УДК. 517.927.25

Р.И.Шахбазов
Азербайджанский государственный педагогический университет
rahimshahbazov@bk.ru

СХОДИМОСТЬ БИОРТОГОНАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ ИЗ ПРОСТРАНСТВА $W_2^1(G)$ ПО КОРНЕВЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Ключевые слова: *абсолютная сходимость, равномерная сходимость, корневые функции*

В работе изучается абсолютная и равномерная сходимость биортогонального разложения функции из класса $W_2^1(G)$, $G=(0,1)$, по корневым функциям обыкновенного дифференциального оператора нечетного порядка. Установлены достаточные условия для абсолютной и равномерной сходимости и найдена оценка для скорости равномерной сходимости этих разложений на отрезке $\overline{G}=[0,1]$.

R.İ.Şahbazov

$W_2^1(G)$ FƏZASINDAN OLAN FUNKSİYANIN TƏK TƏRTİBLİ DİFERENSİAL OPERATORUN KÖK FUNKSİYALARI ÜZRƏ BİORTOQONAL AYRILIŞININ YIĞILMASI

Açar sözlər: *mütləq yığılma, müntəzəm yığılma, kök funksiyalar*

İşdə $W_2^1(G)$, $G=(0,1)$, sinfindən olan funksiyanın tək tərtibli adi diferensial operatorun kök funksiyaları üzrə biortoqonal ayrılışının mütləq və müntəzəm yığılması öyrənilir. Bu ayrılışların mütləq və müntəzəm yığılması üçün kafi şərtlər tapılır və $\overline{G}=[0,1]$ parçasında müntəzəm yığılma sürəti qiymətləndirilir.

R.I.Shahbazov

CONVERGENCE OF THE BIORTHOGONAL EXPANSION OF FUNCTION FROM THE SPACE $W_2^1(G)$ BY THE ROOT FUNCTIONS OF AN ODD ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR

Keywords: *absolute convergence, uniform convergence, root functions*
In the paper we study the absolute and uniform convergence of biorthogonal expansions of functions from the class $W_2^1(G)$, $G=(0,1)$, by the root functions of an ordinary differential operator of odd order. Sufficient conditions of absolute and uniform convergence are obtained and the rate of uniform convergence of these expansions on the interval $\overline{G}=[0,1]$ is found.

1. Введение и формулировка результатов

Рассмотрим на интервале $G=(0,1)$ формальный дифференциальный оператор нечетного порядка

$$Lu = u^{(2m+1)} + P_2(x)u^{(2m-1)} + \ldots + P_{2m+1}(x)u\,, \qquad m=1,2,\ldots,$$

с комплекснозначными коэффициентами $P_l(x)\in W_1^{2m+1-l}(G)$, $l=\overline{2,2m+1}$. Обозначим через $D(G)$ класс функций абсолютно непрерывных со своими производными до $2m$ - го порядка включительно на $\overline{G}=[0,1]$.

Рассмотрим произвольную систему $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ состоящую из собственных и присоединенных (корневых) функций оператора L, отвечающую системе собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и потребуем чтобы вместе с каждой корневой функцией порядка $r\ge 1$ эта система включала в себя соответствующие ей корневые функции порядка меньше r и ранг собственных функций был равномерно ограничен. Это означает, что $u_k(x)\in D(G)$ и удовлетворяет почти всюду в G уравнению

$$Lu_k + \lambda_k u_k = \theta_k u_{k-1}\,,$$

где θ_k равно либо 0 (в этом случае $u_k(x)$ - собственная функция), либо 1 (в этом случае мы требуем $\lambda_k=\lambda_{k-1}$ и называем $u_k(x)$ - присоединенной функцией), $\theta_1=0$ (см. [1]).

Будем требовать, что система корневых функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и соответствующая система собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям ***A***:

1) система $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полна и минимальна в $L_2(G)$;

2) выполняются условия Карлемана и «сумма единиц»

$$\left|Im\,\mu_k\right| \le const, \qquad k = 1,2,..., \tag{1}$$

$$\sum_{\tau \le \rho_k \le \tau+1} 1 \quad \le const, \quad \forall \tau \ge 0, \quad \rho_k = Re\,\mu_k , \tag{2}$$

где

$$\mu_k = \begin{cases} (-i\,\lambda_k)^{1/(2m+1)} & при \quad Im\,\lambda_k \ge 0\,, \\ (i\,\lambda_k)^{1/(2m+1)} & при \quad Im\,\lambda_k < 0\,, \end{cases}$$

$$\left(\rho e^{i\varphi}\right)^{1/(2m+1)} = \rho^{1/(2m+1)}\, e^{i\varphi/(2m+1)}, \qquad -\pi < \varphi \le \pi\,.$$

