УДК 517.95

А.С.Фараджев
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет
a.farajov@mail.ru

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА ШЕСТОГО ПОРЯДКА С ДВОЙНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Ключевые слова: *краевая задача, дифференциальные уравнения, существование, единственность, классическое решение*

Исследована одна краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными шестого порядка с интегральным граничным условием. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказываются существование и единственность классического решения исходной задачи.

A.S.Fərəcov

İKİLİ DİSPERSİYALI ALTI TƏRTİB BUSSİNESK TƏNLİYİ ÜÇÜN BİR QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

Açar sözlər: *sərhəd məsələsi, diferensial tənlik, varlıq, yeganəlik, klassik həll*

Alti tərtib xüsusi törəməli tənlik üçün inteqral şərtli bir sərhəd məsələsi araşdırılır. Əvvəl bu məsələ başqa ekvivalent məsələyə gətirilərək varlıq və yeganəlik teoremləri isbat olunur. Daha sonra bufaktlardan istifadə edərək qoyulmuş məsələnin klassik həllinin varlıgı və yeganəliyi isbat edilir.

A.S.Farajov

ON A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SIXTH ORDER BOUSSINESQ EGUATION WITH DOUBLE VARIANCE

Keywords: *boundary value problem, differential equations, existence, uniqueness, classical solution*

One boundary-value problem is investigated for sixth order partial differential equation with an integral boundary condition. First, an original problem is reduced to the equivalent problem, the theorem of existence and uniqueness of solution is proved for the latter. Then, using these facts the author proves existence and uniqueness of classical solution of the original problem.

1. Введение

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению краевых задач для уравнений в частных производных. Поэтому теория краевых задач в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес и дифференциальные уравнения четвертого порядка.

Современные проблемы естествознания приводят к необходимости обобщения классических задач математической физики, а также к постановке качественно новых задач, к которым можно отнести нелокальные задачи для дифференциальных уравнений. Среди нелокальных задач большой интерес представляют задачи с интегральными условиями. Нелокальные интегральные условия описывают поведение решения во внутренних точках области в виде некоторого среднего. Такого рода интегральные условия встречаются при исследовании физических явлений в случае, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственных измерений. Примером могут служить задачи, возникающие при исследовании диффузии частиц в турбулентной плазме [1], процессов распространения тепла [2, 3], процесса влагопереноса в капиллярно-простых средах [4], а также при исследовании некоторых обратных задач математической физики.

2. Постановка задачи и её сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим уравнение [5]

$$u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)-u_{ttxx}(x,t)+u_{xxxx}(x,t)++u_{ttxxxx}(x,t)=f(x,t) \qquad (1)$$

в области $D_T=\{(x,t):0\le x\le 1, 0\le t\le T\}$ и поставим для него краевую задачу с нелокальными начальными условиями

$$u(x,0)+\delta_1 u(x,T)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)+\delta_2 u_t(x,T)=\psi(x)\ \ (0\le x\le 1), \qquad (2)$$

периодическими условиями

$$u(0,t)=u(1,t),\ u_x(0,t)=u_x(1,t),\ u_{xx}(0,t)=u_{xx}(1,t)\,(0\le t\le T) \qquad (3)$$

и нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t)dx=0 \quad (0\le t\le T), \qquad (4)$$

где $\delta_1\ge 0$, $\delta_2\ge 0$ - заданные числа, $\varphi(x),\psi(x),f(x,t)$-заданные функции, а $u(x,t)$-искомая функция.

Определение. *Под классическим решением задачи (1)-(4) понимаем функцию $u(x,t)$, непрерывную в замкнутой области D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1) и удовлетворяющую* *условиям (1)-(4) в обычном смысле.*

Справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть* $\delta_1 \geq 0,\ \delta_2 \geq 0,\ 1+\delta_1\delta_2 \geq \delta_1+\delta_2$;

$$\varphi(x) \in C^3[0,1], \varphi'''(0) = \varphi'''(1),, \int_0^1 \varphi(x)dx = 0,$$

$$\psi(x) \in C^3[0,1],\ \psi'''(0) = \psi'''(1),\ \int_0^1 \psi(x)dx = 0,$$

$$f(x,t) \in C(D_T),\ \int_0^1 f(x,t)dx = 0\ \ (0 \leq t \leq T).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(4) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t)$, *из (1)-(3),*

