Pedaqoji Universitetin Xəbərləri. Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası – 2021, C. 69, №3, s. 48-59
Transactions of Pedagogical University. Series of mathematics and natural sciences – 2021, V. 69, №3, pp. 48-59

UOT 372.851

F.N.İbrahimov, V.Ə.Abdurahmanov
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetin Şəki filialı
abdurahmanov_v@mail.ru

TRİQONOMETRİK TƏNLİKLƏRİN HƏLLİ ÜSULLARININ MƏNİMSƏNİLMƏSİ İLƏ ŞAGİRDLƏRİN ANALİTİK VƏ EVRİSTİK FƏALİYYƏTLƏRİNİN İNKİŞAFININ QARŞILIQLI ƏLAQƏSİ

Açar sözlər: *triqonometrik tənliklər, analitik və evristik fəaliyyət, "səbəb-nəticə" dialektikası, cəbri tənlik, bircins triqonometrik tənliklər, qarışıq tipli triqonometrik tənliklər, qiymətləndirmə və mühakimə üsulu ilə həll olunan triqonometrik tənliklər, tənliyin kökü*

Məqalədə göstərilir ki, triqonometrik tənliklər ümumtəhsil məktəblərində riyazi təhsilin mühüm məzmun elementlərindən biridir. Triqonometrik tənliklərin həll üsullarının mənimsənilməsi ilə şagirdlərin analitik və evristik fəaliyyətlərinin inkişafı arasında qarşılıqlı şəkildə dəyişən "səbəb-nəticə" dialektikası vardır. İşdə bu dialektikaya dayanaraq praktiklərin fəaliyyətində özünü göstərən ən sadə triqonometrik tənliklərin həllin ümumi yazılışının əyani əsaslarla arqumentləşdirilməməsi və xüsusi halların fərqləndirilməməsi, ən sadə olmayan triqonometrik tənliklərin həlli ilə bağlı ümumi cəhətlərin və həll üsullarının seçilməsinin arqumentləşdirilməməsi, bu və ya digər həll üsulunun tətbiqində məxsusiliyin diqqət mərkəzinə çəkilməmsisi, şagirdlərin nəticənin dürüst müəyyən olunmasına və araşdırmanın həyata keçirilməsinə diqqətlərinin lazımi səviyyədə yönəldilməməsi kimi çatışmazlıqların aradan qaldırılması yollarına elmi şərhlər verilmişdir.

Ф.Н.Ибрагимов, В.А.Абдурахманов

ВЗАИМОСВЯЗЬ РАЗВИТИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ И ЭВРИСТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ С ОВЛАДЕНИЕМ МЕТОДАМИ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ключевые слова: *тригонометрические уравнения; аналитическая и эвристическая деятельность, диалектика "причина-следствие", алгебраические уравнения, однородные тригонометрические уравнения, тригонометрические уравнения смешанного типа, тригонометрические уравнения решаемые путем оценки и суждения, корень уравнения*

В статье показано, что тригонометрические уравнения являются одним из важных элементов математического образования в общеобразовательной школе, существует «причинно-следственная» диалектика между овладением методами

решения тригонометрических уравнений и развитием аналитической и эвристической деятельности учащихся. Исходя из этой диалектики, даны научные объяснения способов преодоления таких недостатков проявляющееся работе практиков, как, общее обозначение решения простейших тригонометрических уравнений не аргументируются наглядным обоснованием, не различается частные случаи, не оправдывается целесообразности применения того или иного метода решения, недостаточная направленность внимания учащихся на правильное определение результата и проведение исследования.

F.N.Ibrahimov, V.A.Abdurahmanov

THE RELATIONSHIP BETWEEN THE DEVELOPMENT OF ANALYTICAL AND HEURISTIC ACTIVITIES OF STUDENTS WITH THE MASTERY OF METHODS FOR SOLVING TRIGONOMETRIC EQUATIONS

Keywords: *trigonometric equations; analytical and heuristic activity, "cause-and-effect" dialectic, algebraic equations, homogeneous trigonometric equations, trigonometric equations of mixed type, trigonometric equations solved by evaluation and judgment, the root of the equation*

The article shows that trigonometric equations are one of the important content elements of mathematical education in secondary education. There is a "cause-and-effect" dialectic that alternates between the mastery of control methods of trigonometric equations and the development of students' analytical and heuristic activities. Based on this dialectic, the practitioners should not argue that the general writing of the simplest trigonometric equations at the level of solution and not to differentiate specific cases, justify the choice of general situation and management methods related to the solution of the simplest trigonometric equations, scientific explanations were given for ways to overcome the shortcomings, such as failure to do so.

Mövzunun aktuallığı. "Triqonometrik tənliklər" ümumtəhsil məktəblərində riyazi təhsilin mühüm məzmun elementlərindən biridir.Triqonometrik tənliklərin həll üsullarının mənimsənilməsi ilə şagirdlərin analitik və evristik fəaliyyətlərinin inkişafı arasında qarşılıqlı şəkildə dəyişən "səbəb-nəticə" dialektikası vardır. Pedaqoji proseslərin müşahidəsi göstərir ki, bu dialektika praktik pedaqoqların fəaliyyətlərində diqqət mərkəzinə çəkilmir və nəticədə şagirdlərin həm triqonometrik tənliklərin həll üsullarının mənimsənilmə səviyyəsi gözlənilən nəticələrə adekvat olmur, həm də onların analitik və evristik fəaliyyətlərinin harmonik inkişafında çatışmazlıqlar mövcud olur. Praktiklərin fəaliyyətində müşahidə olunan bu çatışmazlıq triqonometrik tənliklərin həlli üsullarının mənimsənilməsi ilə şagirdlərin analitik və evristik fəaliyyətlərinin inkişafının qarşılıqlı əlaqəsinin elmi-nəzəri və texnoloji baxımdan öyrənilməməsi ilə bağlıdır.

