Pedaqoji Universitetin Xəbərləri. Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası – 2022, C. 70, №3, s. 24-33
Transactions of Pedagogical University. Series of mathematics and natural sciences – 2022, V. 70, №3, pp. 24-33

UOT 517.956.32

S.S.Haxıyev, H.A.Əkpərova, N.A.Acalova
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
axiyev63@mail.ru

QEYRİ-LOKAL KONTAKT-SƏRHƏD ŞƏRTLİ BİR SİNİF HİPERBOLİK SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNƏ QOŞMA MƏSƏLƏNİN KORREKT HƏLL OLUNMASI

Açar sözlər: *kontakt-sərhəd, qeyri-lokal, xətti, hiperbolik, məsələnin operatoru, izomorfizm, qoşma məsələ, aprior qiymətləndirmə, korrekt həll*

İşdə kontakt-sərhəd şərtli kəsilən həllə malik qeyri-lokal xətti hiperbolik sərhəd məsələsinə baxılmışdır. Məsələnin verilənləri üzərinə bəzi məhdudiyyətlər qoymaqla əsas məsələyə qoşma məsələ anlayışı təyin edilmiş və onun korrekt həll olunması şərti tapılmışdır.

С.С.Ахыев, О.А.Акперова, Н.А.Аджалова

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ К ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С КОНТАКТНО-КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ключевые слова: *контактно-краевая, нелокальная, линейная, гиперболическая, оператор задачи, изоморфизм, сопряженная задача, априорная оценка, корректное решение*

В работе рассмотрена линейная гиперболическая задача с нелокальными контактно-краевыми условиями, обладающая разрывными решениями. Налогая на данные задачи некоторые ограничительные условия, введено понятие задачи сопряженной основной задаче и найдено условие ее корректной разрешимости.

S.S.Akhiev, H.A.Akperova, N.A.Acalova

CORRECT SOLVABILITY OF A PROBLEM ADJOINT TO A CLASS OF HYPERBOLIC SIDE PROBLEMS UNDER CONTACT-BOUNDARY CONDITIONS

Keywords: *contact-boundary, non-local, linear, hyperbolic, operator of problem, isomorphism, adjoint problem, a priori estimate, correct solution*

In the paper there has been considered linear hyperbolic problem with non-local contact-boundary conditions having discontinuous solutions. Imposing some restrictive conditions on the concept of adjoint problem associated with the main problem and a condition for its correct solvability is found.

İşdə, ikinci tərtib

$$(Lz)(t,x) \equiv z_{tx}(t,x) + z(t,x)A_{0,0}(t,x) + z_t(t,x)A_{1,0}(t,x) +$$
$$+ z_x(t,x)A_{0,1}(t,x) = \varphi(t,x), \ (t,x) \in G = G_0 \cup G_1,$$
$$G_0 = (0,T)\times(0,\alpha), \ \ G_1 = (0,T)\times(\alpha,l), \tag{1}$$

hiperbolik tənliklər sisteminə

$$(L_k z)(t) \equiv z(t,0)\beta_{0,k}(t) + z(t,\alpha-0)\beta_{1,k}(t) + z(t,\alpha+0)\beta_{2,k}(t) +$$
$$+ z(t,l)\beta_{3,k}(t) + z_t(t,0)g_{0,k}(t) + z_t(t,\alpha-0)g_{1,k}(t) + z_t(t,\alpha+0)g_{2,k}(t) +$$
$$+ z_t(t,l)g_{3,k}(t) = \varphi_k(t), \ t \in (0,T), \ k = 1,2; \tag{2}$$

$$(L_3 z)(x) \equiv z_x(0,x) = \varphi_3(x), \ x \in (0,l); \tag{3}$$

$$L_0 z \equiv z(0,0) = \varphi_0 \tag{4}$$

qeyri-lokal sərhəd şərtləri daxilində baxılmışdır $[3;5]$. Burada $z(t,x) = (z_1(t,x),...,z_n(t,x))$ - axtarılan, $\overline{G_0}$ və $\overline{G_1}$ çoxluqlarında kəsilməz n-ölçülü vektor-funksiyadır; $A_{i,j}(t,x)$ $(i,j=0,1)$ - G-də verilmiş ölçülən $n\times n$-matrislərdir; $\beta_{i,k}(t)$ və $g_{i,k}(t)$ - $(0,T)$-də verilmiş ölçülən $n\times n$- matrislərdir; $\varphi(t,x),$ $\varphi_k(t)$ $(k=1,2)$ və $\varphi_3(x)$- uyğun olaraq $G,$ $(0,T)$ və $(0,l)$ çoxluqlarında Karateodori şərtini ödəyən n-ölçülü vektor-funksiyalardır, burada R^m - m-ölçülü $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_m)$ $(\|\lambda\| = \sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|)$ $[2,4]$, sətir vektorlar fəzasıdır, $R^1 = R;$ φ_0- verilmiş n-ölçülü vektor-funksiyadır; $\alpha \in (0,l)$- qeyd olunmuş nöqtədir.