$$u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(1,t)\ \ (0 \leq t \leq T), \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ является классическим решением задачи (1)-(4). Интегрируем уравнение (1) от 0 до 1 по x, имеем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx - \alpha(u_{ttx}(1,t) - u_{ttx}(0,t)) + u_{xxx}(1,t) - u_{xxx}(0,t) +$$

$$+ u_{ttxxx}(1,t) - u_{ttxxx}(0,t) = \int_0^1 f(x,t)dx. \tag{6}$$

Отсюда, с учётом $\int_0^1 f(x,t)dx = 0\ \ (0 \leq t \leq T)$, (3) и (4) имеем:

$$u_{ttxxx}(1,t) - u_{ttxxx}(0,t) + u_{xxx}(1,t) - u_{xxx}(0,t = 0\ (0 \leq t \leq T)$$

или

$$y''(t) + y(t) = 0\quad (0 \leq t \leq T), \tag{7}$$

где

$$y(t) = u_{xxx}(1,t) - u_{xxx}(0,t)\ \ (0 \leq t \leq T). \tag{8}$$

Легко видеть, что общее решение имеет вид:

$$y(t) = C_1\cos t + C_2 \sin t\ \ (0 \leq t \leq T). \tag{9}$$

Теперь ,с учетом $\varphi'''(0) = \varphi''(1),\ \psi'''(0) = \psi'''(1)$, находим:

$$y(0) + \delta_1 y(T) = u_{xxx}(1,0) - u_{xxx}(0,0) + \delta_1(u_{xxx}(1,T) - u_{xxx}(0,T)) =$$

$$= u_{xxx}(1,0) + \delta_1 u_{xxx}(1,T) - (u_{xxx}(0,0 + \delta_1 u_{xxx}(0,T)) = \varphi'''(1) - \varphi'''(0) = 0,$$

$$y'(0) + \delta_1 y'(T) = u_{txxx}(1,0) - u_{txxx}(0,0) + \delta_1(u_{txxx}(1,T) - u_{txxx}(0,T)) =$$

$$= u_{txxx}(1{,}0) + \delta_1 u_{txxx}(1,T) - (u_{txxx}(0{,}0 + \delta_1 u_{txxx}(0,T)) = \psi'''(1) - \psi'''(0) = 0. \quad (10)$$

Далее, из (9) и (10) получаем:

$$y(0) + \delta_1 y(T) = C_1 + \delta_1(C_1 \cos T + C_2 \sin T) = 0$$

$$y'.(0) + \delta_1 y'(T) = C_2 + \delta_2(-C_1 \sin T + C_2 \cos T) = 0$$

или

$$\begin{cases} C_1(1 + \delta_1 \cos T) + C_2 \sin T = 0 \\ -C_1\delta_2 \sin T + C_2(1 + \cos T) = 0 \end{cases}.$$

Так как $\delta_1 \geq 0,\ \delta_2 \geq 0,\ 1 + \delta_1\delta_2 \geq \delta_1 + \delta_2$, из система находим: $C_1 = C_2 = 0$. Подставляя $C_1 = C_2 = 0$ в (9), находим: $y(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T)$. Из (8) легко приходим к выполнению (5).

Теперь, предположим, что $u(x,t)$ является решением задачи (1)-(3), (5). Тогда из (6), с учетом (3), (5), имеем:

$$y''(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (11)$$

где

$$y(t) = \int_0^1 u(x,t)dx \quad (0 \leq t \leq T). \quad (12)$$

В силу (2) и $\int_0^1 \varphi(x)dx = 0$, $\int_0^1 \psi(x)dx = 0$, получаем:

$$y(0) + \delta y(T) = \int_0^1 (u(x{,}0) + \delta u(x,T))dx = \int_0^1 \varphi(x)dx = 0,$$

$$y'(0) + \delta y'(T) = \int_0^1 (u_t(x{,}0) + \delta u_t(x,T))dx = \int_0^1 \psi(x)dx = 0 \quad (13)$$

Из (11), с учетом (13) очевидно, что $y(t) \equiv 0 \quad (0 \leq t \leq T)$. Отсюда, в силу (12), легко приходим к выполнению (4). Лемма доказана.

3. Единственность решения задачи

Теорема 1. Если $\delta_1^2 + \delta_2^2 > 1$, то задача (1)-(3), (5) не может иметь более одного решения.

