Pedaqoji Universitetin Xəbərləri. **Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası – 2021, C. 69, №1, s. 70-80**
Transactions of Pedagogical University. **Series of mathematics and natural sciences – 2021, V. 69, №1, pp. 70-80**

УДК. 517.95

Г.И.Юсифова
Гянджинский Государственный Университет
alievakbar@gmail.com

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ В ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Ключевые слова: *смешанная задача, система гиперболических уравнений, существование решений, единственность*

В работе исследуется смешанная задача для систем полулинейных гиперболических уравнений вырождающихся в параболические уравнения. Доказаны теоремы о существовании и единственности слабых решений.

G.İ.Yusifova

PARABOLİK TƏNLİYƏ CIRLAŞAN YARIMXƏTTİ HİPERBOLİK TƏNLİKLƏRDƏN İBARƏT SİSTEM ÜÇÜN BAŞLANĞIC-SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

Açar sözlər: qarışıq məsələ, hiperbolik tənliklər sistemi, həllin varlığı, həllin yeganəliyi

Bu məqalədə parabolik tənliyə cırlaşan yarımxətti hiperbolik tənliklərdən ibarət sistem üçün qarışıq məsələ araşdırılmış, zəif həllərin varlığı və yeganəliyi haqda teoremlər isbat edilmişdir.

G.I.Yusifova

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF SEMILINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS DEGENERATING INTO PARABOLIC EQUATIONS

Keywords: *mixed problem, system of hyperbolic equations, existence of solutions, uniqueness*

This paper investigates a mixed problem for systems of semilinear hyperbolic equations degenerating into parabolic equations. Theorems on the existence and uniqueness of weak solutions are proved.

Введение

1. Постановка задачи и основные результаты

Начально краевая задача для систем полулинейных гиперболических уравнений исследованы в работах [1-5]. Такие системы возникают в различных задачах механики [6].

В данной работе исследуется начально краевая задача для систем гиперболических полулинейных уравнений вырождающиеся параболическими уравнениям .

Введем следующие обозначения: Пуст $\Omega \subset R^n$ ограниченная область с гладкой границей Г. Через $\|\cdot\|_p$обозначим норму в пространстве $L_p(\Omega)$. В случае p=2 будем использовать обозначения $\|.\|$. $(.,.)$ скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Введем линейные пространств
$H^1 = \{v;\ v, v' \in L_2(\Omega)\},\ H_0^1 = \{v;\ v \in H^1,\ v(0) = 0\}, H^{-1} = (H_0^1)'$.
Пусть E некоторые банахово пространство. Через $L_p(0,T;E)$ обозначим совокупность измеримых функций действующих из $[0,T]$ в E, где

$$\|u\|_{L_p(0,T;E)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_E^p dt\right)^{1/p}, 1 \le p < +\infty .$$

При $p = \infty$ $\|u\|_{L_\infty(0,T;E)} = \mathrm{supess}_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_E$.

Введем также обозначению: $\dot{W}_2^1(0,T;E), = \{v;\ v, v' \in L_2(0,T;E), v(0) = v\,(T) = 0\}$.

В цилиндре $Q_T = [0,T]\times\Omega$ рассмотрим смешанную задачу:

$$\begin{cases} k_{11}(x)u_{1_{tt}} + k_{12}(x)u_{1_t} - \Delta u_1 + |u_1|^{p-1}|u_2|^{p+1}u_1 = f_1(t,x) \\ k_{21}(x)u_{2_{tt}} + k_{22}(x)u_{2_t} - \Delta u_2 + |u_1|^{p+1}|u_2|^{p-1}u_2 = f_2(t,x) \end{cases} \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$u_1(t,x) = 0, \quad u_2(t,x) = 0, \ t \in [0,T], x \in \Gamma \quad (2)$$

и с начальными условиями

$$u_1(0,x) = \phi_1(x), \quad \sqrt{k_{11}(x)}u_{1_t}(0,x) = \psi_1(x). \quad (3)$$

$$u_2(0,x) = \phi_2(x), \quad \sqrt{k_{21}(x)}u_{2_t}(0,x) = \psi_2(x) \quad (4)$$

Предположим, что выполнены следующие условия:
Условия (K).