Tədqiqat işindən əldə olunan materiallar üzrə interpretasiya. Məlum olduğu kimi, yunanlar bəşəriyyətin inkişafında triqonometriyanı elmlərdən ən vacibi hesab edirdilər. "Üçbucaqların ölçülməsi" mənasını verən yunan mənşəli "trigonometrya" termini *trigon* - üçbucaq, *metrik* – ölçmə sözlərinin birləşməsindən almışdır. Triqonometriyanın elmi inkişafında L. Eylerin xidmətləri danılmazdır. O, «Jntroductio in analysis infinitorum» (1748) əsərini yazaraq triqonometriyanı funksiyalar elmi kimi təqdim etməklə, onun analitik izahını verdi, bir neçə əsas düsturdan alınan bütün düsturlar toplusunu mövcudluğunu açıqlamış oldu. Tərəflərin kiçik hərflərlə və qarşı bucaqların böyük hərflərlə işarə olunması bütün düsturları sadələşdirməyə, onlara aydınlıq və dəqiqlik gətirməyə imkan verdi. Eyler triqonometrik funksiyaların qiymətlərini uyğun xətlərin dairənin radiusuna nisbəti kimi qəbul etməyi düşündü.

Triqonometriya həndəsi əsasda yarandı, həndəsi bir dilə sahib oldu və həndəsi məsələlərin həllində tətbiq olundu. Cəbri simvolizmin inkişafı triqonometrik münasibətləri düstur şəklində yazmağa imkan verdi. Mənfi ədədlərin tətbiqi bucaqların və qövslərin istiqamətini müəyyən etmək imkanını yaratmış oldu. Triqonometrik funksiyaların ədədi bir arqumentin funksiyası kimi öyrənilməsi, triqonometrik funksiyaların analitik nəzəriyyəsinin işlənilməsinə əsas yaratdı. Eyler həmçinin kompleks arqumentin trigonometrik və üstlü funksiyaları arasındakı əlaqəni kəşf etdi. Nyuton tərəfindən triqonometrik funksiyaların qiymətlərinin istənilən dəqiqliklə hesablamağa imkan verən analitik üsul yaradıldı. Eylerin başlatdığı triqonometrik funksiyalar nəzəriyyəsinin analitik qurulması dahi rus alimi N.İ. Lobaçevskinin əsərlərində başa çatdı.

Ədədi bir arqumentin funksiyası kimi trigonometrik funksiyalara dair müasir baxış böyük ölçüdə fizikanın, mexanikanın və texnikanın inkişafı ilə əlaqədardır. Bu funksiyalar müxtəlif dövri proseslərin öyrənildiyi riyazi aparatın əsasını təşkil edirdi.

Triqonometriya elementlərinin riyazi təhsilin məzmunda xüsusi yeri vardır. Bunu həm ümumi təhsillə bağlı zamanın çağrışları ilə, həm də riyaziyyatın mənimsənilməsi prosesinin daxili məntiqi ilə bağlı arqumentləşdirmək olar.

Ümumtəhsil məktəblərində riyaziyyat fənninin müasir kurikulumunun tətbiqinədək şagirdlərə triqonometriya üzrə məzmun elementləri "Triqonometriya", "Cəbr və elementar funksiyalar", "Cəbr və analizin başlanğıcı" kurslarında öyrədilmişdir. Riyaziyyat fənn kurikulumunda sözügedən elementlər əsasən "Cəbr və funksiyalar" məzmun xəttində ehtiva olunur, eyni zamanda məzmun xətləri (bunların sayı beşdir) bir-biri ilə dialektik əlaqəyə malik olduğundan digər məzmun xətlərində də müəyyən imkandaşıyıcılıq funksiyası üzrə müəyyən qədər özünə yer alır. Başqa cür ola da bilməz, çünki vahid olan riyaziyyat kursunun hər bir elementi bu və ya digər

səviyyədə dialektik əlaqəyə malik olmalıdır, əks halda riyaziyyat kursu təşkilatlanmış sistem (tam) olmazdı, yəni tamlıq xassəsini saxlaya bilməzdi.

Triqonometrik tənliklər orta ümumtəhsil məktəbinin riyaziyyat kursunda əsas yerlərdən birini tutur. Məchulu triqoonometrik funksiya işarəsi altında olan tənliklər həm tədris materialının məzmun elementlərinin mənimsənilməsi, həm də bu prosesdə təlimin bir çox mühüm üsullarının formalaşmasına səbəb olan çox sayda müxtəlif nəzəri və tətbiqi xarakterli məsələlərin həllində istifadə oluna bilirlər [3, s.302-305].