Доказательство. Допустим, что существуют два решения рассматриваемой задачи:

$$u_1(x,t),\ u_2(x,t)$$

и рассмотрим разность $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$.

Функция $v(x,t)$, очевидно, что удовлетворяет однородному уравнению

$$u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)-u_{ttxx}(x,t)+u_{xxxx}(x,t)+ +u_{ttxxxx}(x,t)=0 \quad (14)$$

и условиям:

$$v(0,t)=v(1,t), v_x(0,t)=v_x(1,t), v_{xx}(0,t)=v_{xx}(1,t), v_{xxx}(0,t)=v_{xxx}(1,t)\,(0\le t\le T) \quad (15)$$

$$v(x,0)+\delta v(x,T)=0, v_t(x,0)+\delta v_t(x,T)=0 \; (0\le x\le 1). \quad (16)$$

Докажем, что функция $v(x,t)$ тождественно равна нулю.

Умножим обе части уравнения (14) на функцию $2v_t(x,t)$ и проинтегрируем полученное равенство по x от 0 до 1 :

$$2\int_0^1 v_{tt}(x,t)v_t(x,t)dx-2\int_0^1 v_{xx}(x,t)v_t(x,t)dx-2\int_0^1 v_{ttxx}(x,t)v_t(x,t)dx+$$

$$+2\int_0^1 v_{xxxx}(x,t)v_t(x,t)dx+2\int_0^1 v_{ttxxxx}(x,t)v_t(x,t)dx=0 \;(0\le t\le T). \quad (17)$$

Пользуясь граничными условиями (15) имеем:

$$2\int_0^1 v_{tt}(x,t)v_t(x,t)dx=\frac{d}{dt}\int_0^1 v_t^2(x,t)dx \;(0\le t\le T);$$

$$2\int_0^1 v_{ttxx}(x,t)v_t(x,t)dx=2(v_{ttx}(1,t)v_t(1,t)-v_{ttx}(0,t)v_t(0,t))-$$

$$-2\int_0^1 v_{ttx}(x,t)v_{tx}(x,t)dx=-\frac{d}{dt}\int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx \;(0\le t\le T);$$

$$2\int_0^1 v_{xx}(x,t)v_t(x,t)dx=2(v_x(1,t)v_t(1,t)-v_x(0,t)v_t(0,t))-$$

$$-2\int_0^1 v_x(x,t)v_{tx}(x,t)dx=-\frac{d}{dt}\int_0^1 v_x^2(x,t)dx \;(0\le t\le T);$$

$$2\int_0^1 v_{xxxx}(x,t)v_t(x,t)dx=2(v_{xxx}(1,t)v_t(1,t)-v_{xxx}(0,t)v_t(0,t))-$$

$$-2\int_0^1 v_{xxx}(x,t)v_{tx}(x,t)dx=-2\int_0^1 v_{xxx}(x,t)v_{tx}(x,t)dx=$$

$$=-2(v_{xx}(1,t)v_{tx}(1,t)-v_{xxx}(0,t)v_{tx}(0,t))+2\int_0^1 v_{xx}(x,t)v_{txx}(x,t)dx=\frac{d}{dt}\int_0^1 v_{xx}^2(x,t))dx,$$

$$(0\le t\le T)$$

$$2\int_0^1 v_{ttxxxx}(x,t)v_t(x,t)dx = 2(v_{ttxxx}(1,t)v_t(1,t) - v_{ttxxx}(0,t)v_t(0,t)) -$$

$$-2\int_0^1 v_{ttxxx}(x,t)v_{tx}(x,t)dx = -2\int_0^1 v_{ttxxx}(x,t)v_{tx}(x,t)dx =$$

$$= -2(v_{ttxx}(1,t)v_{tx}(1,t) - v_{ttxxx}(0,t)v_{tx}(0,t)) + 2\int_0^1 v_{ttxx}(x,t)v_{txx}(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_0^1 v_{txx}^2(x,t)dx$$

$(0 \le t \le T)$.