3) система $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, биортогонально сопряжена к $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, является системой корневых функций формально сопряженного оператора $L^*\upsilon = (-1)^{2m+1}\upsilon^{(2m+1)} + (-1)^{2m-1}\left(\overline{P_2}\,\upsilon\right)^{(2m-1)} + ... + \overline{P_{2m+1}}\,\upsilon,$

т.е $L^*\upsilon_k + \overline{\lambda_k}\,\upsilon_k = \theta_{k+1}\,\upsilon_{k+1}$;

4) для систем $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ выполняются «антиаприорные » оценки

$$\theta_k \left\|u_{k-1}\right\|_2 \le const\left(1+\left|\mu_k\right|\right)^{2m} \left\|u_k\right\|_2 , \tag{3}$$

$$\theta_{k+1} \left\|\upsilon_{k+1}\right\|_2 \le const\left(1+\left|\mu_k\right|\right)^{2m} \left\|\upsilon_k\right\|_2 , \tag{4}$$

где $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(G)}$.

5) для любого $\tau \ge 0$ выполняются оценки

$$\sum_{0 \le \rho_k \le \tau} \|u_k\|_{\infty}^2 \, \|u_k\|_2^{-2} \le const\,(1+\tau), \tag{5}$$

$$\sum_{0 \le \rho_k \le \tau} \|\upsilon_k\|_{\infty}^2 \, \|\upsilon_k\|_2^{-2} \le const\,(1+\tau); \tag{6}$$

6) для любого номера k выполняется оценка

$$\|u_k\|_2 \, \|\upsilon_k\|_2 \le const\,. \tag{7}$$

Пусть $f(x)$ произвольная функция из класса $W_2^1(G)$. Составим частичную сумму её биортогонального разложения по системе корневых функций оператора L:

$$\sigma_\nu(x,f) = \sum_{\rho_k \le \nu} f_k\, u_k(x), \qquad \nu > 0\,,$$

где биортогональные коэффициенты f_k определяются формулой

$$f_k = (f, \upsilon_k) = \int_G f(x)\, \overline{\upsilon_k(x)}\; dx.$$

В данной работе мы доказываем следующую теорему об абсолютной и равномерной сходимости биортогонального разложения функции $f(x)$ по системе корневых функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема. *Пусть системы* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяют условиям* ***A****, для функции* $f(x) \in W_2^1(G)$ *и биортогональной системы выполняются условия*

$$\left| f(x)\, \overline{\upsilon_k^{(2m)}(x)} \Big|_0^1 \right| \le C(f) |\mu_k|^{\delta}\, \| \upsilon_k \|_{\infty}, \tag{8}$$

где $0 \le \delta < 2m$, $\rho_k \ge 1$.

Тогда биортогональное разложение функции $f(x)$ *сходится абсолютно и равномерно на* $\overline{G} = [0,1]$ *и справедлива оценка*

$$\| \sigma_\nu(\cdot, f) - f \|_{C[0,1]} \le const \left\{ C(f) \left(1 + \frac{1}{2m - \delta} \right)^2 \nu^{\delta - 2m} + \nu^{-\frac{1}{2}} \| f' \|_2 + \right. \tag{9}$$

$$\left. + \sum_{l=2}^{2m} \nu^{\frac{1}{2} - l} \| Q_l\ f \|_2 + \nu^{-2m} \| Q_{2m+1} \|_1 \right\}, \qquad \nu \ge 2,$$

где

$$Q_l(x) = \sum_{s=0}^{l-2} (-1)^{2m-l+s}\, C_{2m+1-l+s}^{s}\, P_{l-s}^{(s)}(x),$$

$l = \overline{2, 2m+1}$, *const не зависит от функции* $f(x)$.

Следствие. *Если в теореме функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию* $f(0) = f(1) = 0$, *то её биортогональное разложение сходится абсолютно и равномерно на* $\overline{G} = [0,1]$ *и справедливы оценки*

$$\| \sigma_\nu(\cdot, f) - f \|_{C[0,1]} \le const\, \nu^{-\frac{1}{2}} \| f \|_{W_2^1(G)}, \qquad \nu \ge 2; \tag{10}$$

$$\| \sigma_\nu(\cdot, f) - f \|_{C[0,1]} = o\left(\nu^{-\frac{1}{2}} \right), \qquad \nu \to +\infty, \tag{11}$$

где символ «о» зависит от $f(x)$, *а const не зависит от* $f(x)$.

