УДК 39A20

В.С.Султанова
Бакинский Славянский Университет
vusalya.sultanova@mail.ru

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДИСКРЕТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Ключевые слова: *Дискретно аддитивная, производная дискретно-мультипликативная производная, задача Коши, граничная задача, явный вид решения*

Излагаемая работа посвящена исследованию решений задачи Коши и граничной задачи для уравнения с дискретно аддитивной и дискретно мультипликативной производной второго порядка.

Здесь получено явное аналитическое выражение как для решения задачи Коши, так и для граничной задачи.

V.S.Sultanova

İKIİCİ TƏRTİB DİSKRET TÖRƏMƏLİ DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN KOŞİ MƏSƏLƏSİ

Açar sözlər: *Disret additiv törəmə, diskret multiplikatif törəmə, Koşi məsələsi, sərhəd məsələsi, həllin analitik ifadəsi*

Baxılan işdə ikinci tərtib diskret additiv və diskret multiplikativ törəməli differensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələləri araşdırılmışdır.

Burada baxılan həm Koşi həm sərhəd tənliyi üçün analitik ifadə alınmışdır.

V.S.Sultanova

CAUCHY PROBLEM FOR A TWO-DIMENSIONAL ORDER PARTIAL EQUATION WITH DISCRETE DERIVATIVES

Keywords: *Diskret additive direvative, diskret multiplicative derivative, Cauchy problem, an analytical expression of the soulution*

Cauchy problem for two order discrete additive and discrete multiplicative derivative differential equation has been researched in the reviewed thesis.

An explicit analytical expression is obtained here as for the solution the Cauchy problem and the boundary value problem.

Введение

Как известно задача для уравнения с дискретно аддитивными производными, так называемые задачи для разностных уравнений хорошо исследовано как одномерном [1] – [3], так и для многомерном случае [4] – [6]. Эта задача начато из школьных курсов. Построение арифметической и геометрической прогрессии и числа Фибоначчи [7] –[8].

Задача для уравнения с дискретно мультипликативными производными начали мы [9] – [11].

Излагаемая работа посвящена исследованию решении задачи Коши и граничной задачи для обычного дифференциального уравнения второго порядка с дискретно аддитивными и дискретно мультипликативными производными.

Постановка задачи: Рассмотрим следующее уравнение:

$$y_n^{[1]} \cdot y_n^{(1)} \left[(y_n^{(1)})^{[1]} - (y_n^{[1]})^{(1)} - y_n^{[1]} + 1\right] + y_n^{(1)} = f_n y_n, \quad n \geq 0 \qquad (1)$$

где

$$y_n^{(1)} = y_{n+} - y_n$$

- дискретно аддитивная, а

$$y_n^{[1]} = \frac{y_{n+1}}{y_n},$$

- дискретно мультипликативная производная, f_n – известная, y_n– искомая последовательность. Учитывая, что

$$(y_n^{(1)})^{[1]} = \frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{y_{n+1} - y_n}, \qquad (y_n^{[1]})^{(1)} = \frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} - \frac{y_{n+1}}{y_n}$$

из (1) получим:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}(y_{n+1} - y_n)\left[\frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{y_{n+1} - y_n} - \left(\frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} - \frac{y_{n+1}}{y_n}\right) - \frac{y_{n+1}}{y_n} + 1\right] + (y_{n+1} - y_n) = f_n y_n, \quad n \geq 0$$

или

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}(y_{n+1} - y_n)\left[\frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{y_{n+1} - y_n} - \frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} + 1\right] + (y_{n+1} - y_n) = f_n y_n, \quad n \geq 0$$

или же

$$y_{n+2} = (1 + f_n) y_n, \quad n \geq 0 \qquad (2)$$

Давая n значении, получим:

при n = 0

$$y_2 = (1 + f_0) y_0$$

при n = 1

$$y_3 = (1 + f_1)y_1$$

при n = 2

$$y_4 = (1 + f_2)y_2 = (1 + f_2)(1 + f_0)y_0$$

при n = 3

$$y_3 = (1 + f_3)y_3 = (1 + f_3)(1 + f_1)y_1$$

Продолжая этот процесс, имеем:

$$y_{2m} = y_0 \prod_{k=0}^{m-1}(1 + f_k), \quad m \geq 1 \ , \tag{3}$$

$$y_{2m+1} = y_1 \prod_{k=0}^{m-1}(1 + f_{2k+1}), \quad m \geq 1 \tag{4}$$

где y_0и y_1 остаются произвольными постоянными. С этим установлено:

Теорема 1. Если f_n, n≥ *0*заданная вещественная последовательность, то общее решение уравнения (1) даётся в виде (3) и (4), гдеy_0 и y_1произвольные постоянные числа.

Задача Коши. Теперь к уравнению (1) присоединим следующее начальное условие:

$$y_0 = x_1 y_1 = \beta, \tag{5}$$

где x и β заданные вещественные числа. Как видно из (3) и (4) тогда решение задачи Коши (1), (5) имеет вид:

$$\begin{cases} y_{2m} = x\prod_{k=0}^{m-1}(1 + f_{2k1}), \ m \geq 1 \\ y_{2m+1} = \beta\prod_{k=0}^{m-1}(1 + f_{2k+1}), \ m \geq 1 \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 2. При условии теоремы 1, если x и β заданные не нулевые вещественные числа, то тогда единственное решение задачи Коши (1), (5) даётся в виде (6).