Тогда, из (17) имеем:

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 v_t^2(x,t)dx + \frac{d}{dt}\int_0^1 v_x^2(x,t)dx + \frac{d}{dt}\int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx + \frac{d}{dt}\int_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx + \frac{d}{dt}\int_0^1 v_{txx}^2(x,t)dx = 0$$

или

$$y(t) \equiv \int_0^1 v_t^2(x,t)dx + \int_0^1 v_x^2(x,t)dx + \int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx + \int_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx + \int_0^1 v_{txx}^2(x,t)dx = C.$$

Отсюда, с учетом (17), получаем:

$$y(0) - (\delta_1^2 + \delta_2^2)y(T) = \int_0^1 (v_t^2(x,0) - (\delta_1^2 + \delta_2^2)v_t^2(x,T))dx +$$

$$+\int_0^1 (v_x^2(x,0) - (\delta_1^2 + \delta_2^2)v_x^2(x,T))dx +$$

$$+\int_0^1 (v_{tx}^2(x,0) - (\delta_1^2 + \delta_2^2)v_{tx}^2(x,T))dx + \int_0^1 (v_{xx}^2(x,0) - (\delta_1^2 + \delta_2^2)v_{xx}(x,T))dx +$$

$$+\int_0^1 (v_{txx}^2(x,0) - (\delta_1^2 + \delta_2^2)v_{txx}(x,T))dx == -\delta_1^2\int_0^1 v_t^2(x,T))dx - \delta_2^2\int_0^1 v_x^2(x,T))dx -$$

$$-\delta_1^2\int_0^1 v_{tx}^2(x,T))dx - \delta_2^2\int_0^1 v_{xx}(x,T))dx - \delta_1^2\int_0^1 v_{txx}(x,T))dx \le 0.$$

Таким образом:

$$y(0) - (\delta_1^2 + \delta_2^2)y(T)) = C(1 - (\delta_1^2 + \delta_2^2)) \le 0.$$

Так как $\delta_1^2 + \delta_2^2 > 1$, то $C = 0$. Следовательно,

$$\int_0^1 v_t^2(x,t)dx + \int_0^1 v_x^2(x,t)dx + \int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx + \int_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx + \int_0^1 v_{txx}^2(x,t)dx \equiv 0$$

Отсюда, заключаем, что

$$v_t(x,t) \equiv 0, v_x(x,t) \equiv 0, v_{tx}(x,t) \equiv 0, v_{xx}(x,t) \equiv 0, v_{txx}(x,t) \equiv 0.$$

Откуда, следует тождество

$$v(x,t) = const = C_0.$$

Пользуясь нелокальным условиям (6), имеем:

$$v(x,0) + \delta_1 v(x,T) = C_0(1+\delta) = 0.$$

Следовательно, $C_0 = 0$, ибо $\delta \geq 0$.

Тем самым доказано, что

$$v(x,t) \equiv 0.$$

Таким образом, если существуют два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи (1)-(3),(6), то $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$. Отсюда следует, что если решение задачи (1)-(3),(6) существует, то оно единственное. Теорема доказана.

С помощью леммы 1, из последней теоремы немедленно вытекает единственность исходной задачи (1)-(5).

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и $\delta_1 \geq 0,\ \delta_2 \geq 0,\ 1+\delta_1\delta_2 \geq \delta_1 + \delta_2$,

$$\varphi(x) \in C^3[0,1],\ \varphi'''(0) = \varphi''(1),,\ \int_0^1 \varphi(x)dx = 0,$$

$$\psi(x) \in C^3[0,1],\ \psi'''(0) = \psi'''(1),\ \int_0^1 \psi(x)dx = 0,$$

$$f(x,t) \in C(D_T),\ \int_0^1 f(x,t)dx = 0\ \ (0 \leq t \leq T).$$

Тогда задача (1)-(5) не может иметь более одного классического решения.

4. Существование решения задачи.

Рассмотрим спектральную задачу:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0\ \ (0 \leq x \leq 1), \tag{18}$$

$$X(0) = X(1),\ X'(0) = X'(1). \tag{19}$$

Известно [6], что собственные числа задачи (8), (9) состоят из чисел $\lambda_k = 2\pi k\ \ (k = 0,1,2,...)$, причем при $k \geq 1$ каждому собственному значению λ_k соответствуют две линейно независимые собственные функции $\cos\lambda_k x, \sin\lambda_k x$; кроме того, система

$$1, \cos\lambda_1 x, \sin\lambda_1 x, ..., \cos\lambda_k x, \sin\lambda_k x, ...$$

образует в $L_2(0,1)$ ортогональный базис.