Отметим, что подобные результаты для операторов четного порядка установлены ранее в работах [2], [3], [4], [5], [6]. При *m=1,* т.е., для оператора третьего порядка эти результаты доказаны в работах [7], [8].

2. Некоторые вспомогательные утверждения

Из результатов работ [9-10] следует, что при выполнении условия ***A*** каждая из систем $\left\{u_k(x)\|u_k\|_2^{-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ и $\left\{\upsilon_k(x)\|\upsilon_k\|_2^{-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(G)$. Следовательно, для них верно неравенство Бесселя в $L_2(G)$.

Утверждение 1. *Коэффициенты Фурье* f_k *биортогонального разложения функции* $f(x)\in W_2^1(G)$ *имеют следующее представление*

$$f_k=(f,\upsilon_k)=\frac{1}{\lambda_k}\sum_{i=0}^{n_k}\frac{f(x)\overline{\upsilon_{k+i}^{(2m)}(x)}\Big|_0^1}{\lambda_k^i}-\frac{1}{\lambda_k}\sum_{i=0}^{n_k}\frac{\left(f',\upsilon_{k+i}^{(2m)}\right)}{\lambda_k^i}+$$

$$+\frac{1}{\lambda_k}\sum_{i=0}^{n_k}\frac{1}{\lambda_k^i}\sum_{l=2}^{2m+1}\left(Q_l\,f,\upsilon_{k+i}^{(2m+1-l)}\right),\qquad \lambda_k\neq 0 \tag{12}$$

где n_k *порядок корневой функции* $\upsilon_k(x)$.

Доказательство. Пусть функция $\upsilon_k(x)$ присоединенная функция оператора L^*, $\overline{\lambda_k}$ - соответствующее собственное значение, причем $\lambda_k\neq 0$. По определению функции $\upsilon_k(x)$ имеет место равенство

$$\upsilon_k=-\frac{L^*\upsilon_k}{\overline{\lambda_k}}+\theta_{k+1}\frac{\upsilon_{k+1}}{\overline{\lambda_k}}=-\frac{1}{\overline{\lambda_k}}\left((-1)^{(2m+1)}\upsilon_k^{(2m+1)}+(-1)^{(2m-1)}\left(\overline{P_2}\,\upsilon_k\right)^{(2m-1)}+\ldots+\overline{P_{2m+1}}\,\upsilon_k\right)+$$

$$+\theta_{k+1}\frac{\upsilon_{k+1}}{\overline{\lambda_k}}\ ,$$

с учетом которого получаем

$$(\upsilon_k\,,f)=-\frac{1}{\overline{\overline{\lambda_k}}}\left(L^*\upsilon_k\,,f\right)+\frac{\theta_{k+1}}{\overline{\overline{\lambda_k}}}(\upsilon_{k+1}\,,f)=\frac{1}{\overline{\overline{\lambda_k}}}\left(\upsilon_k^{(2m+1)},f\right)+(-1)^{2m-1}\frac{1}{\overline{\overline{\lambda_k}}}\left(\left(\overline{P_2}\,\upsilon_k\right)^{(2m-1)},f\right)+\ldots$$

$$+(-1)\frac{1}{\overline{\overline{\lambda_k}}}\left(\overline{P_{2m+1}}\,\upsilon_k\,,f\right)+\frac{\theta_{k+1}}{\overline{\overline{\lambda_k}}}(\upsilon_{k+1}\,,f)=\frac{1}{\overline{\overline{\lambda_k}}}\left(\upsilon_k^{(2m+1)},f\right)+\frac{1}{\overline{\overline{\lambda_k}}}\left(\upsilon_k^{(2m-1)},Q_2\,f\right)+$$

$$+\frac{1}{\overline{\overline{\lambda_k}}}\left(\upsilon_k^{(2m-2)},Q_3\,f\right)+\ldots+\frac{1}{\overline{\overline{\lambda_k}}}\left(\upsilon_k\,,Q_{2m+1}\,f\right)+\frac{\theta_{k+1}}{\overline{\overline{\lambda_k}}}(\upsilon_{k+1}\,,f).$$