Aşağıdakı şərtlərin ödənildiyi fərz olunur: $A_{0,0} \in \mathcal{L}_{p,n\times n}(G);$ elə $A^0_{1,0}(\cdot) \in \mathcal{L}_p(0,l),$ $A^0_{0,1}(\cdot) \in \mathcal{L}_p(0,T)$ funksiyaları var ki, G- də sanki hər yerdə $\|A_{1,0}(t,x)\| \le A^0_{1,0}(x),$ $\|A_{0,1}(t,x)\| \le A^0_{0,1}(t)$ ödənilir, burada $\|\cdot\|$-matrisin (yaxud vektorun) normasıdır; $\beta_{i,k}(\cdot) \in \mathcal{L}_{p,n\times n}(0,T)$ və $g_{i,k}(\cdot) \in \mathcal{L}_{\infty,n\times n}(0,T);$

Tutaq ki, $\mathcal{L}_p(G)$ $(1 \le p < \infty)$-G-də p dərəcədən inteqrallanan funksiyalar fəzasıdır; $\mathcal{L}_\infty(G)$- G-də ölçülən və əsasən məhdud funksiyalar fəzasıdır; $\mathcal{L}_{p,n}(G)$ və $\mathcal{L}_{p,n\times n}(G)$ elementləri $\mathcal{L}_p(G)$-dən olan uyğun olaraq n-ölçülü sətir-vektorlar fəzası və $n\times n$ ölçülü matrislər fəzasıdır. $\mathcal{L}_{p,n}(G)$ fəzasında $g(t,x)=(g_1(t,x),...,g_n(t,x))$ vektor-funksiyalarının norması $\|g\|_{\mathcal{L}_{p,n}(G)}=\|g_0\|_{\mathcal{L}_p(G)}$ şəklində təyin olunur, burada

$$g_0(t,x)=\|g(t,x)\|=\sum_{j=1}^{n}|g_j(t,x)|.$$

Analoji olaraq, $\mathcal{L}_{p,n\times n}(G)$ fəzasında $g(t,x)=(g_{ij}(t,x))$ matrislərinin norması uyğun şəkildə təyin olunur, lakin burada

$$g_0(t,x)=\|g(t,x)\|=\sum_{i,j=1}^{n}|g_{ij}(t,x)|.$$

elə $z\in\mathcal{L}_{p,n}(G_k)$ vektor-funksiyalar fəzasıdır ki, onların S.L.Sobolev mənada z_t, z_x və z_{tx} ümumiləşmiş törəmələri $\mathcal{L}_{p,n}(G_k)$-dandır $[1]$. $\hat{W}_{p,n}(G)$ elə $z\in\mathcal{L}_{p,n}(G)$ vektor-funksiyalar fəzasıdır ki, bunlar G_0 və G_1 oblastlarında $z\in W_{p,n}(G_0)$ və $z\in W_{p,n}(G_1)$ şərtlərini ödəyirlər, $(t,x)=(0,\alpha)$ nöqtəsində kəsilməzdirlər və normaları

$$\|z\|_{\hat{W}_{p,n}(G)}=\sum_{k=0}^{1}\|z\|_{W_{p,n}(G_k)},$$

kimi təyin olunur, burada

$$\|z\|_{W_{p,n}(G_k)}=\|z\|_{\mathcal{L}_{p,n}(G_k)}+\|z_t\|_{\mathcal{L}_{p,n}(G_k)}+\|z_x\|_{\mathcal{L}_{p,n}(G_k)}+\|z_{tx}\|_{\mathcal{L}_{p,n}(G_k)}.$$