Ümumtəhsil məktəblərində şagirdlər triqonometrik tənliklərin həllinin müxtəlif üsulları ilə tanış olurlar.Yeri gəlmişkən vurğulayaq ki, digər tənlik növlərində olduğu kimi, triqonometrik tənlikləri həll etmək, məchulun verilən tənliyi eyniliyə çevirən bütün qiymətlərini tapmaq və ya həllin olmadığını gostərmək deməkdir, hansı ki, məchulun bu qiymətlərinə tənliyin kökləri deyilir. Triqonometrik tənliklər müxtəlifdir və onların hamısını həll etmək üçün ümumi bir üsul yoxdur. Məlum olan budur ki, triqonometrik tənliklərin böyük bir qismi sadə triqonometrik tənliklərin həllinə gətirilir. Uzun illər ərzində subyekti olduğumuz pedaqoji idarəetmə və rəhbərlik fəaliyyətimiz söyləməyə əsas verir: "Şagirdlərin bu prosesdə aşağıda özünə yer alan üç istiqamətdə fəaliyyətdə müəyyən dərəcədə çətilik çəkdiklərinin, yanlışlıqlara yol verdikələrinin şahidi oluruq, hansı ki, bunlar tədris prosesində müəllimin müşahidə olunan çatışmazlıqları törədən səbəblərə lazımi diqqət yetirməməsi ilə şərtlənir". Sözügedən səbəblər sırasına aid oluna bilər: 1) Ən sadə triqonometrik tənliklərin həllinin ümumi yazılışının əyani əsaslala arqumentləşdirilməməsi və xüsusi halların fərqləndirilməməsi; 2) Ən sadə olmayan triqonometrik tənliklərin həlli ilə bağlı ümumi cəhətlərin və həll üsullarının seçilməsinin arqumentləşdirilməməsi; 3) Bu və ya digər həll üsulunun tətbiqində məxsusiliyin diqqət mərkəzinə çəkilməməsi, şagirdlərin nəticənin dürüst müəyyən olunmasına və araşdırmanın həyata keçirilməsinə diqqələrinin lazımi səviyyədə yönəldilməməsi.

Ən sadə triqonometrik tənliklərin həllinin ümumi yazılışının əsaslandırılması və xüsusi halların fərqləndirilməsi yönümlü tədrisin qurulması ilə bağlı mövqeyimizə, yanaşmalarımıza $\sin x = a$ (1) tənliyinin həlli ilə aydınlıq gətirək.

Öncə, şagirdlərə əyani əsaslarla aydınlaşdırılmalıdır ki, $\sin x = a$ tənliyinin hər bir kökünə, $y = \sin x$ sinusoidi ilə $y = a$ düz xəttinin bir kəsişmə nöqtəsinin absisi kimi baxmaq olar və əksinə, hər bir belə kəsişmə nöqtəsinin absisi (1) tənliyinin köklərindən biridir.$|a| > 1$ olduqda $y = \sin x$ sinusoidi $y = a$ düz xətti ilə kəsişmir. Bu halda (1) tənliyinin kökü yoxdur. $|a| \leq 1$ olarsa, $y = \sin x$ sinusoidi və $y = a$ düz xəttinin sonsuz sayda ortaq nöqtələri vardır. Bu halda (1) tənliyinin sonsuz çox kökü vardır.

Tutaq ki, $0 < a < 1$. Onda $\leq x \leq \pi$ intervalında iki A və B kəsişmə nöqtəsi alınır. A nöqtəsi $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ intervalına da daxil olur. Buna görə də A nöqtəsinin absisi $\arcsin a$-ya bərabərdir. B nöqtəsinə gəldikdə isə onun absisinin $\pi - \arcsin a$ olduğunu anlamaq o qədər də çətin deyildir. $y = \sin x$ sinusoidi ilə $y = a$ düz xəttinin bütün qalan kəsişmə nöqtələrini iki qrupa ayırmaq olar: 1) birinci qrupdakı nöqtələr A –dan 2π-nin misli qədər məsafədədir. Buna görə də absisləri $\arcsin a + 2n\pi$ olur. Burada n –nin qiyməti bütün tam ədədlərdir; 2) ikinci qrupdakı nöqtələr B –dən 2π-nin misli qədər məsafədədir. Buna görə də absisləri $\pi - \arcsin a + 2k\pi = -\arcsin a + 2k+1\pi$ olur. Burada k–nın qiyməti bütün tam ədədlərdir.

Beləliklə, (1) tənliyinin iki qrup kökü olur: $x = \arcsin a + 2n\pi$ (2) və $x = -\arcsin a + (2k+1)\pi$ (3).

Hər iki qrup kökləri $x = (-1)^m \arcsin a + m\pi$ (4) düsturu ilə ifadə etməyin mümkün olduğunu asanlıqla başa düşmək olar; burada m –in qiyməti bütün tam ədədlər olur. Doğrudan da m cüt ədəd olduqda (4) bərabərliyi (2)-yə, m tək ədəd olduqda (3) çevrilir. Beləliklə, $< a < 1$ olduqda (1) tənliyinin bütün kökləri (4) düsturu ilə ifadə olunur.

Həmin nəticəyə $-1 < a < 0$ olduqda da gəlmək olar (Qabaqcıl təcrübəyə malik müəllimlər bu halın müstəqil araşdırılmasını şagirdlərə təklif edirlər).