Следовательно, имеет место рекуррентное соотношение

$$\left(\upsilon_k, f\right)=\frac{1}{\overline{\lambda_k}}\left[\left(\upsilon_k^{(2m+1)}, f\right)+\sum_{l=2}^{2m+1}\left(\upsilon_k^{(2m+1-l)}, Q_l\, f\right)\right]+\frac{\overline{\theta_{k+1}}}{\overline{\lambda_k}}\left(\upsilon_{k+1}, f\right).$$

Учитывая, что $\theta_{k+1}=\theta_{k+2}=\ldots=\theta_{k+n_k}=1$, $\theta_{k+n_k+1}=0$ из этого рекуррентного соотношения получаем

$$\left(\upsilon_k, f\right)=\frac{1}{\overline{\lambda_k}}\sum_{i=0}^{n_k}\frac{\left(\upsilon_{k+i}, f\right)}{\overline{\lambda_k^i}}+\frac{1}{\overline{\lambda_k}}\sum_{i=0}^{n_k}\sum_{l=2}^{2m+1}\frac{1}{\overline{\lambda_k^i}}\left(\upsilon_{k+i}^{(2m+1-l)}, Q_l\, f\right).$$

Сначала проводя интегрирование по частям в выражениях $\left(\upsilon_{k+i}^{(2m+1)}, f\right), i=\overline{0,n_k}$, а затем взяв комплексное сопряжение получим формулу (12).

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *При выполнении условий (1), (2), (4), (6) и 3) системы* $\left\{\upsilon_k^{(s)}(x)\,\|\,\upsilon_k\,\|_2^{-1}\,\mu_k^{-s}\right\}$, $\mu_k\neq 0$, $s=\overline{1,2m}$, *являются бесселевыми в пространстве* $L_2(G)$, *т.е. для произвольной функции* $f(x)\in L_2(G)$ *справедливо неравенство Бесселя*

$$\left(\sum_{\mu_k\neq 0}\left|f, \upsilon_k^{(s)}\,\|\,\upsilon_k\,\|_2^{-1}\,\mu_k^{-s}\right|^2\right)^{1/2}\leq M\,\|\,f\,\|_2\,, \tag{13}$$

где $M>0$ *некоторая постоянная не зависящая от* $f(x)$.

Это утверждение доказано в работах [9-10].

Утверждение 3. *При выполнении условий (5)–(6) для любых* $\mu\geq 2$ *и* $\delta>0$ *справедливы оценки*

$$\sum_{\rho_k\geq\mu}\left|\mu_k\right|^{-(1+\delta)}\|\,u_k\,\|_\infty^2\,\|\,u_k\,\|_2^{-2}\leq C_1(\delta)\mu^{-\delta}\,, \tag{14}$$

$$\sum_{\rho_k\geq\mu}\left|\mu_k\right|^{-(1+\delta)}\|\,\upsilon_k\,\|_\infty^2\,\|\,\upsilon_k\,\|_2^{-2}\leq C_2(\delta)\mu^{-\delta}\,, \tag{15}$$

где $C_1(\delta), C_2(\delta)$ *положительные постоянные не зависящие от* μ.

Доказательство. Докажем оценки (14). Фиксируем произвольное натуральное число p. Тогда

$$\sum_{\mu\leq\rho_k\leq[\mu]+p}\left|\mu_k\right|^{-(1+\delta)}\|\,u_k\,\|_\infty^2\,\|\,u_k\,\|_2^{-2}\leq\sum_{[\mu]\leq\rho_k\leq[\mu]+p}\left|\rho_k\right|^{-(1+\delta)}\|\,u_k\,\|_\infty^2\,\|\,u_k\,\|_2^{-2}\leq$$

$$\leq\sum_{n=[\mu]}^{[\mu]+p}n^{-(1+\delta)}\sum_{n\leq\rho_k<n+1}\|\,u_k\,\|_\infty^2\,\|\,u_k\,\|_2^{-2}\,. \tag{16}$$

Обозначая $b_n = n^{-(1+\delta)}$, $a_n = \sum\limits_{n\le\rho_k<n+1} \| u_k \|_\infty^2 \| u_k \|_2^{-2}$, $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$

и воспользуясь преобразованиями Абеля из (16) получаем

$$\sum_{\mu\le\rho_k\le[\mu]+\rho} |\mu_k|^{-(1+\delta)} \| u_k \|_\infty^2 \| u_k \|_2^{-2} \le \sum_{n=[\mu]}^{[\mu]+p} a_n b_n = \sum_{n=[\mu]}^{[\mu]+p-1} S_n (b_n - b_{n+1}) + S_{[\mu]+p} b_{[\mu]+p} - S_{[\mu]-1} b_{[\mu]} \le$$

$$\le \sum_{n=[\mu]}^{[\mu]+p-1} S_n \left(n^{-(1+\delta)} - (n+1)^{-(1+\delta)}\right) + ([\mu]+p)^{-(1+\delta)} S_{[\mu]+p} + [\mu]^{-(1+\delta)} S_{[\mu]-1}$$