(i) $k_{11}(\cdot),\quad k_{12}(\cdot),\quad k_{21}(\cdot),\quad k_{22}(\cdot) \in C(\overline{\Omega})$

(ii) $k_{11}(x) \ge 0,\quad k_{12}(x) \ge k_{10} > 0,\ x \in \overline{\Omega}$;
$k_{21}(x) \ge 0,\quad k_{22}(x) \ge k_{20} > 0,\ x \in \overline{\Omega}$.

Условия (P).

$$p > 0 \text{ и дополнительно } p < \frac{n+2}{n-2} \quad \text{, если } n \geq 3.$$

Условия (F).

$$f_i(t,x) \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)), \quad i = 1,2.$$

Определим следующие числа

$$\theta = \frac{2n(p+1)}{(n-2)(p+1)+2np}, \quad \gamma = \frac{2n(p+1)}{(n+2)(p+1)-2np}.$$

Введем также обозначение

$$\alpha = \frac{p+1}{p\theta}, \quad \beta = \frac{p+1}{(p+1)-p\theta}.$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\gamma} = 1, \qquad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = 1$$

и

$$1 < \theta < \frac{p+1}{p}, \quad 1 < \gamma \leq 2(p+1).$$

Теорема 1. Предположим, что выполнены условия (K), (P) и (F). Тогда при любых

$$\phi_1, \phi_2 \in H_0^1 \cap L_{p+1}(\Omega), \;\; \psi_1, \psi_2 \in L_2(\Omega) \tag{5}$$

существуют функции $(u_1(t,x), u_2(t,x)$ такие, что

$$u_1, u_2 \in L_\infty(0,T;H_0^1), \qquad u_{1_t}, u_{2_t} \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)),$$
$$u_1 u_2 \in L_\infty(0,T;L_{p+1}(\Omega)) \tag{6}$$

удовлетворяющие

$$k_{11}(x)u_{1_{tt}} + k_{12}(x)u_{1_t} - \Delta u_1 + |u_1|^{p-1}|u_2|^{p+1}u_1 = f_1(t,x), \tag{7}$$

$$k_{21}(x)u_{2_{tt}} + k_{22}(x)u_{2_t} - \Delta u_2 + |u_1|^{p+1}|u_2|^{p-1}u_2 = f_2(t,x) \tag{8}$$

в $L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)\cap L_\theta(\Omega))$ и начальным условиям (3), (4).

Теорема 2. Предположим, что выполнены условия (K), (F), (5), n=1,2 или n=3 и p=1. Тогда функции$(u_1(t,x), u_2(t,x))$ из класса (6) удовлетворяющие (7), (8) и начальным условиям (3), (4) единственны.

2. Доказательство теоремы существования.

Задачу (1)–(4) будем исследовать методом гиперболической регуляризации. По этой причине сначала будем исследовать смешанную задачу

$$\begin{cases} k_{11\varepsilon}(x)u_{1\varepsilon_{tt}} + k_{12}(x)u_{1\varepsilon_t} - \Delta u_{1\varepsilon} + |u_{1\varepsilon}|^{p-1}|u_{2\varepsilon}|^{p+1}u_{1\varepsilon} = f_1(t,x), \\ k_{21\varepsilon}(x)u_{2\varepsilon_{tt}} + k_{22}(x)u_{2\varepsilon_t} - \Delta u_{2\varepsilon} + \left|u_{1_\varepsilon}\right|^{p+1}\left|u_{2_\varepsilon}\right|^{p-1}u_{2_\varepsilon} = f_2(t,x), \end{cases} \quad (9$$

где $k_{11\varepsilon}(x) = k_{11}(x) + \varepsilon, \; k_{21\varepsilon}(x) = k_{21}(x) + \varepsilon, \; \varepsilon > 0$.

Систему (5) будем исследовать при следующих граничных и начальных условиях:

$$u_{1\varepsilon}(t,x) = u_{2\varepsilon}(t,x) = 0, \quad t \in [0,T], \quad x \in \Gamma, \quad (10$$

$$u_{1\varepsilon}(0,x) = \phi_1(x), \quad u_{2\varepsilon}(0,x) = \phi_2(x), \tag{11}$$

$$u_{1\varepsilon_t}(0,x) = \psi_{1\varepsilon}(x), \quad u_{2\varepsilon_t}(0,x) = \psi_{2\varepsilon}(x), \tag{12}$$

где

$$\psi_{1\varepsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{k_{11}(x)+\varepsilon}}\psi_1(x), \quad \psi_{2\varepsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{k_{21}(x)+\varepsilon}}\psi_2(x).$$

Предположим, что $\{w_\nu\}_{\nu\in N}$ базис в $H_0^1 \cap L^q(\Omega)$, и V_m подпространства элементов натянутые на первые m векторы $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, где $q = max\{p+1, \gamma\}$.