Классическое решение задачи (1)-(3), (5) будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t)\cos\lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t)\sin\lambda_k x, \tag{20}$$

где

$$u_{10}(t)=\int_0^1 u(x,t)dx,\quad u_{1k}(t)=2\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx\ (k=1,2,...),$$

$$u_{2k}(t)=2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx\ (k=1,2,...).$$

Применяя формальный метод Фурье, из (1), (2) получаем:

$$(1+\lambda_k^2+\lambda_k^4)u_{1k}''(t)+(\lambda_k^2+\lambda_k^4)u_{1k}(t)=f_{1k}(t)\ \ (k=0,1,2,...,0\le t\le T),\tag{21}$$

$$\begin{aligned} &u_{1k}(0)+\delta_1 u_{1k}(T)=\varphi_{1k},\ \ (k=0,1,2,...),\\ &u_{1k}'(0)+\delta_2 u_{1k}'(T)=\psi_{1k}\quad (k=0,1,2,...),\end{aligned}\tag{22}$$

$$(1+\lambda_k^2+\lambda_k^4)u_{2k}''(t)+(\lambda_k^2+\lambda_k^4)u_{2k}(t)=f_{2k}(t)\ \ (k=1,2,...;0\le t\le T),\tag{23}$$

$$\begin{aligned} &u_{2k}(0)+\delta u_{2k}(T)=\varphi_{2k}\quad (k=1,2,...),\\ &u_{2k}'(0)+\delta u_{2k}'(T)=\psi_{2k}\quad (k=1,2,...),\end{aligned}\tag{24}$$

где

$$\varphi_{10}=\int_0^1\varphi(x)dx,\ \psi_{10}=\int_0^1\psi(x)dx\ ,\ f_{10}(t)=\int_0^1 f(x,t)dx\ ,$$

$$\varphi_{1k}=2\int_0^1\varphi(x)\cos\lambda_k xdx,\ \psi_{1k}=2\int_0^1\psi(x)\cos\lambda_k xdx\ ,\ (k=1,2,...)$$

$$f_{1k}(t)=2\int_0^1 f(x,t)\cos\lambda_k xdx\ \ (k=1,2,...),$$

$$\varphi_{2k}=2\int_0^1\varphi(x)\sin\lambda_k xdx,\ \psi_{21k}=2\int_0^1\psi(x)\sin\lambda_k xdx\ \ (k=1,2,...),$$

$$f_{2k}(t)=2\int_0^1 f(x,t)\sin\lambda_k xdx\ \ (k=1,2,...).$$

Из (21)-(24) имеем:

$$u_{10}(t)=\frac{\varphi_{10}}{1+\delta_1}+\frac{t-\delta_1(T-t)}{(1+\delta_1)(1+\delta_2)}\psi_{10}+\int_0^T G_0(t,\tau)f_{10}(\tau)d\tau,\tag{25}$$

$$\begin{aligned} u_{ik}(t)=\frac{1}{\rho_k(T)}\Big[&\varphi_{ik}(\cos\beta_k t+\delta_2\cos\beta_k(T-t))+\\ &+\frac{\psi_{ik}}{\beta_k}(\sin\beta_k t-\delta_1\sin\beta_k(T-t))\Big]+\frac{1}{1+\lambda_k^2+\lambda_k^4}\int_0^T G_k(t,\tau)f_{ik}(\tau)d\tau,\end{aligned}\tag{26}$$

где

$$G_0(t,\tau)=\begin{cases}-\dfrac{\delta_2 t+\delta_1(T-\tau)+\delta_1\delta_2(t-\tau)}{(1+\delta_1)(1+\delta_2)}, & t\in[0,\tau],\\ -\dfrac{\delta_2 t+\delta_1(T-\tau)-(1+\delta_1+\delta_2)(t-\tau)}{(1+\delta_1)(1+\delta_2)}, & t\in[\tau,T],\end{cases}$$

$$\beta_k=\sqrt{\frac{\lambda_k^2+\lambda_k^4}{1+\lambda_k^2+\lambda_k^4}},\qquad \rho_k(T)=1+(\delta_1+\delta_2)\cos\beta_k T+\delta_1\delta_2,$$

$$G_k(t,\tau)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\rho_k(T)}\cdot\dfrac{1}{\beta_k}[\delta_1\sin\beta_k\ (T-\tau)\cos\beta_k\ t+\\ \qquad +\delta_2\cos\beta_k\ (T-\tau)\sin\beta_k\ t+\delta_1\delta_2\sin\beta_k\ (t-\tau)], & t\in[0,\tau],\\ -\dfrac{1}{\rho_k(T)}\cdot\dfrac{1}{\beta_k}[\delta_1\sin\beta_k\ (T-\tau)\cos\beta_k\ t+\delta_2\cos\beta_k\ (T-\tau)\times\\ \qquad \times\sin\beta_k\ t+\delta_1\delta_2\sin\beta_k\ (t-\tau)]+\beta_{k,n,m}\sin\beta_k\ (t-\tau), & t\in[\tau,T].\end{cases}$$