Учитывая здесь оценку $S_n \le const(n+1)$, которая следует из (5), приходим к неравенству:

$$\sum_{\mu\le\rho_k\le[\mu]+p} |\mu_k|^{-(1+\delta)} \| u_k \|_\infty^2 \| u_k \|_2^{-2} \le const \sum_{n=[\mu]}^{[\mu]+p-1} (n+1) \frac{(1+\delta)(n+1)^\delta}{(n(n+1))^{1+\delta}} + const([\mu]+p)([\mu]+p)^{-(1+\delta)} +$$

$$+ const\,[\mu][\mu]^{-(1+\delta)} \le const \left((1+\delta) \sum_{n=[\mu]}^{\infty} n^{-(1+\delta)} + [\mu]^{-\delta} \right) \le C_1(\delta)\mu^{-\delta},$$

где $C_1(\delta) = const\left(1+\delta^{-1}\right)$.

Следовательно, в силу произвольности натурального числа p справедлива оценка (14). Точно также доказывается оценка (15). Утверждение 3 доказано.

Обозначим

$$I_l(\mu,x) \equiv I_l(\mu) = \sum_{\rho_k\ge\mu} \left| \lambda_k^{-1} \sum_{j=0}^{n_k} \lambda_k^{-j} \left(Q_l\, f, \upsilon_{k+j}^{(2m+1-l)}\right) \right| |u_k(x)|,$$

где $\mu \ge 2$; $l = \overline{2, 2m+1}$; $x \in \overline{G}$.

Утверждение 4. *При выполнении условий* ***A*** *справедливы оценки*:

$$I_l(\mu) \le const\ \mu^{\frac{1}{2}-l} \|Q_l\ f\|_2, \quad l = \overline{2,2m}; \tag{18}$$

$$I_{2m+1}(\mu) \le const\ \mu^{-2m} \|Q_{2m+1}\ f\|_1. \tag{19}$$

Доказательство. Учитывая $|\lambda_k| = |\mu_k|^{2m+1}$ и применяя оценки (4), (6), получаем

$$I_l(\mu)\le \sum_{\rho_k\ge\mu}|\lambda_k|^{-1}\sum_{j=0}^{n_k}|\lambda_k|^{-j}\left|\left(Q_l f,\upsilon_{k+j}^{(2m+1-l)}\right)\right||u_k(x)|\le \sum_{\rho_k\ge\mu}|\lambda_k|^{-1}\|u_k\|_\infty\sum_{j=0}^{n_k}|\mu_k|^{-(2m+1)j}\times$$

$$\times\left|\left(Q_l f,\|\upsilon_{k+j}\|_2^{-1}\mu_k^{l-2m-1}\upsilon_{k+j}^{(2m+1-l)}\right)\right||\mu_k|^{2m+1-l}\|\upsilon_{k+j}\|_2\le$$

$$\le const\sum_{\rho_k\ge\mu}\|u_k\|_\infty\|\upsilon_k\|_2|\mu|_k^{-l}\sum_{j=0}^{n_k}\left|\left(Q_l f,\|\upsilon_{k+j}\|_2^{-1}\mu_k^{l-2m-1}\upsilon_{k+j}^{(2m+1-l)}\right)\right|\le$$

$$\le const\sum_{\rho_k\ge\mu}\|u_k\|_\infty\|u_k\|_2^{-1}|\mu_k|^{-l}\sum_{j=0}^{n_k}\left|\left(Q_l f,\mu_k^{l-2m-1}\|\upsilon_{k+j}\|_2^{-1}\upsilon_{k+j}^{(2m+1-l)}\right)\right|,\qquad l=\overline{2,2m}.$$

Применим неравенство Коши – Буняковского для суммы. В результате получаем неравенство

$$I_l(\mu)\le const\left(\sum_{\rho_k\ge\mu}|\mu_k|^{-2l}\|u_k\|_\infty^2\|u_k\|_2^{-2}\right)^{1/2}\left(\sum_{\rho_k\ge\mu}\left(\sum_{j=0}^{n_k}\left|\left(Q_l f,\mu_k^{l-2m-1}\|\upsilon_{k+j}\|_2^{-1}\upsilon_{k+j}^{(2m+1-l)}\right)\right|\right)^2\right)^{1/2}.$$

Отсюда в силу $\sup\limits_k n_k<\infty$ (это следует из условия (2)) и утверждений 2 и 3 (см. (13) и (14)) приходим к неравенству

$$I_l(\mu)\le const\mu^{\frac{1}{2}-l}\left(\sup_k n_k\right)\|Q_l f\|_2\le const\,\mu^{\frac{1}{2}-l}\|Q_l f\|_2,\quad l=\overline{2,\,2m}.$$

Оценка (18) установлена.