Пусть $\varphi_{1m}(x)$, $\varphi_{2m}(x)$, $\psi_{1m}(x)$, $\psi_{2m}(x) \in V_m$ и при $m \to +\infty$

$$\varphi_{1m}(x) \to \varphi_1(x) \quad \text{в} \quad H_0^1, \tag{13}$$

$$\varphi_{2m}(x) \to \varphi_2(x) \quad \text{в} \quad H_0^1, \tag{14}$$

$$\psi_{1\varepsilon m}(x) \to \psi_{1\varepsilon}(x) \quad \text{в} \quad L_2(\Omega), \tag{15}$$

$$\psi_{2\varepsilon m}(x) \to \psi_{2\varepsilon}(x) \quad \text{в} \quad L_2(\Omega). \tag{16}$$

Пусть

$u_{1\varepsilon m} = \sum_{i=1}^m g_{i\varepsilon m}(t) w_i$, $u_{2\varepsilon m} = \sum_{i=1}^m h_{i\varepsilon m}(t) w_i$,

где коэффициенты $g_{\varepsilon_{im}}(t)$ и $h_{\varepsilon_{im}}(t)$ определяются как решение систем дифференциальных уравнений:

$$(k_{11\varepsilon}(x)u''_{1\varepsilon m}(t), w_j) + (k_{12}(x)u'_{1\varepsilon m}(t), w_j) - (\Delta u_{1\varepsilon m}(t), w_j) -$$

$$-\left(|u_{1\varepsilon m}(t)|^{p-1}|u_{2\varepsilon m}(t)|^{p+1}u_{1\varepsilon m}, w_j\right) = \left(f_1(t,x), w_j\right), \tag{17}$$

$$(k_{12\varepsilon}(x)u''_{2\varepsilon m}(t), w_j) + (k_{22}(x)u'_{2\varepsilon m}(t), w_j) - (\Delta u_{2\varepsilon m}(t), w_j) -$$

$$-\left(|u_{1\varepsilon m}(t)|^{p+1}|u_{2\varepsilon m}(t)|^{p-1}u_{2\varepsilon m}, w_j\right) = \left(f_2(t,x), w_j\right) \tag{18}$$

с начальными условиями

$$u_{1\varepsilon m}(0,x) = \phi_{1m}(x), \quad u_{2\varepsilon m}(0,x) = \phi_{2m}(x) \tag{19}$$

$$u'_{1\varepsilon m}(0,x) = \psi_{1\varepsilon m}(x), \quad u'_{2\varepsilon m}(0,x) = \psi_{2\varepsilon m}(x). \tag{20}$$

Используя известные теоремы о существовании решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений получим, что задача (17)-(20) имеет локальное решение.

Умножая обе части (17) на $g'_{i\varepsilon m}(t)$ и суммируя полученные равенства по j=1,...,m имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{k_{11\varepsilon}(\cdot)}u'_{1\varepsilon m}(t,\cdot)\right\|^2 + \left(k_{12}(\cdot)u'_{1\varepsilon m}(t,\cdot), u'_{1_{\varepsilon m}}(t,\cdot)\right)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_{1\varepsilon m}(t,\cdots)\|^2 +$$

$$+\frac{1}{p+1`}\int_\Omega |u_{2\varepsilon m}(t,x)|^{p+1}\frac{d}{dt}\left|u_{1\varepsilon m}(t,x)\right|^{p+1}dx=(f_1(t,\cdot),u'_{1\varepsilon m}(t,\cdot)) \qquad (21)$$

Аналогичным образом умножая обе части (18) на $h'_{i\varepsilon m}(t)$ и суммируя полученные равенства по j=1,...,m имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{k_{21\varepsilon}(\cdot)}u'_{2\varepsilon m}(t,\cdot)\right\|^2+(k_{22}(\cdot)u'_{2\varepsilon m}(t,\cdot),u'_{2\varepsilon m}(t,\cdot))$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_{2\varepsilon m}(t,\cdot)\|^2+$$

$$+\frac{1}{p+1`}\int_\Omega |u_{1\varepsilon m}(t,x)|^{p+1}\frac{d}{dt}\left|u_{2\varepsilon m}(t,x)\right|^{p+1}dx=(f_2(t,\cdot),u'_{2\varepsilon m}(t,\cdot)) \qquad (22)$$