Şagirdlərin diqqəti $a = 0$ və $a = \pm 1$ halına yönəldilir. Qənaətə gəlinir ki, $a = 0$ olduqda $\sin x = a$ tənliyinin kökləri $x = m\pi$ (5) olur; burada m –in qiymətləri bütün tam ədədlər olur. Şagirdlərə aydın olmalıdır ki, (4) düsturu da həmin nəticəni verir. $a = 1$ olarsa, $\sin x = a$ tənliyinin kökləri $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (6) ədədləri olacaqdır; burada k –nın qiymətləri bütün tam ədədlər olacaqdır. Şagirdlər əsaslandırmağı bacarmalıdır ki, (4) düsturu bu halı ödəyir. $a = -1$ olarsa, $\sin x = a$ tənliyinin kökü $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (7). $a = 0$ və $a = \pm 1$olduqda (4) ümumi düsturuna müraciət etmədən dərhal (5), (6), (7) düsturlarından istifadə etmək məqsədə daha uyğundur. Qeyd olunmalıdır ki, ancaq tələb edilən x bucağı radianlarla ifadə edildiyi hallarda (4), (5), (6) və (7) düsturlarından istifadə etmək olar. x bucağı dərəcələrlə ifadə edilmiş olarsa, təbii ki, bu düsturlar dəyişdirilməlidir. Məsələn, (4) düsturu əvəzinə $x = (-1)^m \arcsin a + 180^0 m$, (5) düsturu əvəzinə $x = 180^0 m$ düsturundan istifadə edilməlidir [4, s.269-272].

Ən sadə olmayan triqonometrik tənlikləri həll edərkən aşağıdakı ümumi cəhətləri nəzərə almaq faydalıdır.

Tənliyə, müxtəlif arqumentlərdən asılı olan müxtəlif triqonometrik funksiyalar daxildirsə, onu çevirmələrin köməyi ilə bir və ya bir neçə sadə

tənliklərin həllinə gətirmək lazımdır. Bunun üçün bütün funksiyalar eyni arqumentli bir triqonometrik funksiyaya gətirilir və həll olunur.

Triqonometrik tənliklərin həllində, cəbri tənliklərin həllində olduğu kimi, məchulun mümkün qiymətləri çoxluğuna fikir vermək lazımdır.

$\sin x, \cos x$ funksiyaları x –in bütün həqiqi qiymətlərində, $tg\,x$ funksiyası $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$ və $ctg\,x$ isə $x \neq k\pi, k = \ ;\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3; \ldots$ olduqda təyin olunur.

Triqonometrik funksiyaların tərifinə görə, triqonometrik tənliklərin mümkün qiymətləri çoxluğu yalnız həqiqi ədədlər olmalıdır.

Həll zamanı aparılan çevirmələr nəticəsində məchulun mümkün qiymətlər çoxluğunun genişlənməsi və daralması əlavə kök alınmasına və ya kök itirilməsinə səbəb olacağını da yaddan çıxarmaq olmaz. Bu halda tənliyin həlli dəqiqləşdirilməlidir [5, s.108-109].

Ümumtəhsil məktəblərində tədris olunan riyaziyyat fənninin məzmunda ən sadə olmayan müxtəlif növ triqonometrik tənlik nümunələri də əhatə olunur. Buların sırasına aid etmək olar:

∗ Triqonometrik funksiyalardan birinə görə cəbri tənlik olan triqonometrik tənliklər (dəyişənin əvəzlənməsi ilə həll olunan tənliklər);

∗ Cəbri tənliklərə gətirilən triqonometrik tənliklər;

∗ Bircins və bircins tənlliklərə gətirilən triqonometrik tənliklər(Sinus və kosinusa görə bircinsli triqonometrik tənliklər);

∗ $a \sin x + b\cos x = c$ şəklində olan triqonometrik tənliklər(köməkçi bucaq daxil etməklə və ya universal əvəzləmə üsulu ilə həll olunan tənliklər);

∗ Eyni adlı triqonometrik funksiyaların daxil olduğu triqonometrik tənliklər;

∗ Vuruqlara ayrılmaqla həll olunan triqonometrik tənliklər (sol tərəfi vuruqlara ayrılan və sağ tərəfi sıfır olan tənliklər);

∗ Dərəcəsini azaltmaqla həll olunan triqonometrik tənliklər;

∗ Hasilin cəmə, cəmin hasilə çevrilməsi ilə həll edilən triqonometrik tənliklər;

∗ Qarışıq tipli triqonometrik tənliklər;

∗ Qiymətləndirmə və mühakimə üsulu ilə həll olunan triqonometrik tənliklər [6, s.370].

Elə triqonometrik tənliklər var ki, onları yuxarıda qeyd olunan üsulların bir neçə-sini eyni zamanda tətbiq etməklə həll etmək mümkün olur. Yüksək dərəcəli triqo-nometrik tənlikləri, əsasən, məlum düsturların köməyi ilə, onların dərəcəsini aşağı salmaq, sonra isə mümkün olduqda eyni arqumentə gətirmək, yaxud da triqo-nometrik funksiyaların birinə nəzərən yüksək dərəcəli cəbri tənlik kimi həll etmək lazımdır. Bir çox tənliklərin həlli $(sin^2 x + cos^2 x)^n = 1$ eyniliyinin tətbiqi ilə asanlaşır.

Triqonometrik tənliklərin həllində qrafik (qrafikin qurulması yolu ilə həll), funksional (həll zamanı bəzi teoremlər istifadə olunur), həmçinin funksional üsulun xüsusi növü olan funksional əvəzləmə metodundan istifadə etmək lazım gəlir. Onu da qeyd etmək yerinə düşər ki, triqonometrik tənliklər sistemlərinin həlli triqonometrik tənliklərin və ümumiyyətlə, tənliklər sisteminin həllində istifadə olunan üsullara əsaslanır.