Для доказательства оценки (19) сначала применим неравенство Гёльдера при $p=1,\,q=\infty$, затем учтем $\sup\limits_k n_k<\infty$ и применим антиаприорную оценку (4). В результате получаем

$$I_{2m+1}(\mu)\le\sum_{\rho_k\ge\mu}|\mu_k|^{-(2m+1)}\left(\sum_{j=0}^{n_k}|\mu_k|^{-(2m+1)j}\|\upsilon_{k+j}\|_\infty\right)\|Q_{2m+1}f\|_1.$$

Отсюда в силу неравенства Коши – Буняковского, условия (7) и утверждения 3 следует, что

$$I_{2m+1}(\mu)\le const\left(\sum_{\rho_k\ge\mu}|\mu_k|^{-(2m+1)}\|u_k\|_\infty^2\|u_k\|_2^{-2}\right)^{1/2}\left(\sum_{\rho_k\ge\mu}|\mu_k|^{-(2m+1)}\|\upsilon_k\|_\infty^2\|\upsilon_k\|_2^{-2}\right)^{1/2}\|Q_{2m+1}f\|_1$$

$$\le const\,\mu^{-2m}\|Q_{2m+1}f\|_1.$$

Утверждение 4 доказано.

Утверждение 5. *При выполнении условий* ***A*** *и (8) справедлива оценка*

$$A(x,\mu)\equiv \sum_{\rho_k\geq\mu} |\lambda_k|^{-1} |u_k(x)| \sum_{i=0}^{n_k} |\lambda_k|^{-i} \left| f(t)\, \overline{\upsilon_{k+i}^{(2m)}(t)} \Big|_0^1 \right| \leq$$

$$\leq const\; C(f) \left(1+\frac{1}{2m-\delta}\right)^2 \nu^{\delta-2m},\; x\in\overline{G},\quad \mu\geq 2. \tag{20}$$

Доказательство. Из условия (8) следует, что

$$A(x,\mu)\leq C(f) \sum_{\rho_k\geq\mu} |\mu_k|^{\delta-2m-1} \|u_k\|_\infty \left(\sum_{i=0}^{n_k} |\mu_k|^{-(2m+1)i} \|\upsilon_{k+i}\|_\infty \right).$$

Применяя условия (4), (7) и учитывая $\sup_k n_k < \infty$, получаем

$$A(x,\mu)\leq const\, C(f) \sum_{\rho_k\geq\mu} |\mu_k|^{\delta-2m-1} \|u_k\|_\infty \|\upsilon_k\|_\infty \leq$$

$$\leq const\; C(f) \sum_{i=0}^{n_k} \left(|\mu_k|^{\frac{(\delta-2m-1)}{2}} \|u_k\|_\infty \|u_k\|_2^{-1} \right) \left(|\mu_k|^{\frac{(\delta-2m-1)}{2}} \|\upsilon_k\|_\infty \|\upsilon_k\|_2^{-1} \right).$$

В силу неравенства Коши – Буняковского и утверждения 3 из последнего соотношения следует

$$A(x,\mu)\leq const\, C(f)\, C_1(2m-\delta)\, C_2(2m-\delta)\, \mu^{-(2m-\delta)} \leq const\, C(f) \left(1+\frac{1}{2m-\delta}\right)^2 \mu^{-(2m-\delta)},$$

где $C_1(2m-\delta), C_2(2m-\delta)$ постоянные из леммы 3, которые не превосходят величины $const\left(1+\dfrac{1}{2m-\delta}\right)$. Равномерная сходимость ряда $A(x,\mu)$ и оценка (20) доказаны. Утверждение 5 доказано.