Суммируя (21) и (22) получим:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left\|\sqrt{k_{i1\varepsilon}(\cdot)}u'_{i\varepsilon m}(t,\cdot)\right\|^2+\|\nabla u_{i\varepsilon m}(t,\cdot)\|^2\right\}+$$
$$+\frac{1}{p+1`}\int_\Omega |u_{1\varepsilon m}(t,x)u_{2\varepsilon m}(t,x)|^{p+1}dx+\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega k_{i2}(x)|u'_{i\varepsilon m}(t,x)|^2dx=$$
$$=\sum_{i=1}^{2}(f_i(t,\cdot),u'_{i\varepsilon m}(t,\cdot)).$$

Далее применяя неравенство Гельдера и Юнга отсюда имеем

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left[\left\|\sqrt{k_{i1\varepsilon}(\cdot)}u'_{i\varepsilon m}(t,\cdot)\right\|^2+\|\nabla u_{i\varepsilon m}(t,\cdot)\|^2\right]\right\}+$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega[k_{i2}(x)-\frac{\delta}{2}]\,|u'_{i\varepsilon m}(t,x)|^2dx+$$

$$+\frac{1}{p+1`}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_{1\varepsilon m}(t,x)u_{2\varepsilon m}(t,x)|^{p+1}dx\le\frac{1}{2\delta}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega|f_i(t,x)|^2dx \qquad (23)$$

где $0<\delta<2\,min\,\{k_{10},k_{20}\}$.

Из (23) имеем следующую априорную оценку

$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega k_{i1\varepsilon}(x)|u'_{i\varepsilon m}(t,x)|^2dx+\|\nabla u_{i\varepsilon m}(t,\cdot)\|^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_0^t\int_\Omega|u'_{i\varepsilon m}(s,x)|^2dxds+\int_\Omega|u_{1\varepsilon m}(t,x)u_{2\varepsilon m}(t,x)|^{p+1}dx\le E_{m,\varepsilon}, \quad (24)$$

где

$$E_{m,\varepsilon}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left\|\sqrt{k_{i2\varepsilon}(\cdot)}\psi_{im}(\cdot)\right\|^2+\|\nabla\varphi_{im}(\cdot)\|^2+\int_\Omega|\varphi_{1m}(x)\varphi_{2m}(x)|^{p+1}dx \;....(25)$$

Используя неравенство Гельдера и учитывая вложения $H_0^1\subset L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ (см. [8]) имеем следующую оценку

$$\left|\int_\Omega |\varphi_{1m}(x)\varphi_{2m}(x)|^{p+1}dx\right| \le$$
$$\left[\int_\Omega |\varphi_{1m}(x)|^{2(p+1)}dx\right]^{1/2}\left[\int_\Omega |\varphi_{2m}(x)|^{2(p+1)}dx\right]^{1/2} =$$

$$= \|\varphi_{1m}(\cdot)\|^{p+1}_{L_{2(p+1)}}\|\varphi_{2m}(\cdot)\|^{p+1}_{L_{2(p+1)}} \le c\,\|\varphi_{1m}(\cdot)\|^{p+1}_{H_0^1}\|\varphi_{2m}(\cdot)\|^{p+1}_{H_0^1}. \qquad (26)$$

Учитывая (13)-(16) и (26) из (25) получим, что

$$E_{m,\varepsilon} \le \text{c}, \qquad (27)$$

где $\text{c} > 0$ не зависит от m и $\varepsilon > 0$

Из (24) и (27) получим следующие априорные оценки

$$\left\|\sqrt{k_{i1\varepsilon}(.)}u'_{i\varepsilon m}(t,.)\right\| \le \text{C}, \qquad (28)$$

$$\|\nabla u'_{i\varepsilon m}(t,.)\| \le \text{C}, \qquad (29)$$

$$\int_\Omega |u_{1\varepsilon m}(t,x)u_{2\varepsilon m}(t,x)|^{p+1}dx \le \text{C}, \qquad (30)$$

$$\int_0^t \|u'_{i\varepsilon m}(s,\cdot)\|^2 ds \le \text{C}, \qquad (31)$$

где $i = 1,2;$ $c > 0$ не зависит от $\varepsilon > 0$ и m.