Qeyd etmək lazımdır ki, triqonometrik tənliklərii həll etmək üçün triqonometriyanın bütün bölmələri üzrə şagirdlərin biliklərinin (triqonometrik funksiyaların xassələri, triqonometrik ifadələrin çevrilməsi üsulları və s.) sistemləşdirilməsi tələb olunur, riyaziyyat fənninin digər məzmun xətləri üzrə əldə olunmuş bir çox təlim materialları da diqqət mərkəzinə gətirilməli olur. Başqa sözlə, triqonometrik tənliklərin həlli üsullarının mənimsənilməsi prosesi mövcud-şagirdin təcrübəsində özünə yer almış bacarıqların yeni məzmuna köçürülməsini nəzərdə tutur. Söylədiklərimizə rəğmən, belə qənaət hasil olur ki, triqonometrik tənliklərin həllində gərək olan əsas bacarıqların formalaşdırılması metodikası mükəmməl səviyyədə işlənib hazırlanarsa, bu, riyaziyyat fənnini üzrə gözlənilən nəticələrin əldə olunmasına müsbət təsir etmiş olar. Odur ki, müəllim triqonometrik tənlikləri həll etmək üçün bacarıq və vərdişlərin formalaşdırılması üsullarına kifayət qədər diqqətli olmalıdır. Ancaq bu məsələ o qədər asan reallaşmır. Şagirdlərin fərdi xüsusiyyətlərinin, xüsusən də onların təfəkkür tərzlərinin, potensial imkanlarının fərqliliyi, triqonometrik tənliklərin müstəsna dərəcədə müxtəlifliyi sözügedən prosesin həyata keçirilməsində optimal variantın seçilməsini zəruri edir. Triqonometrik tənliklərin növ müxtəlifliyi şagirdlərin həll üsulunu seçməsində müəyyən çətinliklərə səbəb olur. Şagird əldə etdiyi bilikləri bir obyekt üzərindən digər obyekt üzərinə keçirmək imkanına malik olmalıdır. Başqa sözlə, o, riyazi bilikləri sistemindən bu və ya digər triqonometrik tənliyin həlli üçün zərurilərin fəallaşdırılmasına və bu biliklərin fikri hərəkət formasının məqsədəuyğun seçilməsinə nail ola bilməlidir. Bu fel (hərəkət forması) bacarıqdır. Yeri gəlmişkən vurğulayaq ki, metodik ədəbiyyatda "bacarıq" anlayışının müxtəlif şərhləri mövcuddur [2, s.204].

Məsələn, A.V. Petrovski vurğulayır ki, "bacarıq" dedikdə, mövcud məlumatlar, biliklər və ya anlayışlardan istifadə etmək, əşyaların vacib xassələrini müəyyənləşdirmək və müəyyən nəzəri və ya praktik məsələləri uğurla həll etmək üçün onlarla işləmək xüsusiyyəti başa düşülür. T.B. Buliqina görə,"...bacarıq müəyyən bir fəaliyyəti şüurlu şəkildə yerinə yetirmək xüsusiyyətidir". M.V. Matyuxina bildirir ki, bacarıq bir fəaliyyətin uğurlu icrasını təmin edən bilik və vərdişlərin birləşməsidir. Vərdişlər fəaliyyətin avtomatlaşdırılmış üsullarıdır. Bilik şüurdakı subyektiv obrazların müxtəlifliyidir.

Yuxarıda vurğuladıq ki, bir qədər mürəkkəb tənliklərin həlli müəyyən çevirmələrin köməyi ilə sadə triqonometrik tənliklərin həllinə gətirilir, hansı ki, onların həllinin öyrədilməsi prosesində diqqət mərkəzinə çəkilməli, xüsusi vurğulanmalı məqamlar vardır. Triqonometrik tənliklərin hansı növ həll üsulunun mövcudluğu ilə bağlı seçim etmək, seçilmiş üsulu düzgün həyata keçirmək, tənliyin kökünü səhfsiz formulə etmək şagirdlər üçün, təbii olaraq, müəyyən idrak çətinliyi yaradır. Əslində belə vəziyyətin mövcudluğu arzuolunan haldır və tədris prosesinin şagird üçün gücüçatan çətinliyin mövcudluğu onun əqli fəaliyyətinin fəallaşmasının əsasında durur. Şagird düşdüyü problemli situasiyanı aradan qaldırmaq üçün analitik və evristik məntiq formalarından, başqa sözlə, əqli fəaliyyətin analitik və evristik növlərindən faydalanmaq məcburiyyətində qalır. Müəllim bilməlidir ki, triqonometrik tənliklərin həlli şagirdlərin analitik və evristik fəaliyyət növlərinin optimal variantlarını seçmək təcrübəsini inkişaf etdirir, eyni zamanda da belə bir təcrübənin mövcudluğu triqonometrik tənliklərin həlli üsullarının düzgün seçilməsi və həllin düzgün nəticə ilə sonuclanmasını şərtləndirir. Burada "səbəb" ilə "nəticə" funksiyaları qarşılıqlı şəkildə dəyişilmiş olur [2, s.203].