Теорема 3. Пусть $\delta_1\ge 0,\ \delta_2\ge 0,\ 1+\delta_1\delta_2\ge\delta_1+\delta_2$; и

1. $\varphi(x)\in C^4[0,1], \varphi^{(5)}(x)\in L_2(0,1)$ и
$\varphi(0)=\varphi(1), \varphi'(0)=\varphi'(1),\ \varphi''(0)=\varphi''(1),\ \varphi'''(0)=\varphi'''(1), \varphi^{(4)}(0)=\varphi^{(4)}(1)$.

2. $\psi(x)\in C^4[0,1], \psi^{(5)}(x)\in L_2(0,1)$ и
$\psi(0)=\psi(1), \psi'(0)=\psi'(1),\ \psi''(0)=\psi''(1),\ \psi'''(0)=\psi'''(1), \psi^{(4)}(0)=\psi^{(4)}(1)$.

3. $f(x,t)\in C(D_T),\ f_x(x,t)\in L_2(D_T)$ и $f(0,t)=f(1,t)$.

Тогда функция

$$u(x,t)=\frac{\varphi_{10}}{1+\delta_1}+\frac{t-\delta_1(T-t)}{(1+\delta_1)(1+\delta_2)}\psi_{10}+\int_0^T G_0(t,\tau)f_{10}(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\rho_k(T)}\Big[\varphi_{1k}(\cos\beta_k t+\delta_2\cos\beta_k(T-t))+\right.$$

$$\left.+\frac{\psi_{1k}}{\beta_k}(\sin\beta_k t-\delta_1\sin\beta_k(T-t))\Big]+\frac{1}{1+\lambda_k^2+\lambda_k^4}\int_0^T G_k(t,\tau)f_{1k}(\tau)d\tau.\right\}\cos\lambda_k x+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\rho_k(T)}\left[\varphi_{2k}(\cos\beta_k t+\delta_2\cos\beta_k(T-t))+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\psi_{2k}}{\beta_k}(\sin\beta_k t-\delta_1\sin\beta_k(T-t))\right]+\frac{1}{11+\lambda_k^2+\lambda_k^4}\int_0^T G_k(t,\tau)f_{2k}(\tau)d\tau.\right\}\sin\lambda_k x \tag{27}$$

является решением задачи (1)-(3), (5).

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{3}<\beta_k<2,\ \frac{1}{2}<\frac{1}{\beta_k}<3,\ \frac{1}{\rho_k(T)}\leq\frac{1}{1-(\delta_1+\delta_2)+\delta_1\delta_2}\equiv\rho>0..$$

Учитывая эти, из (21), (22), (23), соответственно, находим:

$$|u_{10}(t)|\leq(1+\delta_1)^{-1}|\varphi_{10}|+(1+\delta_2)^{-1}(1+\delta_1)^{-1}|\psi_{10}|+$$

$$+(1+\delta_1)^{-1}(1+\delta_2)^{-1}(1+3\delta_1+3\delta_2+\delta_1\delta_2)T\sqrt{T}\left(\int_0^T|f_{10}(\tau)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|u_{ik}(t)|\leq 2\rho(1+\delta_2)|\varphi_{ik}|+2\rho(1+\delta_1)\psi_{ik}+$$

$$+2\sqrt{2}(1+2\rho(\delta_1+\delta_2+\delta_1\delta_2))\sqrt{2T}\ \lambda_k^{-4}\left(\int_0^T|f_{ik}(\tau)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}(i=1,2)$$

