UOT 512.53

L.Ş.Əbdülkərimli, H.A.Əkpərova
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
yeganeselimova@mail.ru

VEKTORLAR SİSTEMİNİN XƏTTİ ASILILIĞINA VƏ MATRİSİN RANQINA AİD BƏZİ QEYDLƏR

Açar sözlər: *matris, ranq, vektor, meydan, bazis.*

Vektorlar sisiteminin xətti asılılığı haqqındakı əsas xassələrdən biri də n sayda vektorlar sisteminin $k < n$ olduqda k sayda xətti asılı olmayan vektordan ibarət sistem ilə xətti ifadə olunmasıdır.

Həmçinin matrisin sətirlər sisteminin və sütunlar sisteminin ranqının bərabər olması haqqında teorem cəbr kursunda mühüm rol oynayır.

Məqalədə göstərilən teoremlərin sadə şəkildə isbatları verilmişdir.

Л.Ш.Абдулкаримли, Х.А.Акпарова

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ О ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ И О РАНГЕ МАТРИЦЫ

Ключевые слова: *матрица, ранг, вектор, поле, базис*

Одним из основных свойств линейной зависимости системы векторов является случай выражения системы n векторов через системы линейно независимых к векторов, где $k < n$. Также теорема о равенстве строчечного и столбцового рангов матрицы играет важную роль в алгебре.

В статье даны доказательства указанных теорем более в простом виде.

L.Sh.Abdulkarimli, H.A.Akparova

SOME NOTES ABOUT OF RANK OF MATRIX LINEAR DEPENDENCE OF VECTOR SYSTEMS

Keywords: *matrix, rang, vector, field, basic*

One of the fundamental characterstics of the linear inderendencives representation of them by others.

Also, theorem about of equality rank of column and row of matrix is one of impotortant teorems in alqebrian in article we given simple proof of this theorem.

$\mathcal{P}$ meydanı üzərində V xətti fəzasının xətti asılı olmayan hər hansı

$$u_1, u_2, ..., u_k \qquad (1)$$

vektorlar sisteminin xətti bürüyənini $L(u_1, u_2, ..., u_k)$ ilə işarə edək. (1) həm də $L(u_1, u_2, ..., u_k)$ -nın bazisidir. Əgər müəyyən v vektoru bu xətti bürüyənə daxildirsə, onda elə $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in P$ skalyarları var ki,

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_k u_k \qquad (2)$$

xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilir. (1) sistemi xətti asılı olmadığına görə (2) ayrılışı yeganə olur. Bu halda

$$(v) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \in P^k \left([v] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} \in P^k \right)$$

hesabi k ölçülü vektoru v vektorunun (1) sisteminə nəzərən koordinat sətri (sütunu) adlanır.

Qeyd edək ki, yuxarıda göstərilən V xətti fəzası istər sonlu ölçülü, istərsə də sonsuz ölçülü ola bilər. Bütün hallarda onun elementlərini vektorlar, P meydanının elementlərini skalyarlar adlandırırlar.

Vektorlar sisteminin bəzi xassələrinin tədrisində tələbələr üçün çətinlik törədə bilən məqamlar mövcuddur. [1], [2]. Bu məqalədə məqsədimiz bəzi xassələrin isbatını müəyyən bir üsulla sadələşdirməkdir. Bunun üçün aşağıdakı teoremi isbat.

Teorem 1: Fərz edək ki, sıfırdan fərqli

$$v_1, v_2, ..., v_n \qquad (3)$$

sisteminin vektorları n-dən az sayda vektordan ibarət olan və xətti asılı olmayan (1) sistemi ilə xətti ifadə olunur. Onda (3) sistemi xətti asılı olur.

İsbatı: Teoremin şərtinə əsasən (3) vektorları (1) sistemi ilə xətti ifadə olunduğuna görə

$$v_1, v_2, ..., v_n \in L(u_1, u_2, ..., u_k) \qquad (4)$$

Şərtə görə $u_1, u_2, ..., u_k$ sistemi xətti asılı deyil. Onda $u_1, u_2, ..., u_k$ sistemi $L(u_1, u_2, ..., u_k)$ altfəzasının bazisi olur. Deməli, elə

$$\alpha_{ij} \begin{pmatrix} i = 1, ..., k \\ j = 1, ..., n \end{pmatrix}$$ skalyarları var ki,

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \ldots + \alpha_{k1}u_k \\ v_2 &= \alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \ldots + \alpha_{k2}u_k \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= \alpha_{1n}u_1 + \alpha_{2n}u_2 + \ldots + \alpha_{kn}u_k \end{aligned} \qquad (5)$$

olur.

(5) ayrılışı vasitəsi ilə qurulan k ölçülü hesabi

$$\begin{aligned} (v_1) &= (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{k1}) \\ (v_2) &= (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{k2}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (v_n) &= (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{kn}) \end{aligned} \qquad (6)$$

vektorları $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorlarının (1) bazisi üzrə koordinat sətirləridir.

Göstərək ki, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sistemi xətti asılıdır. Yəni göstərək ki, heç olmasa biri sıfırdan fərqli olan elə $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ skalyarları var ki,

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \theta \qquad (7)$$

olur. Burada $\theta \in V$ sıfır vektordur.

(7) bərabərliyini (6) sətirləri vasitəsi ilə də yaza bilərik.

$$\lambda_1(v_1) + \lambda_2(v_2) + \ldots + \lambda_n(v_n) = \theta_1 \qquad (8)$$

Burada $\theta_1 \in P^k$ və θ_1 , P^k hesabi vektorlar fəzasının sıfırıdır. (8) bərabərliyi aşağıdakı bircins xətti tənliklər sistemi ilə ekvivalentdir.