Məlum olduğu kimi ixtiyari $z\in\hat{W}_{p,n}(G)$ funksiyası $z\in W_{p,n}(G_0)$ və $z\in W_{p,n}(G_1)$ şərtlərini ödəyir. Buradan çıxır ki, G oblastında $z\in\hat{W}_{p,n}(G)$ funksiyasını hər hansı $b_0\in R^n$, $b_1\in\mathcal{L}_{p,n}(0,T)$, $b_2\in\mathcal{L}_{p,n}(0,T)$, $b_3\in\mathcal{L}_{p,n}(0,l)$, $b\in\mathcal{L}_{p,n}(G)$ üçün

$$z(t,x)=(\Lambda\hat{b})(t,x)\equiv b_0+\theta(\alpha-x)\int_0^T b_1(\tau)\theta(t-\tau)d\tau+$$
$$+\theta(x-\alpha)\int_0^T b_2(\tau)\theta(t-\tau)d\tau+\int_0^l b_3(\zeta)\theta(x-\zeta)d\zeta+$$
$$+\iint_G \theta(t-\tau)\theta(x-\zeta)q_1(\zeta,x)d\tau d\zeta,\ \ (t,x)\in G, \tag{5}$$

şəklində göstərmək mümkündür. Burada, $b_0 = z(0,0)$, $b_1(t) = z_t(t,0)$, $b_2(t) = z_t(t,\alpha+0)$, $b_3(x) = z_x(0,x)$, $b(t,x) = z_{tx}(t,x)$, $(t,x)\in G$, $\theta(t)$ - isə R - də Hevisayd funksiyasıdır və

$$q_1(\zeta,x) = \theta(\zeta-\alpha)\theta(x-\alpha)+\theta(\alpha-x),$$

$$\hat{b} = (b_0, b_1(t), b_2(t), b_3(x), b(t,x)).$$

Qeyd edək ki, burada aşağıdakı işarələmələr nəzərdə tutulmuşdur: $b_0 = b_0^{(0)}$, $b_1(t) = b_1^{(0)}(t)$, $b_2(t) = b_1^{(1)}(t)$, $b_3(x) = b_3^{(0)}(x)$, $b(t,x) = b^{(0)}(t,x)$, $(t,x)\in G_0$. Bunun tərsi də doğrudur, yəni əgər $b_0 \in R^n$, $b_1 \in \mathcal{L}_{p,n}(0,T)$, $b_2 \in \mathcal{L}_{p,n}(0,T)$, $b_3 \in \mathcal{L}_{p,n}(0,l)$, $b \in \mathcal{L}_{p,n}(G)$, olarsa, onda (5) bərabərliyi ilə təyin olunan $z(t,x)$ funksiyası $\hat{W}_{p,n}(G)$ fəzasına daxil olar.

İndi (5) bərabərliyindən istifadə edərək $\hat{f} \in \hat{W}_{p,n}^{*}(G)$ xətti məhdud funksionallarının ümumi şəklini tapa bilərik. Bunun üçün elementləri $\hat{b} = (b_0, b_1(t), b_2(t), b_3(x), b(t,x))$ ilə işarə olunmuş

$$\hat{Q}_{p,n} = R^n \times \mathcal{L}_{p,n}(0,T)\times \mathcal{L}_{p,n}(0,T)\times \mathcal{L}_{p,n}(0,l)\times \mathcal{L}_{p,n}(G)$$

Banax fəzasına baxaq və bu fəzada aşağıdakı şəkildə norma təyin edək:

$$\|\hat{b}\|_{\hat{Q}_{p,n}} = \|b_0\| + \|b_1\|_{\mathcal{L}_{p,n}(0,T)} + \|b_2\|_{\mathcal{L}_{p,n}(0,T)} + \|b_3\|_{\mathcal{L}_{p,n}(0,l)} + \|b\|_{\mathcal{L}_{p,n}(G)}.$$

Xətti məhdud $\hat{f} \in \hat{W}_{p,n}^{*}(G)$ funksionallarının ümumi şəkli

$$\hat{f}(z) = (\varphi_0, z(0,0)) + \int_0^T (\varphi_1(t), z_t(t,0))dt + \int_0^T (\varphi_2(t), z_t(t,\alpha+0))dt +$$
$$+\int_0^l (\varphi_3(x), z_x(0,x))dx + \iint_G (\varphi(t,x), z_{tx}(t,x))dtdx,\ 1\le p<\infty \tag{6}$$

və

$$\hat{f}(z) = (\varphi_0, z(0,0)) + \int_0^T (d\varphi_1, z_t(t,0)) + \int_0^T (d\varphi_2, z_t(t,\alpha+0)) +$$
$$+\int_0^l (d\varphi_3, z_x(0,x)) + \iint_G (d\varphi, z_{tx}(t,x)),\ p=\infty \tag{7}$$

bərabərlikləri ilə verilir.

