün oxda düz və tərs səpilmə məsələsi L.P.Nijnik və V.Q.Tarasov [2] tərəfindən tədqiq edilmişdir. $n \geq 3$ olduqda yarımoxda düz və tərs səpilmə məsələləri $n-1$ gələn və bir səpilən halında [3], $n = 4$ olduqda iki gələn və iki səpilən dalğa halı [4], $n = 5$ $və$ 6 olduqda iki səpilən dalğa hallarında [5,6] işlərində tədqiq edilmişdir. Qeyri-stasionar Dirak tənliklər sistemi üçün daha ümumi halda tərs səpilmə məsələsi və onun bəzi tətbiqləri [7,8] işlərində öyrənilmişdir.

Bu işdə istənilən $n \geq 3$ üçün daha ümumi halda iki səpilən dalğa halında səpilmə məsələsi tədqiq olunmuşdur.

1. Səpilmə məsələsinin yarımoxda qoyuluşu. (1) hiperbolik tənliklər sistemi üçün yarımoxda səpilmə məsələsi $\xi_i > \ldots > \xi_{n-2} > 0 > \xi_{n-1} > \xi_n$ olduqda aşağıdakı kimi verilir. Bu sistemin elə həllini tapın ki, gələn dalğaları xarakterizə edən verilmiş $a_i(t) \in L_\infty(-\infty;+\infty)$ $(i = 1,2,\ldots,n-2)$ funksiyaları üçün

$$U_i(x,t) = a_i(t + \xi_i x) + o(1), \quad x \to +\infty, \qquad i = 1,2,\ldots,n-2, \tag{4}$$

asimptotik düsturuna malik olsun və $x = 0$ olduqda müəyyən sərhəd şərtlərini ödəsin.

Bu məqsədlə $n-2$ sayda müxtəlif məsələyə baxılır.

k-cı məsələdə $(k = 1,2,\ldots,n-2)$

$U^k(x,t) = \{U_1^k(x,t), \ldots, U_{n-1}^k(x,t), U_n^k(x,t)\}$ həlli

$$U_i^k(x,t) = a_i(t+\xi_k x) + o(1), \quad i,k = \overline{1,n-2}, x \to +\infty \tag{5}$$

asimtotikasına malikdir və

$$U_{n-1}^k(x,t) = \sum_{\substack{i\in\{1,\dots,n-2\} \\ i\neq k}} U_i^k(0,t) \tag{6}$$

$$U_n^k(0,t) = U_k^k(0,t)\,, \qquad k = 1,2,\dots,n-2 \tag{7}$$

sərhəd şərtlərini ödəyir.

Birlikdə baxılan (1), (6), (7) məsələlərinə yarımoxda n-2 gələn iki səpilən dalğa halında səpilmə məsələsi deyilir.

2. Səpilmə operatoru. Qeyd edək ki, (1) sistemi üçün düz məsələ dedikdə bu sistem üçün qoyulmuş məsələyə görə səpilmə operatorunun və ya səpilmə verilənlərinin təyin olunması başa düşülür.

Teorem. Tutaq ki, (1) sisteminin əmsalları ölçülən funksiyalardır və (2) şərtlərini ödəyirlər. Onda gələn dalğaları xarakterizə edən verilmiş $a_1(t),\dots,a_{n-2}(t) \in L_\infty(-\infty,+\infty)$ funksiyaları və hər bir $k \in \{1,2,\dots,n-2\}$ üçün (1) – (6) – (7) səpilmə məsələsinin həlli var və yeganədir. $U_{n-1}^k(x,t)$, $U_n^k(x,t)$ funksiyaları $x \to \infty$ olduqda $L_\infty(-\infty,+\infty)$ fəzasında aşağıdakı asimptotikaya malikdirlər:

$$U_{n-1}^k(x,t) = b_{n-1}^k(t+\xi_{n-1}x) + o(1), \qquad x \to +\infty,$$

$$U_n^k(x,t) = b_n^k(t+\xi_n x) + o(1), \qquad x \to +\infty. \tag{8}$$

İsbatı. k-cı səpilmə məsələsi aşağıdakı Volter inteqral tənliklər sisteminə ekvivalentdir:

$$U_i^k(x,t) = a_i(t+\xi_i x) + \\ + \int_x^{+\infty} \sum_{j=1}^n C_{ij}(y,t+\xi_i(x-y))U_j^k\big(y,t+\xi_i(x-y)\big)dy, \\ i,k = \overline{1,n-2}\,,$$

$$U_{n-1}^k(x,t) == b_{n-1}^k(t+\xi_{n-1}x) + \int_x^{+\infty} \sum_{j=1}^n C_{n-1,j}\big(y,t+ \\ +\xi_{n-1}(x-y)\big)U_j^k\big(y,t+\xi_{n-1}(x-y)\big)dy\,,$$

$$U_n^k(x,t) = b_n^k(t+\xi_n x) + \int_x^{+\infty} \sum_{j=1}^n C_{n,j}(y,t+\xi_n(x-y))U_j^k\big(y,t+ \\ +\xi_n(x-y)\big)dy\,. \tag{9}$$