Таким образом из последовательности $\{(u_{1\varepsilon m}, u_{2\varepsilon m})\}$ можем выбрать такую подпоследовательность $\{(u_{1\varepsilon\nu}, u_{2\varepsilon\nu})\} \subset \{(u_{1\varepsilon m}, u_{2\varepsilon m})\}$, что

$$u_{1\varepsilon\nu} \to u_{1\varepsilon} \quad * \text{ - слабо в } L_\infty(0,T;H_0^1), \qquad (32)$$
$$u'_{1\varepsilon\nu} \to u'_{1\varepsilon} \quad \text{слабо в } L_2(0,T;L_2(\Omega)), \qquad (33)$$
$$\sqrt{k_{i_{1\varepsilon}}(x)}u'_{i\varepsilon\nu} \to \sqrt{k_{i_{1\varepsilon}}(x)}u'_{i\varepsilon} \; * \text{ - слабо в } L_\infty\big(0,T;L_2(\Omega)\big), \qquad (34)$$

$$u_{1\varepsilon\nu}\cdot u_{2\varepsilon\nu} \to \chi \quad * \text{ - слабо в } L_\infty\left(0,T;L_{p+1}(\Omega)\right). \qquad (35)$$

Учитывая априорные оценки (28)-(31) и используя неравенство Гельдера а также теорему вложения [8] получим следующую априорную оценку

$$\int_\Omega ||u_{1\varepsilon m}(t,x)|^{p-1}|u_{2\varepsilon m}(t,x)|^{p+1}u_{1\varepsilon m}(t,x)|^\theta dx =$$
$$= \int_\Omega |u_{1\varepsilon m}|^{p\theta} |u_{2\varepsilon m}|^{p\theta}|u_{2\varepsilon m}|^\theta \le$$
$$\le \left(\int_\Omega |u_{1\varepsilon m}u_{2\varepsilon m}|^{p\theta-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_\Omega |u_{2\varepsilon m}|^{\theta\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} =$$
$$= \left(\int_\Omega |u_{1\varepsilon m}u_{2\varepsilon m}|^{p+1}dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_\Omega |u_{2\varepsilon m}|^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{1}{\beta}} \le$$

$$\leq \left(\int_\Omega |u_{1\varepsilon m}u_{2\varepsilon m}|^{p+1}dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \mathrm{c}\,.\|u_{2\varepsilon m}\|_{H_0^1} \leq C\ . \qquad (36)$$

Аналогичным образом получим, что

$$\int_\Omega ||u_{1\varepsilon m}(t,x)|^{p+1}|u_{2\varepsilon m}(t,x)|^{p-1}u_{2\varepsilon m}(t,x)|^\theta dx \leq \mathrm{C}\ . \qquad (37)$$

В силу (32), (33)

$$u_{i\varepsilon\nu} \to u_{i\varepsilon} \quad \text{в} \quad L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big) = L_2(Q_T),\ \ \mathrm{i}=1,2, \qquad (38)$$

Отсюда имеем

$$u_{i\varepsilon\nu} \to u_{i\varepsilon} \quad n.\text{в.} \quad \text{в} \quad Q_T, \qquad \mathrm{i}=1,2, \qquad (39)$$

Из (39) следует, что

$$|u_{2\varepsilon\nu}|^{p+1}|u_{1\varepsilon\nu}|^{p-1}u_{1\varepsilon\nu} \to |u_{2\varepsilon}|^{p+1}|u_{1\varepsilon}|^{p-1}u_{1\varepsilon} \quad n.b \quad \text{в} \quad Q \qquad (40)$$

В силу (37) и (40)

$|u_{1\varepsilon\nu}|^{p-1}|u_{2\varepsilon\nu}|^{p+1}u_{1\varepsilon\nu} \to$
$|u_{1\varepsilon}|^{p-1}|u_{2\varepsilon}|^{p+1}u_{1\varepsilon}\ \ *-$ слабо в $L_\infty(0,T,:L_\theta(\Omega))$.
(41)

Аналогично,

$|u_{1\varepsilon\nu}|^{p+1}|u_{2\varepsilon\nu}|^{p-1}u_{2\varepsilon\nu} \to$
$|u_{1\varepsilon}|^{p+1}|u_{2\varepsilon}|^{p-1}u_{2\varepsilon}\ \ *-$ слабо в $L_\infty(0,T,:L_\theta(\Omega))$.
(42)

В силу (32) и (35) $u_{1\varepsilon\nu}u_{2\varepsilon\nu} \to \chi_\varepsilon$ в $D'(Q_T)$ и $u_{1\varepsilon\nu}u_{2\varepsilon\nu} \to u_{1\varepsilon}u_{2\varepsilon}$в $L_1(Q_T)$,
следовательно $\chi_\varepsilon = u_{1\varepsilon}u_{2\varepsilon}$.