İndi isə (1)-(4) məsələsinə qoşma məsələni quraq [6]. Bunun üçün (1)-(4) məsələsinin $\hat{L} = (L_0, L_1.L_2, L_3, L)$ operatoruna baxaq və bu məsələni

$$\hat{L}z = \hat{\varphi}, \tag{1^1}$$

operator tənliyi şəklində yazaq. Burada, $z \in \hat{W}_{p,n}(G)$- axtarılan, $\hat{\varphi} = (\varphi_0, \varphi_1.\varphi_2, \varphi_3, \varphi) \in \hat{Q}_{p,n}$ $(\hat{Q}_{p,n} = R^n \times \mathcal{L}_{p,n}(0,T) \times \mathcal{L}_{p,n}(0,T) \times \mathcal{L}_{p,n}(0,l) \times \mathcal{L}_{p,n}(G))$ isə verilmiş elementdir. Qeyd edək ki, üzərinə müəyyən şərtlər qoyulmuş $\hat{L}$ operatoru $\hat{W}_{p,n}(G)$-də təyin olunub, $\hat{Q}_{p,n}$-ə təsir edir və məhduddur.

$\hat{L}^* : \hat{Q}^*_{p,n} \to \hat{W}^*_{p,n}(G)$ qoşma operatorunu qurmaq üçün $\hat{Q}_{p,n}$ -də təyin olunmuş məhdud $\hat{f} \in \hat{Q}_{q,n}$ funksionalını götürək. Aydındır ki, $\hat{f}$ funksionalı $\hat{f} = (f_0, f_1.f_2, f_3, f)$ şəklindədir və tərifə görə yaza bilərik ki:

$$\hat{f}(\hat{L}z) = (f_0, L_0 z) + \sum_{k=1}^{2}\int_0^T (f_k(t), (L_k z)(t))dt + \int_0^l (f_3(x), (L_3 z)(x))dx +$$
$$+ \iint_G (f(t,x), (Lz)(t,x))dtdx = (f_0, z(0,0)) + \int_0^l (f_3(x), z_x(0,x))dx +$$
$$+ \sum_{k=1}^{2}\int_0^T (f_k(t), (L_k z)(t))dt + \iint_G (f(t,x), (Lz)(t,x))dtdx, \tag{8}$$

İndi ayrılıqda

$$\sum_{k=1}^{2}\int_0^T (f_k(t), (L_k z)(t))dt$$

ifadəsini hesablayaq.

Bunun üçün L_k operatorlarının ifadəsindən, həmçinin $z \in \hat{W}_{p,n}(G)$ funksiyasının və onun z_t, z_x törəmələrinin inteqral göstərilişindən istifadə etsək alariq ki, [3]

$$\sum_{k=1}^{2}\int_0^T (f_k(t), (L_k z)(t))dt = \sum_{k=1}^{2}\int_0^T (f_k(t), z(t,0)\beta_{0,k}(t) + z(t,\alpha-0)\beta_{1,k}(t) + z(t,\alpha+0)\beta_{2,k}(t) +$$
$$+ z(t,l)\beta_{3,k}(t) + z_t(t,0)g_{0,k}(t) + z_t(t,\alpha-0)g_{1,k}(t) + z_t(t,\alpha+0)g_{2,k}(t) + z_t(t,l)g_{3,k}(t))dt =$$
$$= (\sum_{k=1}^{2}\int_0^T f_k(t)\left[\beta^*_{0,k}(t) + \beta^*_{1,k}(t) + \beta^*_{2,k}(t) + \beta^*_{3,k}(t)\right]dt, b_0) + \int_0^T (\sum_{k=1}^{2}\int_0^T f_k(t)\theta(t-\tau)\left[\beta^*_{0,k}(t) + \beta^*_{1,k}(t)\right]dt +$$
$$+ \sum_{k=1}^{2} f_k(\tau)\left[g^*_{0,k}(\tau) + g^*_{1,k}(\tau)\right], b_1(\tau))d\tau + \int_0^l (\sum_{k=1}^{2}\int_0^T f_k(t)\theta(\alpha-\zeta)\left[\beta^*_{1,k}(t) + \beta^*_{2,k}(t)\right]dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\int_0^T f_k(t)\beta_{3,k}^*(t)dt, b_3(\zeta))d\zeta + \int_0^T (\sum_{k=1}^{2}\int_0^T f_k(t)\theta(t-\tau)\left[\beta_{2,k}^*(t)+\beta_{3,k}^*(t)\right]dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} f_k(\tau)\left[g_{2,k}^*(\tau)+g_{3,k}^*(\tau)\right], b_2(\tau))d\tau + \iint_G (\sum_{k=1}^{2}\int_0^T f_k(t)\theta(t-\tau)\left[\theta(\alpha-\zeta)\beta_{1,k}^*(t)+\theta(\zeta-\alpha)\beta_{3,k}^*(t)\right]dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} f_k(\tau)\left[\theta(\alpha-\zeta)g_{1,k}^*(\tau)+\theta(\zeta-\alpha)g_{3,k}^*(\tau)\right], b(\tau,\zeta))d\tau d\zeta, \qquad (9)$$