Qənaətimizə görə, triqonometrik tənliklərin sadə triqonometrik tənliklərə gətirilməsi üçün həll üsulunun seçilməsi, seçilmiş üsulun düzgün tətbiqi və tənliyin həllinin müəyyən olunması ilə bağlı şagirdlərin fəaliyyətində təzahür edən çətinliklər və yanılmaların aradan qaldırılması üçün diqqət mərkəzində saxlanılması vacib olan məqamlarının interpretasiyanı aşağıdakı məzmunda formalaşdırmaq məqsədə uyğun olar.

Tutaq ki, $sinx + cosx = \sqrt{2}$, $|sinx + cosx| = \sqrt{2}$, $|sinx| + |cosx| = \sqrt{2}$ tənliklərini həll etmək tələb olunur. Bi çox hallarda şagirdlər verilmiş tənliklərin həllində "tənliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəltməklə onun sadə triqonometrik tənliyinə gətirilməsi"ni özlərinin məxsusi əsaslandırılmış fərziyəsi kimi qəbul edir. Hlbuki, bu tənliklər bir-birilərinə oxşasalar da onların hər birinə eyni yanaşmanı tətbiq etmək, fikrimicə, optimal həll yolu olmaz. Birinci tənlikdə "hər iki tərəfi kvadrata yüksəltmə üsulu" tətbiq olunarsa, alınar: $(sinx + cosx)^2 = (\sqrt{2})^2$; $sin^2x + 2sinxcosx + cos^2x = 2$. Bu tənliyi həll etsək, onda əlavə olaraq $sinx + cosx = -\sqrt{2}$ tənliyinin də həlləri də verilmiş tənliyin həllər çoxluğuna daxil olur, əlavə köklər alınır. Məhz buna görə də yoxlama prosesinin tətbiq edilməsi lüzumu yaranmış olur. Yaxşı olar ki, $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ tənliyini həll etmək üçün hər iki tərəfin $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ifadəsinə vurulması ilə həyata keçirilən həll yolundan istifadə olunsun, onda alarıq:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}sinx + \frac{\sqrt{2}}{2}cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}.$$

Burada $sinx\ cos\frac{\pi}{4} + sin\frac{\pi}{4}cosx = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ eyniliyindən istifadə etsək, $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1;\ \ x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ tapmış olarıq.

$|sinx + cosx| = \sqrt{2}$, $|sinx| + |cosx| = \sqrt{2}$ tənliklərinin hər birini həll etmək üçün yuxarıda sözügedən həll üsulundan istifadə etmək olar, çünki hər iki tənlikdə sağ və sol tərəflər müsbət ədədlərdir. $|sinx + cosx| = \sqrt{2}$ tənliyini hər iki tərəfini eyni zamanda kvadrata yüksəltdikdə $sin^2x + 2sinxcosx + cos^2x = 2$ alınacaq. Bu tənliyi sadələşdirsək $sin2x = 1$ alarıq. Bu tənliyin də həlli $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ olacaq.

Lakin $|sinx| + |cosx| = \sqrt{2}$ tənliyində məsələ bir qədər fərqlidir. Tənliyi kvadrata yüksəltsək, $sin^2x + 2|sinx||cosx| + cos^2x = 2$ alarıq və bu tənlik $|sin2x| = 1$ şəklinə düşər. Onun həlli isə $sin2x = 1$ və $sin2x = -1$ tənliklərinin həllindən ibarətdir.

Triqonometrik tənlikləri həll etdikdən sonra alınan köklərin birləşdirilməsi məsələsi şagirdlər tərəfindən çətinliklə qavranılır. Ona görədə bir çox məsələləri həll etdikdən sonra cavabları birləşdirmək çətin olduğuna görə əvvəlcədən bu problemi həll etmək əlverişli olur. Fikrimizcə, burada həmin problemi həll etməyin yolu hər tərəfi yenidən kvadrata yüksətmək, sonradan isə yarımarqument düsturunu tətbiq etməkdir.

$$|sin2x|^2 = 1$$

Bilirik ki, ifadənin modulunun kvadratı ilə ifadənin kvadratı bərabərdir. Onda $sin^22x = 1$ yarım arqument düsturunu tətbiq etsək, $\frac{1-\cos 4x}{2} = 1$, $1 - \cos 4x = 2\ \ \cos 4x = -1$. Deməli, $4x = \pi + 2\pi k,\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ olacaq.

Şağırdlərə anlatmaq lazimdır ki, müəyyən bir yanaşmanın bir tənliyin həllində doğru olması, onun digər tənliyin həllində də optimal həll yolu olması demək deyildir. Seçim yollarının variantlılığına əsas yaradan tənlik nümunələrinin üzərində şagirdlərin fəaliyyətə cəlb olunması onların evrestik fəaliyyətlərinin tənzimlənməsi üçün vacibdir. Məsələn, şağirdlərə belə bir sual vermək olar: "Əgər triqonometrik tənlikdə yalnız sin^2ax və ya cos^2bx iştirak edirsə, onda bu tənliklərin alınmış həllərini birləşdirmək problemi yaşanmaması üçün necə hərkət etmək olar?"

Burada müəllim öz fasiltatorluğu ilə şagirdləri "Yarımarqument düsturlarının köməyi ilə dərəcəsini aşağı salmaqla bu problemlə qarşılaşmadan yan keçmək mümkündür" qənaətinə gəlmələrinə nail olmalıdır. Və ya başqa bir tənlik üzərində şagirdləri idraki fəaliyyətə cəlb etmək olar.

Misal. $cos^23x = \frac{1}{4}$ tənliyin həll edin.