Предельный переход по $\nu \to \infty$.

Умножаем обе части на $\eta \in D(0,T)$ и интегрируем от 0 до T. Переходим к пределу при $\nu \to \infty$.Тогда учитывая (32)-(42) получим что

$$-\int_0^T\big(k_{11\varepsilon}(x)u'_{1\varepsilon},\eta'(t)w_j\big)\,dt + \int_0^T\big(k_{12}(x)u_{1\varepsilon},\eta(t)w_j\big)\,dt +$$
$$+\int_0^T\big(\nabla u_{1\varepsilon},\eta(t)\nabla w_j\big)\,dt +$$

$$+\int_0^T\big(|u_{1\varepsilon}|^{p-1}|u_{2\varepsilon}|^{p+1}u_{1\varepsilon},\eta(t)w_j\big)\,dt = \int_0^T\big(f_1(t,x),\eta(t)w_j\big)\,dt.$$

Заметим, множество $\{\eta(\cdot)w_j\}$,где $\eta \in D(0,T)$ плотно в $\dot{W}_2^1(0,T;H_0^1 \cap L^{p_1+1}(\Omega)$, поэтому

$$-\int_0^T(k_{11\varepsilon}(x)u'_{1\varepsilon},w')\,dt + \int_0^T(k_{12}(x)u'_{1\varepsilon},w)\,dt + \int_0^T(\nabla u_{1\varepsilon},\nabla w)\,dt +$$
$$+\int_0^T(|u_{1\varepsilon}|^{p-1}|u_{2\varepsilon}|^{p+1}u_{1\varepsilon},w)\,dt = \int_0^T(f_1(t,x),w(t))\,dt, \qquad (43)$$

где $w \in \dot{W}_2^1(0,T;H_0^1 \cap L^{p_1+1}(\Omega))$.

Аналогичным образом получим равенство

$$-\int_0^T(k_{21\varepsilon}(x)u'_{2\varepsilon},w')\,dt + \int_0^T(k_{22}(x)u'_{2\varepsilon},w)\,dt + \int_0^T(\nabla u_{1\varepsilon},\nabla w)\,dt +$$

$$+\int_0^T (|u_{1\varepsilon}|^{p+1}|u_{2\varepsilon}|^{p-1}u_{2\varepsilon}, w)\,dt = \int_0^T (f_2(t,x), w(t))\,dt, \qquad (44)$$

где $w \in \dot{W}_2^1(0,T; H_0^1 \cap L^{p_1+1}(\Omega))$.

В силу (28) – (31) имеет место следующие априорные оценки:

$$\|u_{i\varepsilon}(t,\cdot)\|_{H_0^1} \le C, \qquad (45)$$

$$\|u_{i\varepsilon}(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \le C, \qquad (46)$$

$$\left\|\sqrt{k_{i_{1\varepsilon}}(\cdot)}u'_{i\varepsilon_t}(t,\cdot)\right\|_{L_2(\Omega)} \le C, \qquad (47)$$

$$\|u_{1\varepsilon}(t,\cdot)u_{2\varepsilon}(t,\cdot)\|_{L_{p+1}(\Omega)} \le C, \qquad (48)$$

$$\||u_{1\varepsilon}(t,.)|^{p-1}|u_{2\varepsilon}(t,.)|^{p+1}u_{1\varepsilon}(t,.)\|_{L_\theta(\Omega)} \le C, \qquad (49)$$

$$\||u_{1\varepsilon}(t,.)|^{p+1}|u_{2\varepsilon}(t,.)|^{p-1}u_{2\varepsilon}(t,.)\|_{L_\theta(\Omega)} \le C. \qquad (50)$$

где $C > 0$ зависит от $\varepsilon > 0$, i =1,2.