Утверждение 6. *При выполнении условий **A** ряд*

$$B(x,\mu)\equiv \sum_{\rho_k\geq\mu} |\lambda_k|^{-1} |u_k(x)| \left| \sum_{i=0}^{n_k} |\lambda_k|^{-i} \right| \left| \left(f',\upsilon_{k+i}^{(2m)} \right) \right|$$

равномерно сходится на $\overline{G}=[0,1]$ *и справедлива оценка*

$$B(x,\mu)\leq const\; \mu^{-1/2} \|f'\|_2,\quad \mu\geq 2. \tag{21}$$

Доказательство. С учетом равенства $|\mu_k|^{2m+1}=|\lambda_k|$ представим ряд $B(x,\mu)$ в виде

$$B(x,\mu)= \sum_{\rho_k\geq\mu} |\mu_k|^{-1} \left(\sum_{i=0}^{n_k} \left| \left(f',\mu_k^{-2m} \|\upsilon_{k+i}\|_2^{-1} \upsilon_{k+i}^{(2m)} \right) \right| |\mu_k|^{-(2m+1)i} \|\upsilon_{k+i}\|_2 \right) |u_k(x)|$$

Применим здесь антиаприорную оценку (4) и условие 7.

$$B(x,\mu)\le const \sum_{\rho_k\ge\mu} |\mu_k|^{-1} \|u_k\|_\infty \left(\sum_{i=0}^{n_k} \left| \left(f', \mu_k^{-2m} \ \|\upsilon_{k+i}\|_2^{-1} \upsilon_{k+i}^{(2m)} \right) \right| \|\upsilon_k\|_2 \right) \le$$

$$\le const \sum_{\rho_k\ge\mu} \|u_k\|_\infty \ \|u_k\|_2^{-1} \ |\mu_k|^{-1} \left(\sum_{i=0}^{n_k} \left| \left(f', \mu_k^{-2m} \ \|\upsilon_{k+i}\|_2^{-1} \ \upsilon_{k+i}^{(2m)} \right) \right| \right).$$

Отсюда в силу неравенства Коши – Буняковского, утверждений 2 и 3 получаем

$$B(x,\mu)\le const \left(\sum_{\rho_k\ge\mu} \mu_k^{-2} \|u_k\|_\infty^2 \|u_k\|_2^{-2} \right)^{1/2} \left(\sum_{\rho_k\ge\mu} \left(\sum_{i=0}^{n_k} \left| \left(f', \mu_k^{-2m} \ \|\upsilon_{k+i}\|_2^{-1} \ \upsilon_{k+i}^{(2m)} \right) \right| \right)^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le const \ \mu^{-1/2} \left(\sum_{\rho_k\ge\mu} n_k \sum_{i=0}^{n_k} \left| \left(f', \mu_k^{-2m} \ \|\upsilon_{k+i}\|_2^{-1} \upsilon_{k+i}^{(2m)} \right) \right|^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le const \left(\sup_k n_k \right)^2 \ \mu^{-\frac{1}{2}} \|f'\|_2 \le const \ \mu^{-\frac{1}{2}} \ \|f'\|_2 \ .$$

Утверждение 6 доказано.

3. Доказательство теоремы.

Докажем равномерную сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \ \|u_k(x)\| \tag{22}$$

на $\overline{G}=[0,1]$. Для этого рассмотрим его остаток

$$R(\mu,x)=\sum_{\rho_k\ge\mu} |f_k| \, |u_k(x)|$$

и докажем, что равномерно относительно $x\in\overline{G}$

$$\lim_{\mu\to+\infty} R(\mu,x)=0. \tag{23}$$

В силу утверждения 1 выполняется неравенство

$$R(\mu,x)\le A(x,\mu)+B(x,\mu)+\sum_{l=2}^{2m+1} I_l(\mu,x).$$

Применяя здесь утверждения 4, 5 и 6 (оценки (18) – (21)) получаем для $R(\mu,x)$ равномерную по $x\in\overline{G}$ неравенство

$$0 \le R(\mu,x) \le const\left\{C(f)\left(1+\frac{1}{2m-\delta}\right)^2 \mu^{\delta-2m} + \mu^{-1/2}\|f'\|_2 + \sum_{l=2}^{2m}\mu^{\frac{1}{2}-l}\|Q_l\ f\|_2 + \mu^{-2m}\|Q_{2m+1}\ f\|_1\right\}.$$

Следовательно, справедливо соотношение (23) и ряд (22) равномерно сходится на $\overline{G}$. Из равномерной сходимости ряда (22) вытекает равномерная сходимость биортогонального разложения функции $f(x)$ по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Так как система $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $L_2(G)$, а функция $f(x)$ абсолютно непрерывна $\overline{G}=[0,1]$, то её биортогональный ряд равномерно сходится именно к $f(x)$, т.е. справедливо равенство