Bu tənlik $cos3x$ –ə görə ikidərəcəli tənlikdir. Onu(dərəcəsini aşağı salmaqla) aşağıdakı kimi yazmaq olar: $\frac{1+cos6x}{2} = \frac{1}{4}$, buradan $cos6x = -\frac{1}{2}$

tənliyini alarıq ki, onun həlli $x = \pm\frac{1}{6}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{6}\cdot 2\pi n, n\epsilon z$ və ya $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n\epsilon z$ şəklindədir.

"Tənliklərin həllərinin birləşdirilməsi halından davamlı olaraq qaçmaq" məqsədəuyğun deyildir. Şagird bu məsələyə də bələd olmalı, onun çəmini (yolunu) öyrənməlidir. Bu baxımdan $cosx - \cos 3x = 0$ tənliyinin həllinə şagirdlərin diqqətini çəkmək olar.

Tənliyini həll edərkən triqonometrik funksiyaların cəminin hasilə çevirməsindən istifadə etsək, onda alarıq: $2sinx \cdot \sin 2x = 0$. Hasilin sıfır olmasından vuruqlardan heç olmasa birinin sıfır olması alınır. Onda $sinx =$, $\sin 2x =$ olur. Bu tənliklərin həlli isə $x = \pi n,\ \ x = \frac{\pi k}{2}$ olacaq. Aydındır ki, n, k tam ədədələri üçün πn həllər çoxluğu $\frac{\pi k}{2}$ həllər çoxluğunun tərkibində olacaq. Ona görə də verilmış tənliyin həllini $\frac{\pi k}{2}$ kimi götürmək olar.

Bəzi hallarda tənliyin həllini tapmaq üşün onu iki sadə triqonometrik tənlik şəklinə salıb, həmin cavabların ortağını tapmaq lazımdır. $\sin 2x + 2\cos 8x = 3$ tənliyini həll edən zaman şagirdlər bilməlidirlər ki, verilmiş tənliyi yalnız $\sin 2x = 1$ və $\cos 8x = 1$ olduqda həlli var. Deməli, tənliyin həllini tapmaq üçün $\sin 2x = 1$ və $\cos 8x = 1$ tənliklərini ödəyən eyni x –ləri tapmaq lazımdır. Bu tənliklərin həlləri isə uyğun olaraq $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \epsilon z$ və $x = \frac{\pi k}{4}, k \epsilon z$, çoxluqlarıdır. Aydındır ki, $\cos 8x = 1$ tənliyinin həlli olan $x = \frac{\pi k}{4}, k \epsilon z$, həm də $\sin 2x = 1$ tənliyini ödəməlidir. Ona görə müəyyən k və n –lər üçün $\frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{\pi k}{4}, n \epsilon z, k \epsilon z$ olmalıdır. Buradan $k = 4n + 1$ alarıq. Yəni $k = 4n + 1$ şəklində olarsa, $\frac{\pi}{4} + \pi n$ və $\frac{\pi k}{4}$ çoxluqları eyni çoxluqlar olar.

Beləliklə, $\sin 2x + 2\cos 8x = 3$ tənliyinin həlləri $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \epsilon z$ şəklindədir.

Ümümiyyətlə, triqonometrik tənliklərin həlləri zamanı ortaya çıxan bu problemlərin həlli yollarının şagirdlər tərəfindən araşdırılması şagirdlərin analitik və evrestik fəaliyyətlərinin tənzimlənməsi üçün vacibdir. Qeyd edək ki, tənliklərin həllinin olub-olmamasının araşdırılmasının, həllərin yoxlanılmasının şağırdlərə tapşırılması onların analitik və evrestik fəaliyyətlərini tənzimləyir. Triqonometrik tənliklərin həlli prosesində kökün dürüst(düzgün) müəyyən edilməsi məqsədli yoxlamanın aparılmasına $\sin x + \cos x = 1$ tənliyinin hər iki tərəfinin kvadrata yüksəldilməsi yolu ilə həllindən nümunə kimi faydalanmaq olar.

Bu tənliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəltsək, alarıq:

$$sin^2x + 2sinxcosx + cos^2x = 1.$$

Lakin $sin^2x + cos^2x = 1$ olduğuna görə, $2sinxcosx = 0$ olur. $\sin x =$ olarsa, $x = \pi n$, $\cos x =$ olduqda isə $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ olur. Bu iki qrup həlli bir $x = \frac{\pi}{2} \cdot n$ düsturu ilə yazmaq olar.

Verilən tənliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəltdiyimiz üçün alınan köklərin içərisində kənar köklərin olması halı mümkündür. Məhz buna görə də yoxlama aparılmalıdır. $x = \frac{\pi}{2} \cdot n$ qiymətlərinin hamısını 4 qrupa ayırmaq olar:

1) $x = 2k\pi$; $(n = 4k)$; 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $(n = 4k + 1)$;

3) $x = \pi + 2k\pi$; $(n = 4k + 2)$; 4) $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$; $(n = 4k + 3)$.

$x = 2k\pi$ olduqda, $\sin x + \cos x = 1$ olur. Buna görə də $x = 2k\pi$ qiymətləri verilən tənliyin köküdür. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ olduqda, $\sin x + \cos x = 1$ olur.

Deməli, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ də verilən tənliyin köküdür. $x = \pi + 2k\pi$ olduqda, $\sin x + \cos x = -1$ olur. Buna görə $x = \pi + 2k\pi$ qiymətləri verilən tənliyin kökü deyildir. Bunun kimi də $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ qiymətlərinin də tənliyin kökü olmadığı göstərilir.