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{21}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{1n}\lambda_n &= 0 \\ \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{2n}\lambda_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k1}\lambda_1 + \alpha_{k2}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{kn}\lambda_n &= 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

Teoremin şərtinə görə $k < n$.

(9) bircins xətti tənliklər sisteminin məchullarının sayı tənliklərinin sayından çox olduğuna görə onun sıfırdan fərqli $(\lambda_1^\circ, \lambda_2^\circ, \ldots, \lambda_n^\circ)$ həlli var. Həmin $\lambda_1^\circ, \lambda_2^\circ, \ldots, \lambda_n^\circ$ skalyarları üçün

$$\lambda_1^\circ v_1 + \lambda_2^\circ v_2 + \ldots + \lambda_n^\circ v_n = \theta$$

olar. Bu da (3) sisteminin xətti asılı olduğunu göstərir. Bu teoremdən aşağıdakı nəticələr çıxır.

Nəticə 1: Xətti asılı olmayan $v_1, v_2, ..., v_n$ vektorlar sistemi $u_1, u_2, ..., u_k$ vektorlar sisteminin xətti kombinasiyaları şəklində göstərilə bilərsə $n \leq k$ olur.

Doğrudan da, $n > k$ olsa teoremin hökmünə görə $v_1, v_2, ..., v_n$ sistemi xətti asılı olar. Bu da şərtə ziddir.

Nəticə 2: Xətti asılı olmayan iki sonlu vektorlar sisteminin hər biri digərinin xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilərsə, bu sistemlərdəki vektorların sayı bərabərdir.

Nəticə 3: Sonlu vektorlar sisteminin müxtəlif bazislərindəki vektorların sayı bərabərdir.

Nəticə 4: n-ölçülü hesabi $\mathscr{P}^n$ fəzasının n-dən çox sayda istənilən vektorlar sistemi xətti asılıdır.

Doğrudan da $m > n$ olduqda və $u_1, u_2, ..., u_m \in P^n$ vektorlar sisteminin hər biri $\mathscr{P}^n$-in vahid $e_1, ..., e_n$ bazisi üzrə xətti ifadə olunduğuna görə (yəni $u_1, u_2, ..., u_m \in L(e_1, ..., e_n)$ olduğu üçün) teorem 1-in hökmünə əsasən $u_1, u_2, ..., u_m$ sistemi xətti asılı olar.

Nəticə 5: $\mathscr{P}^n$ fəzasının m sayda $u_1, u_2, ..., u_m$ vektorlar sistemi xətti asılı deyilsə $m \leq n$ olur.

Məlum olduğu kimi verilmiş sistemin bazisindəki vektorların sayı sistemin ranqı adlanır.

Vektorlar sisteminin ranqı ilə əlaqəli olan və çətin tədris olunan məsələlərdən biri də matrisin ranqına aid aşağıdakı teoremdir.

Teorem 2: Matrisin sətirlər sisteminin ranqı onun sütunlar sisteminin ranqına bərabərdir.

Bu teoremin isbatı da tələbələr üçün nəzərə çarpacaq dərəcədə mürəkkəbdir. $[1][3]$. Ona görə də teorem 2-nin isbatını aşağıdakı istiqamətdə aparaq.

Əvvəlcə aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 3: $r \times s$ ölçülü matrisin həm sətirləri, həm də sütunlar sistemi xətti asılı deyilsə, $r = s$ olar.

İsbatı:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1s} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \alpha_{rs} \end{pmatrix}$$

matrisinin s sayda $A^1, A^2, ..., A^s \in P^r$ vektorları xətti asılı olmadığına görə $s \le r$ olur. Eyni mühakimə ilə deyə bilərik ki, A matrisinin r sayda $A_1, A_2, ..., A_r \in P^s$ sətirləri xətti asılı olmadığından $r \le s$ olar. Buradan $r = s$ alınar.

Teorem 2-ni isbat etmək üçün $m \times n$ ölçülü

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisini götürək. Fərz edək ki, onun sətirlər sisteminin ranqı r, sütunlar sisteminin ranqı s-dir.

Ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, B-nin ilk r sətri və ilk s sütunu xətti asılı deyil, qalan sətirlər və sürunlar əvvəlkilərin xətti kombinasiyalarıdır. Doğrudan da, vektorların yerini dəyişdikdə vektorlar sisteminin ranqı dəyişmir. B matrisinin əvvəlcə sətirləri, sonra sütunları üzərində elementar çevirmələr aparmaqla sətir və sütun ranqları, uyğun olaraq r və s olan

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1s} & 0...0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2s} & 0...0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0...0 \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \dots & \beta_{rs} & 0...0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0...0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0...0 & 0...0 \end{pmatrix}$$

matrisini alarıq ki, bunun sətir və sütun ranqları yuxarıdkı A matrisinin sətir və sütun ranqına bərabərdir və teorem 3-ə əsasən bunlar üst-üstə düşür.

ƏDƏBİYYAT

1. *Baxşəliyev Y.R., Əbdülkərimli L.Ş.* "Cəbr kursu" Nurlan Bakı 2011, 440 c.
2. *Куликов Л.Я* «Алгебра и теория чисел», Москва, «Высшая школа», 1979, 559 c.
3. *Кострикин А. И.* «Введение в алгебру», Москва, «Наука» 1977, 495 c.

Redaksiyaya daxil olub 19.04.2021