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k\, u_k(x), \quad x\in\overline{G}.$$

Теперь оценим разность $f(x)-\sigma_\nu(x,f)$ в метрике $C[0,1]$.

$$\|f-\sigma_\nu(\cdot,f)\|_{C[0,1]}=\left\|\sum_{\rho_k>\nu} f_k\, u_k\right\|_{C[0,1]} \le \max_{x\in\overline{G}}\sum_{\rho_k\ge\nu}|f_k|\,|u_k(x)|=\max_{x\in\overline{G}}R(\nu,x)\le$$

$$\le const\left\{C(f)\left(1+\frac{1}{2m-\delta}\right)^2 \nu^{\delta-2m}+\nu^{-\frac{1}{2}}\|f'\|_2+\sum_{l=2}^{2m}\nu^{\frac{1}{2}-l}\|Q_l\ f\|_2+\nu^{-2m}\|Q_{2m+1}\ f\|_1\right\}.$$

Теорема доказана.

Если функция $f(x)\in W_2^1(G)$ удовлетворяет условию $f(0)=f(1)=0,$ то оценка (10) следует из оценки (9). При этом достаточно учесть $C(f)=0$, $\|Q_l\ f\|_2\le\|Q_l\|_2\|f\|_\infty$, $l=\overline{2,2m}$; $\|Q_{2m+1}\ f\|_1\le\|Q_{2m+1}\|_1\|f\|_\infty$ и $\|f\|_\infty\le\|f'\|_2$. А для обоснования оценки (11) следует обратить внимание на оценки ряда $B(x,\nu)$ и учесть

$$\sum_{\rho_k\ge\nu} n_k\sum_{i=0}^{n_k}\left|\left(f'\ \mu_k^{-2m}\|\upsilon_{k+i}\|_2^{-1}\upsilon_{k+i}^{(2m)}\right)\right|^2=o(1)$$

при $\nu\to+\infty$, ибо $\sup_k n_k<\infty$ и система $\left\{\mu_k^{-2m}\|\upsilon_{k+i}\|_2^{-1}\upsilon_{k+i}^{(2m)}(x)\right\}_{\rho_k>0,0\le i\le n_k}$ бесселева в $L_2(G)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blasco Ильин В.А.* Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I. // Дифференциальные уравнения. 1980, т.16, №5, с. 771-794
2. *Kurbanov V.M., Safarov R.A.* Uniform convergence of biorthogonal expansion responding to the Schrodinger operator // Proc.of IMM of NAS of Azerbaijan, 2004, V. XX, p.63-70.
3. *Ломов И.С.* Равномерная сходимость биортогонального ряда для оператора Шредингера с многоточечными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. 2002, т.38, №7, с.890-896.
4. *Kurbanov V.M, Ibadov E.D.* On the properties of systems of root functions of a second – order discontinuous operator // Dokl. Math., 2009. V.80, №1. p.516-520.
5. *Y.I. Guseynova.* Convergence of biorthogonal expansion of vector – functions from the class in eigen and associated vector – functions of fourth order differential operator with matrix coefficients. Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.- Tech. Math. Sci. 36 (1), 54-63 (2016).
6. *Курбанов В.М., Годжаева Х.Р.* Сходимость биортогонального разложения функции из класса по собственным функциям обыкновенного дифференциального оператора четного порядка. AMEA RMİ – nun xəbərləri, cild 43, № 2, səh. 261-269 (2017).
7. *Ахундова Э.Б.* Абсолютная и равномерная сходимость биортогонального разложения функции из класса по корневым функциям дифференциального оператора третьего порядка. Известия педагогического Университета. 2015. №2. с. 18-23.
8. *Курбанов В.М., Ю.Г. Аббасова.* Сходимость спектрального разложения функции из класса, по собственным вектор-функциям дифференциального оператора третьего порядка. Укр. мат. журн. 2017, т.69, № 6, с.1-15.
9. *Курбанов В.М.* Об аналоге теоремы Рисса и базисность в системы корневых функций дифференциального оператора. I // Дифференциального уравнения. 2013, т.49, №1, с.9-20.
10. *Курбанов В.М.* Об аналоге теоремы Рисса и базисность в системы корневых функций дифференциального оператора. II // Дифференциального уравнения. 2013, т.49, №4, с.456-468.

Redaksiyaya daxil olub 18.02.2021