Из (45)-(50) следует: из последовательности $\{(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{(u_{1\varepsilon_k}, u_{2\varepsilon_k})\}$ такое, что

$$u_{i\varepsilon_k} \to u_i \quad * \text{- слабо в } L_\infty(0,T; H_0^1), \qquad (51)$$

$$u'_{i\varepsilon_k} \to u'_i \quad \text{слабо в } L_2(Q), \qquad (52)$$

$$\sqrt{k_{i_{1\varepsilon}}(x)}u'_{i\varepsilon_k} \to k_{i1}(x)u_i \quad * \text{- слабо в } L_\infty(0,T; L_2(\Omega)). \qquad (53)$$

$$u_{1\varepsilon_k} \cdot u_{2\varepsilon_k} \to \chi \text{ слабо в } L_\infty(0,T: L_{p+1}(\Omega)), \qquad (54)$$

$$\left|u_{1\varepsilon_k}\right|^{p-1}\left|u_{2\varepsilon_k}\right|^{p+1}u_{1\varepsilon_k} \to |u_1|^{p-1}|u_2|^{p+1}u_1 \text{ слабо в } L_\infty(0,T: L_\theta(\Omega)), \qquad (55)$$

$$\left|u_{1\varepsilon_k}\right|^{p+1}\left|u_{2\varepsilon_k}\right|^{p-1}u_{2\varepsilon_k} \to |u_1|^{p+1}|u_2|^{p-1}u_1 \text{ слабо в } L_\infty(0,T: L_\theta(\Omega)). \qquad (56)$$

Переходя к пределу в (43) и (44) и учитывая (51) –(56) получим, что для (u_1, u_2) является выполнены (6), (7), (8) и начальные условия (3), (4).

3. Доказательство теоремы единственности.

Пусть n=3 и задача (1)-(4) имеет две разные решения (u_1, u_2) и (v_1, v_2). Обозначая $w_1 = u_1 - v_1$, $w_2 = u_2 - v_2$ для (w_1, w_2) получим следующую задачу

$$\begin{cases} k_{11}(x)w_{1_{tt}} + k_{12}(x)w_{1_t} - \Delta w_1 + |u_2|^2u_1 - |v_2|^2v_1 = 0 \\ k_{21}(x)w_{2_{tt}} + k_{22}(x)w_{2_t} - \Delta w_2 + |u_1|^2u_2 - |v_1|^2v_2 \quad = 0 \end{cases} \qquad (57)$$

с граничными условиями:

$$w_1(t,x) = w_2(t,x) = 0, t \in [0,T], x \in \Gamma \qquad (58)$$

и с начальными условиями

$$w_1(0,x) = 0, \qquad \sqrt{k_{11}(x)}w_{1_t}(0,x) = 0. \tag{59}$$
$$w_2(0,x) = 0, \qquad \sqrt{k_{21}(x)}w_{2_t}(0,x) = 0 \tag{60}$$

Следуя [7] введем обозначения

$$z_i(t,x) = \begin{bmatrix} -\int_t^s w_i(\xi,x)d\xi\,, & t \le s \\ 0\,, & t > s \end{bmatrix}$$

Легко заметит, что

$$\theta_i(t,x) = \int_0^t w_i(\xi,x)d\xi\,, \qquad z_i(t,x) = \theta_i(t,x) - \theta_i(s,x), \quad z_i(s,x) = 0,$$
$z'_i(t,x) = w_i(t,x)$ (см. [7]).

В силу (6), (7) и (8) $k_{i1}(.)w''_i(t,.) \in H^{-1}(\Omega) + L_2(\Omega)$ и $z_i(t,.)) \in H_0^1(\Omega)$ Учитывая это из (57) получим, что

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^s (\,k_{i1}(.)w''_i(t,.), z_i(t,.))dt \; + \sum_{i=1}^2 \int_0^s (\,k_{i2}(.)w'_i(t,.), z_i(t,.))dt \; +$$

$$+ \int_0^s (\,\nabla w_i(t,.), \nabla\; z_i(t,.))dt \; + \; \int_0^s (|u_2|^2 u_1 - |v_2|^2 v_1, z_1(t,.))dt \; +$$

$$+ \int_0^s (|u_2|^2 u_1 - |v_2|^2 v_1,\; z_2(t,.))dt \; = 0\,. \tag{61}$$

С другой стороны

$$\int_0^s (\,k_{i1}(.)w''_i(t,.), z_i(t,.))dt \; = -\int_0^s (\,k_{i1}(.)w'_i(t,.), w_i(t,.))dt \; =$$
$$= -\frac{1}{2}\left\|\sqrt{k_{i1}(.)}, w_i(t,.)\right\|^2, \tag{62}$$

$$\int_0^s (\,k_{i2}(.)w'_i(t,.), z_i(t,.))dt \; = -\int_0^s \left\|\sqrt{k_{i2}(.)}, w_i(t,.)\right\|^2 dt\,, \tag{63}$$

$$\int_0^s (\nabla\, w_i(t,.), \nabla z_i(t,.))dt \; = \int_0^s (\nabla\, z'_i(t,.), \nabla z_i(t,.))dt \; = -\frac{1}{2} \;\; \|\nabla\, w_i(t,.)\|^2 \tag{64}$$