Отсюда имеем:

$$|u_{10}(t)|\leq(1+\delta_1)^{-1}|\varphi_{10}|+(1+\delta_2)^{-1}(1+\delta_1)^{-1}|\psi_{10}|+$$

$$+(1+\delta_1)^{-1}(1+\delta_2)^{-1}(1+3\delta_1+3\delta_2+\delta_1\delta_2)T\sqrt{T}\left(\int_0^T|f_{10}(\tau)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq 2\sqrt{3}\rho(1+\delta_2)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5|\phi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+2\sqrt{3}\rho(1+\delta_1)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5|\psi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+2(1+2\rho(\delta_1+\delta_2+\delta_1\delta_2))\sqrt{6T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|f_{ik}(\tau)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\ (i=1,2),$$

или

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \le 2\sqrt{3}\rho(1+\delta_2)\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\sqrt{3}\rho(1+\delta_1)\|\psi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} +$$

$$+2(1+2\rho(\delta_1+\delta_2+\delta_1\delta_2))\sqrt{6T}\|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)}\ (i=1,2), \tag{28}$$

Очевидно, что

$$|u(x,t)| \le \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + (\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2})^{1/2}\sum_{i=1}^{2}(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2)^{1/2}, \tag{29}$$

$$|u_t(x,t)| \le \|u_0'(t)\|_{C[0,T]} + (\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-6})^{1/2}\sum_{i=1}^{2}(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\|u_{ik}'(t)\|_{C[0,T]})^2)^{1/2}, \tag{30}$$

$$u_{tt}(x,t) \le u_0''(t)_{C[0,T]} + (\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-6})^{1/2}\sum_{i=1}^{2}(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\ u_{ik}''(t)_{C[0,T]})^2)^{1/2}, \tag{31}$$

$$|u_{xxxx}(x,t)| \le (\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2})^{1/2}\sum_{i=1}^{2}\ (\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2)^{1/2}, \tag{32}$$

$$u_{ttxx}(x,t) \le (\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2})^{1/2}\sum_{i=1}^{2}\ (\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\ u_k''(t)_{C[0,T]})^2)^{1/2}. \tag{33}$$

Из (29)-(33), с учетом (20)-(24), следует, что функции $u(x,t), u_t(x,t)$, $u_{tt}(x,t)$, $u_{xxxx}(x,t), u_{ttxx}(x,t)$ непрерывны в D_T. Непосредственной проверкой легко видеть, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3) в обычном смысле. Теорема доказана.

С помощью леммы 1 доказывается следующая

Теорема 4. Пусть выполняются все условия теоремы 3 и

$$\int_0^1\varphi(x)dx=0,\quad \int_0^1\psi(x)dx=0,\quad \int_0^1 f(x,t)dx=0\ (0\le t\le T).$$

Тогда функция

$$u(x,t)=\frac{\varphi_{10}}{1+\delta_1}+\frac{t-\delta_1(T-t)}{(1+\delta_1)(1+\delta_2)}\psi_{10}+\int_0^T G_0(t,\tau)f_{10}(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\rho_k(T)}\left[\varphi_{1k}(\cos\beta_k t+\delta_2\cos\beta_k(T-t))+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\psi_{1k}}{\beta_k}(\sin\beta_k t-\delta_1\sin\beta_k(T-t))\right]+\frac{1}{1+\beta_{k,}^2}\int_0^T G_k(t,\tau)f_{1k}(\tau)d\tau.\right\}\cos\lambda_k x+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\rho_k(T)}\left[\varphi_{2k}(\cos\beta_k t+\delta_2\cos\beta_k(T-t))+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\psi_{2k}}{\beta_k}(\sin\beta_k t-\delta_1\sin\beta_k(T-t))\right]+\frac{1}{1+\beta_{k,}^2}\int_0^T G_k(t,\tau)f_{2k}(\tau)d\tau.\right\}\sin\lambda_k x$$

является классическим решением задачи (1)- (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский, А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Диф. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – Р. 1925–1935.
2. *Cannon, J.R.* The solution of the heat equation subject to the specification of energy / // Quart. Appl. Math.. – 1963. – Vol. 5, № 21. – P. 155–160.
3. *Ионкин, Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Диф. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – Р. 294–304.
4. *Нахушев, А.М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике померенной влаги и грунтовых вод .Диф. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 72–81.
5. *Hatice Taskesen and Necat Polat.* Global existence for a double dispersive sixth order Boussinesq equation. Contemporary Analysis and Applied Mathematics .Vol.1, No.1, 60-69, 2013
6. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики, том V, Москва, 1957.
7. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. Москва 1972.

Redaksiyaya daxil olub 18.04.2021