(9) sistemini operator tənlik şəkilində yazaq:

$$U^k(x,t) = h^k(x,t) + A^k U^k(x,t)\,, \quad k = \overline{1,n}, \tag{10}$$

burada

$$U^k(x,t)=\begin{pmatrix} U_1^k(x,t)\\ \dots\\ \dots\\ U_{n-1}^k(x,t)\\ U_n^k(x,t)\end{pmatrix},\qquad h^k(x,t)=\begin{pmatrix} a_1(t+\xi_1 x)\\ \dots\\ a_{n-2}\dots\ (t+\xi_{n-1}x)\\ b_{n-1}^k(t+\xi_{n-1}x\\ b_n^k(t+\xi_n x\end{pmatrix},$$

$$A^kU^k(x,t)=\begin{pmatrix} A_1^kU^k(x,t)\\ \dots\\ A_{n-1}^kU^k(x,t)\\ A_n^kU^k(x,t)\end{pmatrix},$$

$A_i^kU^k(x,t)=\int_x^{+\infty}\sum_{j=1}^n C_{ij}\big(y,t+\xi_i(x-y)\big)\,U_j^k\big(y,t+\xi_i(y)\big)dy,\quad i=\overline{1,n}$.

Onda (2) qiymətləndirilməsini nəzərə alsaq və

$$\|U^k\|_T=\underset{\substack{x\geq T\\ -\infty<t<+\infty}}{vrai}\ \sup\max_{i=\overline{1,n}}\left|U_i^k(x,t)\right|$$

götürsək, alarıq:

$$\|A^kU^k(x,t)\|_T=\underset{\substack{x\geq T\\ -\infty<t<+\infty}}{vrai}\ \sup\max_{i=\overline{1,n}}\left|A_i^kU(x,t)\right|=$$

$$=\underset{\substack{x\geq T\\ -\infty<t<+\infty}}{vrai}\ \sup\max_{i=\overline{1,n}}\Big|\int_x^{+\infty}\sum_{j=1}^n C_{ij}(y,t+\xi_i(x-y))\,U_j^k(y,t+$$
$$+\xi_i(x-y))dy\Big|\leq$$

$$\leq\underset{\substack{x\geq T\\ -\infty<t<+\infty}}{vrai}\ \sup\max_{i=\overline{1,n}}\int_x^{+\infty}\sum_{j=1}^n\left|C_{ij}(y,t+\xi_i(x-y))\right|\left|U_j^k(y,t+\xi_i(x-y))\right|dy\leq$$

$$\leq\underset{\substack{x\geq T\\ -\infty<t<+\infty}}{vrai}\ \sup\max_{i=\overline{1,n}}\int_x^{+\infty}\sum_{j=1}^n\frac{c\left|U_j^k(y,t+\xi_i(x-y))\right|}{(1+y)^{1+\varepsilon}(1+|t|)^{1+\varepsilon}}dy$$

$$\leq c\int_x^{+\infty}n(1+y)^{-1-\varepsilon}\,x$$

$$x\ \underset{\substack{x'\geq y\\ -\infty<t<+\infty}}{vrai}\ \sup\max_{i=\overline{1,n}}\left|U_j^k(x',t')\right|dy=$$

$$=cn\int_x^{+\infty}(1+y)^{-1-\varepsilon}\|U^k\|_y dy\leq$$

$$\leq cn\int_T^{+\infty}(1+y)^{-1-\varepsilon}\|U^k\|_y dy$$

Beləliklə,

$$\|A^k U^k(x,t)\|_T \le c_1 \int_T^{+\infty} \frac{\|U^k\|_y}{(1+y)^{1+\varepsilon}} dy \ , \ c_1 = cn \ .$$

(11)

Onda aşağıdakı teoremə görə həllin varlığı və yeganəliyi alınır.

Teorem [1] . Tutaq ki, B Banax fəzasında

$U = h + AU$

tənliyi verilmişdir. A xətti operatordur və $T\epsilon(-\infty,+\infty)$ ədədlərinə görə $\|U\|_T$ norması üçün

$$\|AU\|_T \le \int_T^{+\infty} \alpha(\tau)\|U\|_\tau d\tau$$

bərabərsizliyi ödənilir, burada

$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\tau) < +\infty$.

Onda istənilən $h\epsilon B$ üçün həll var və yeganədir.

İndi isə (8) münasibətlərini göstərək.

(9) inteqral tənliklər sistemindən

$$\left|U_i^k(x,t) - b_i^k(t+\xi_i x)\right| =$$
$$= \left|\int_x^{+\infty} \sum_{j=1}^n C_{ij}\big(y, t+\xi_i(x-y)\big) U_j^k(y, t+\xi_i(x-y))\, dy\right| \le$$

$$\le \int_x^{+\infty} \sum_{j=1}^n \left|C_{ij}\big(y, t+\xi_i(x-y)\big)\right| \left|U_j^k(y, t+\xi_i(x-y))\right| dy \ , i = n-1, n \ .$$

$U_j^k(x\,,t) \in L_\infty(R_+, R)$ olduğundan $\exists\, M > 0$ var ki, sanki hər yerdə $\left|U_j^k(x\ ,t)\right| \le M$ olur. Burada $R_+ = (0\,,+\infty)$, $R = (-\infty,+\infty)$.