Учитывая (62)-(64) из (61) получим, что

$$\sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2}\left\|\sqrt{k_{i1}(.)}, w_i(t,.)\right\|^2 + \int_0^s \left\|\sqrt{k_{i2}(.)}, w_i(t,.)\right\|^2 dt \; + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \;\; \|\nabla\, w_i(t,.)\|^2\right] \le G_1 + G_2, \tag{65}$$

где

$$G_1 = \int_0^s \int_\Omega \left| \ |u_2(t,x)|^2 u_1(t,x) - |v_2(t,x)|^2 v_1(t,x) \right| . |z_1(t,x)| dxdt \ ,$$

$$G_2 = \int_0^s \int_\Omega \left| \ |u_1(t,.)|^2 u_2(t,.) - |v_1(t,.)|^2 v_2(t,.) \right| . |z_2(t,.)| dxdt \ .$$

Используя неравенства Гельдера получим, что

$$G_1 \le c \int_0^s \int_\Omega \sum_{i=1}^2 (|u_i(t,x)|^2 + |v_i(t,x)|^2) \, |u_1(t,x) - -v_1(t,x)\,| \,.\, |z_1(t,x)| dxdt \quad \le$$

$$\le \left\{ \sum_{i=1}^{2} \left[\int_0^s \int_\Omega |u_i(t,x)|^n \ \ dxdt \ \ \right]^{\frac{2}{n}} + \sum_{i=1}^{2} \left[\int_0^s \int_\Omega |v_i(t,x)|^n \ \ dxdt \ \ \right]^{\frac{2}{n}} \right\} \times$$
$$\times \left\{ \int_0^s \int_\Omega |w_1(t,x)|^{\frac{2n}{n-2}} \ \ dxdt \ \ \right\}^{\frac{n-2}{2n}} \left\{ \int_0^s \int_\Omega |z_1(t,x)|^{\frac{2n}{n-2}} \ \ dxdt \ \ \right\}^{\frac{n-2}{2n}}$$

Отсюда учитывая вложения $H_0^1 \subset L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ (см. [8]) получим, что

$$G_1 \le c \max_{0 \le t \le T} \left(\|u_1\|_{H_0^1}^2 + \|u_2\|_{H_0^1}^2 + \|v_1\|_{H_0^1}^2 + \|v_2\|_{H_0^1}^2 \right) \times$$

$$\times \left(\int_0^s \|w_1\|_{H_0^1}^2 dt \ + \int_0^s \|w_2\|_{H_0^1}^2 dt \quad + \int_0^s \|z_1\|_{H_0^1}^2 dt \ \right); \tag{66}$$

$$G_2 \le c \max_{0 \le t \le T} \left(\|u_1\|_{H_0^1}^2 + \|u_2\|_{H_0^1}^2 + \|v_1\|_{H_0^1}^2 + \|v_2\|_{H_0^1}^2 \right) \times$$

$$\times \left(\int_0^s \|w_1\|_{H_0^1}^2 dt \ + \int_0^s \|w_2\|_{H_0^1}^2 dt \quad + \int_0^s \|z_2\|_{H_0^1}^2 dt \ \right). \tag{67}$$

Учитывая (66), (67) в (65) и применив лемму Гроноула получим, что $w_1(t,x) = 0$ и $w_2(t,x) = 0$.

Автор благодарен рецензентов, чьи замечания позволили улучшить качества изложения полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Miranda M.M, Medeioros L.A.* On the Existence of global solutions of coupled nonlinear Kleyn-Gordon equations// Funkcialaj Ekvacioi, -1987, 30, -p.147-161.
2. *Messaoudi S.A., Said-Houari B.* Global nonexistence of positive initial energy solutions of a system of nonlinear viscoelastic wave equations with damping and source terms, J. Math. Anal. Appl., 365, no. 1 (2010), 277-287.