Граничная задача: Если уравнения (1) рассматривать при $\overline{n=0,N-2}$ с следующими граничным условиями:

$$y_0 = x, \quad y_N = \beta \ , \tag{7}$$

где x и β также являются заданными вещественными числами, а N = 2s+1 –нечетное число.

То, учитывая первое условие (7) из (3) получим:

$$y_{2m} = x\prod_{k=0}^{m-1}(1 + f_{zk}), \quad m \geq 1 \tag{8}$$

Что касается соотношения (4), то исходя из заданных условий (7) мы должны определить y_1.

Для этого было предположено, что N = 2s+1 нечётное число. Тогда из (4) получим:

$$\beta = y_{2s+1} = y_1 \prod_{k=0}^{s-1} (1 + f_{2k+1}) , \tag{9}$$

из которого при условии

$$\prod_{k=0}^{s-1} (1 + f_{2kn}) \neq 0 , \tag{10}$$

имеем

$$y_1 = \frac{\beta}{\prod_{k=0}^{s-1}(1 + f_{2k+1})} , \tag{11}$$

Подставляя (11) в (4) имеем:

$$y_{2m+1} = \frac{\beta}{\prod_{k=0}^{s-1}(1 + f_{2kn})} \cdot \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k+1}) = \frac{\beta}{\prod_{k=m}^{s-1}(1 + f_{2l+1})} , n \geq 1 \tag{12}$$

С этим установлено следующее утверждение:

Теорема 3. При условии теоремы 1, если N = 2s+1 – нечётное число, x и β заданные вещественные нулевые числа, то решения граничной задачи (1), (7) при $\overline{}_{n=0,\ N-2}$даётся формулой (8), (11) и (12).

Если N – чётное число, то тогда в общем виде граничная задача (1), (7) неразрешима. Потому, что обе условии относятся к формуле (3). Поэтому второе условие даёт ограничение данных, а y_{2m+1} - с нечётными индексами остаётся неопределёнными (т.к. y_1 - произвольная постоянная). В этом случае граничные условия нужно задавать следующим образом:

$$y_1 = x, \quad y_N = \beta \tag{13}$$

Тогдаy_{2m+1} - с нечётными индексами определяется из (4), а y_0 определяется исходя из условия (13).

$$\beta = y_N = y_{2s} \tag{14}$$

т.е.

$$\beta = y_0 \prod_{k=0}^{s-1} (1 + f_{2k}) , \tag{15}$$

если

$$\prod_{k=0}^{s-1}(1+f_{2k}) \neq 0, \tag{16}$$

из (15) получим

$$y_0 = \frac{\beta}{\prod_{k=0}^{s-1}(1+f_{2k})}\ , \tag{17}$$

Тогда из (3) получим:

$$y_{2m} = \frac{\beta}{\prod_{k=0}^{s-1}(1+f_{2k})} \cdot \prod_{k=0}^{m-1}(1+f_{2k}) = \frac{\beta}{\prod_{k=m}^{s-1}(1+f_{2k})}\ , \tag{18}$$

Таким образом если N =2s - четное число, тогда к уравнению (1) присоединяется граничное условие (13) и решения задачи (1), (13) задаётся формулами

$$y_{2m+1} = x\prod_{k=0}^{m-1}(1+f_{2k+1}),\ m \geq 1\,, \tag{19}$$

и

$$y_{2m} = k = m\frac{\beta}{\prod_{k=m}^{s-1}(1+f_{2k})}, \qquad m \geq 1 \tag{20}$$

С этим установлено:

Теорема 4. При условии теоремы 1, если *N* – 2s –чётное число, то тогда граничная задача (1), (13), при нулевых вещественных x и β имеет решение даваемой формулой (17), (19) и (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967, 376 стр.
2. *Aliev N., Bagirov G., Izadi F.A.* Discrete additive analysis, Tarbiat Modares University, Tabriz, Iran, 1993, 144 p. (Persian).
3. *Izadi F.A., Aliev N. M Bagirov G.* Discrete Calculus Analogy, Canada, 2009, 154 p.
4. *Вазов В. и Форсайт Дж.* Разностные методы речения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ. Москва, 488 стр.
5. *Шишкин Г.И.* Разностная схема для решения эллиптических уравнений с малым параметрами при производных. Баках центр, vol. 3, 1978, стр. 89 – 92.

6. *Фрязинов И.В., Бакарова М.И.* Об экономических разностных схемах решения уравнения теплопроводности в полярных, цилиндрической и сферической координатах. ЖВМ и МФ, ч. 12, № 9, 1972, стр. 352 – 363.
7. *Бронштейн И.Н. и Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1964, 608 стр.
8. *Воробьёв Н.Н.* Числа Фибоначчи. Популярные лекции по математике. Вып. 6. М.: Наука, 1984, 144 стр.
9. *Əliyev N.Ə., Məmiyeva T.S.* İkinci tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün sənəd məqələsiş BU-nin Xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, № 1, 2017, səh. 15 – 19.
10. *Məmiyeva T., Əliyev N.* Üçüncü tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün Koşa məsələsinin həlli, Gənc tədqiqatçıların IV Beynəlxalq elmi konfransın materialları. Bakı, 2016, səh. 124.
11. *Əliyev N.Ə., Məmiyeva T.S.* İkinci tərtib diskret miltiplikativ törəməli tənlik üçün sərhəd məsələsi. "Ali təhsildə keyfiyyətin təminatı" mövzusunda Resppublika Elmi konfransının materialları. Lənkəran, 2016, səh. 4 – 5.

Redaksiyaya daxil olub 02.04.2021