Onda (2) –ni nəzərə alsaq

$$\left|U_i^k(x,t) - b_i^k(t+\xi_i x\right| \le$$
$$\le \int_x^{+\infty} \sum_{j=1}^n \frac{c}{(1+y)^{1+\varepsilon}} \frac{1}{(1+|t+\xi_i(x-y)|)^{1+\varepsilon}} M dy \le$$
$$\le cMn \int_x^{+\infty} \frac{1}{(1+y)^{1+\varepsilon}} dy = cMn \frac{(1+y)^{-\varepsilon}}{-\varepsilon} \Big|_x^{+\infty} =$$
$$= -\frac{cMn}{\varepsilon} \frac{1}{(1+y)^\varepsilon} \Big|_x^{+\infty} = \frac{cMn}{\varepsilon} \frac{1}{(1+x)^\varepsilon}, \qquad i = n-1, n \ . \qquad (12)$$

alınır.

Çünki,

$$\frac{1}{|t+\xi_i(x-y)|} < 1$$

doğrudur.

Onda $x \to +\infty$ olduqda limitə keçsək (8) münasibətlərini alarıq.

Bu teoremdən alınır ki, hər bir verilən $\{a_1(t), \dots, a_{n-2}(t)\}$, $(a_i(t) \in L_\infty(-\infty, +\infty), i = 1, \dots, n-2)$ gələn dalğaları üçün yeganə $U^k(x,t)$ (k $= 1, \dots, n-2$) həlləri var və bu həllər üçün səpilən $\{b_{n-1}^k(t), b_n^k(t)\}$, $b_i^k(t) \in L_\infty(-\infty, +\infty)$ dalğaları ilə ifadə edilən (8) asimptotikası doğrudur.

Yəni

$\{a_1(t), \dots, a_{n-2}(t)\} \to U^k(x,t) \to \{b_{n-1}^k(t), b_n^k(t)\}$uyğunluğu birqiymətlidir.

Onda

$S^k\colon \{a_1(t), \dots, a_{n-2}(t)\}^T \to \{b_{n-1}^k(t), b_n^k(t)\}^T, k = \overline{1, n-2}$

operatorunu təyin etmək olar.

$S = (S^1, \dots, S^{n-2})$

operatoruna yarımoxda səpilmə operatoru deyilir.

S operatoruna görə əmsalların tapılması məsələsi tərs səpilmə məsələsi adlanır.

Tərs məsələnin öyrənilməsi 2n sayda çevirmə operatorlarından, Volter operatorlar üzrə faktorizasiya xassələrindən istifadə edilməklə bütün oxda tərs səpilmə məsələsinin öyrənilməsinə gətirilir.

ƏDƏBİYYAT

1. *Нижник Л.П* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. Киев: Наукова Думка, 1991, 232 с.
2. *Нижник Л.П, Тарасов В.Г.* Обратная нестационарная задача рассеяния для гиперболической системы трех уравнений // ДАН СССР 1977, т.233, №3 с. 300-303.
3. *Искендеров Н.Ш.* Обратная задача рассеяния для гиперболической системы п управнений первого порядка на полуоси ||Укр.мат. журнал, 1991, т.43, №12, с.1638-1646.
4. *Искендеров Н.Ш., Исмаилов М.И.* Обратная нестационарная задача рассеяния для гиперболической системы четырех уравнений первого порядка на полуоси. // Труды ИММ АН Азербайджана, 1996, IV (XII), с. 161-168.

5. *Iskenderov N.Sh., Mamedov A.A.* Inverse scattering problem for hyperbolic system of five equations on semi axis // International Journal of Pure and Applied Mathematics, vol.117, №4, 2017, p. 675-684.
6. *Искендеров Н.Ш, Джафарова Л.Н.* Прямая и обратная нестационарная задача рассеяния для гиперболической системы шести уравнений первого порядка на полуоси. || Сборник прац Ин-ту математики НАН Украины, 2017, т.14, №3, с. 67-99.
7. *Ismailov M.I.* Inverse scattering problem for hyperbolic systems on a semi-axis in the case of equal number of incident and scattered Waves // Inverse Problems, 2006, 22, p.955-974.
8. *Iskenderov N.Sh., Ismailov M.I.* Inverse scattering problem for non-stationary Dirac – type systems on the half-plane // I. Differential Equations, 246, 2009, p.277-290.
9. *Iskenderov N.Sh., Ismailov M.I.* On the inverse scattering transform of a nonlinear evolution equation with 2+1 dimensions related to nonstrict hyperbolic systems // Nonlinearity, 25, 2012, p. 1967-1979.

Redaksiyaya daxil olub 17.01.2021