Beləliklə, verilən tənliyin kökləri aşağıdakılardır: $x = 2k\pi$ və $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, burada k və n istənilən tam ədədlərdir [4, s.286].

Tənliklərin həllinin olub-olmamasının araşdırılmasına $a \sin x + b \cos x = c$ tipli tənlik üzərində şagirdlərin fəaliyyətə cəlb edilməsi nümunə kimi qəbul oluna bilər. Həmin kateqoriyadan olan tənlikləri həll edərkən şagirdlər verilmiş tənliyin hər iki tərəfini $\sqrt{a^2 + b^2}$ ədədinə bölməklə, $\sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ şəklinə gətirməli olurlar. Buradan da alınır ki, $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| < 1$ olduqda, $a \sin x + b \cos x = c$ tənliyinin həllini

$$x = -\alpha + (-1)^k arc\sin\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi k, k\epsilon z$$

kimi göstərmək olar. Burada α ədədi $\alpha = arc\cos\frac{a}{a^2+b^2}$, $\alpha = arc\sin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ bərabərliklərindən və ya α -nın hansı rübə düşdüyü məlum olduqda, $\alpha = arc\,tg\frac{b}{a}$ bərabərliyindən tapılır. $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > 1$ olduqda tənliyinin tənliyinin həlli yoxdur.

Başqa bir nümunə. $3 - cos^2x - 3\sin x = \quad \Leftrightarrow sin^2x - 3\sin x + 2 =$, $\sin x = y$ olsun, onda $y^2 - 3y + 2 = 0$, buradan $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. $\sin x$ ədədi 2-yə bərabər olmadığı üçün $\sin x = 1$ tənliyi həll edilməlidir [1, s.62].

Tədqiqat işinin elmi yeniliyi. Triqonometrik tənliklərin həll üsullarının mənimsənilməsi ilə şagirdlərin analitik və evristik fəaliyyətlərinin inkişafı arasında qarşılıqlı şəkildə dəyişən "səbəb-nəticə" dialektikasının mövcudluğu

diqqət mərkəzinə çəkilmiş, bu əlaqənin reallaşdırılmasının metodik aspektlərinə aydınlıq gətirilmişdir.

Tədqiqat işinin praktik əhmiyyəti. Praktiklərin fəaliyyətində özünü göstən ən sadə triqonometrik tənliklərin həllinin ümumi yazılışının əyani əsaslala arqumentləşdirilməməsi və xüsusi halların fərqləndirilməməsi, ən sadə olmayan triqonometrik tənliklərin həlli ilə bağlı ümumi cəhətlərin və həll üsullarının seçilməsinin arqumentləşdirilməməsi, bu və ya digər həll üsulunun tətbiqində məxsusiliyin diqqət mərkəzinə çəkilməməsi, şagirdlərin nəticənin dürüst müəyyən olunmasına və araşdırmanın həyata keçirilməsinə diqqətlərinin lazımi səviyyədə yönəldilməməsi kimi çatışmazlıqların aradan qaldırılması yollarına elmi şərhlər verilmişdir.

Nəticə. Triqonometrik tənliklərin həlli üsullarının mənimsənilməsi ilə şagirdlərin analitik və evristik fəaliyyətlərinin inkişafı arasında "səbəb-nəticə" dialektikası mövcuddur, bu dialektikanın diqqət mərkəzinə çəkilməsi riyaziyyat fənninin tədrisində gözlənilən nəticələrin reallaşmasına müsbət təsir göstərir.

ƏDƏBİYYAT

1. *İbelev B.M., Moiseyeva Z.İ., Şvartcburd S.İ.* 10-cu sinifdə Cəbr və analizin başlanğıcı (Müəllimlər üçün vəsait). Bakı: "Maarif" nəşriyyatı,1980, 241 səh.
2. *İbrahimov F.N.* Orta ümumtəhsil məktəblərində riyazi təhsilin fəlsəfəsi, didaktikası, həyatakeçirilmə texnologiyası (Dərs vəsaiti). Bakı: "Mütərcim", 2018, 1375 səh.
3. *İbrahimov F.N.* Ümumtəhsil məktəblərində riyaziyyatın tədrisi metodikasından mühazirələr. Bakı: "Mütərcim", 2019, 480 səh
4. *Koçetkov Y.S., Koçetkova Y.S.* Cəbr və elementar funksiyalar. I hissə (Orta məktəbin 9-cu sinif şagirdləri üçün dərs vəsaiti). Bakı: "Maarif" nəşriyyatı, 1973, 355 səh.
5. *Məmmədov R.H., Xəlilov H.M., Hüseynov Ş.T.* Tənliklər və bərabərsizliklər (Ali məktəblərin hazırlıq şöbələri üçün dərs vəsaiti). Bakı: "Maarif " nəşriyyatı, 1991, 347 səh.
6. *Yaqubov M.H., Abdullayev İ.M., Yaqubov Ə.H., Kərimli N.A., Bağırov A.H., Ağayev H.N., Vəliyev M.M.* Riyaziyyat (Qəbul imtahanlarına hazırlaşanlar, yuxarı sinif şagirdləri və müəllimlər üçün dərs vəsaiti). Bakı: "Abituriyent", 2011, 855 səh.

Redaksiyaya daxil olub 05.05.2021