burada $(\ )^*$ - transponirə əməliyyatını göstərir.

İndi isə

$$\iint_G (f(t,x),(Lz)(t,x))dtdx$$

ifadəsini hesablayaq.

Bunun üçün L operatorunun ifadəsindən, həmçinin $z\in\hat{W}_{p,n}(G)$ funksiyasının və onun z_t, z_x törəmələrinin inteqral göstərilişindən istifadə etsək alariq ki,

$$\iint_G (f(t,x),(Lz)(t,x))dtdx = \iint_G (f(t,x), z_{tx}(t,x) + z(t,x)A_{0,0}(t,x) +$$

$$+ z_t(t,x)A_{1,0}(t,x) + z_x(t,x)A_{0,1}(t,x))dtdx =$$

$$=(\iint_G f(t,x)A_{0,0}^*(t,x)dtdx, b_0) + \int_0^T (\iint_G f(t,x)A_{0,0}^*(t,x)\theta(t-\tau)\theta(\alpha-x)dtdx +$$

$$+\int_0^l f(\tau,x)A_{1,0}^*(\tau,x)\theta(\alpha-x)dx, b_1(\tau))d\tau + \int_0^T (\iint_G f(t,x)A_{0,0}^*(t,x)\theta(t-\tau)\theta(x-\alpha)dtdx +$$

$$+\int_0^l f(\tau,x)A_{1,0}^*(\tau,x)\theta(x-\alpha)dx, b_2(\tau))d\tau + \int_0^l (\iint_G f(t,x)A_{0,0}^*(t,x)\theta(x-\zeta)dtdx +$$

$$+\int_0^T f(t,\zeta)A_{0,1}^*(t,\zeta)dt, b_3(\zeta))d\zeta + \iint_G f(t,x)A_{0,0}^*(t,x)\theta(t-\tau)\theta(x-\zeta)q_1(\zeta,x)dtdx +$$

$$+\int_0^l f(\tau,x)A_{1,0}^*(\tau,x)\theta(x-\zeta)q_1(\zeta,x)dx + \int_0^T f(t,\zeta)A_{0,1}^*(t,\zeta)\theta(t-\tau)dt, b(\tau,\zeta))d\tau d\zeta, \qquad (10)$$

İndi aşağıdakı eyniliyin doğruluğunu alırıq:

$$\hat{f}(\hat{L}z) \equiv (f_0, L_0 z) + \sum_{k=1}^{2}\int_0^T (f_k(t), (L_k z)(t))dt + \int_0^l (f_3(x),(L_3 z)(x))dx +$$

$$+\iint_G (f(t,x),(Lz)(t,x))dtdx = (\omega_0\hat{f}, b_0) + \int_0^T ((\omega_1\hat{f})(\tau), b_1(\tau))d\tau +$$

$$+\int_0^T ((\omega_2 \hat{f})(\tau), b_2(\tau))d\tau + \int_0^l ((\omega_3 \hat{f})(\zeta), b_3(\zeta))d\zeta +$$

$$+\iint_G ((\omega\hat{f})(\tau,\zeta), b(\tau,\zeta))d\tau d\zeta \equiv (\hat{L}^* \hat{f})(z), \forall z \in \hat{W}_{p,n}(G), \forall \hat{f} \in \hat{Q}_{q,n}, \qquad (11)$$

burada

$$\omega_0 \hat{f} = f_0 + \sum_{k=1}^{2}\int_0^T f_k(t)\left[\beta_{0,k}^*(t) + \beta_{1,k}^*(t) + \beta_{2,k}^*(t) + \beta_{3,k}^*(t)\right]dt + \iint_G f(t,x)A_{0,0}^*(t,x)dtdx; \qquad (12)$$

$$(\omega_1 \hat{f})(\tau) = \sum_{k=1}^{2}\int_0^T f_k(t)\, \theta(t-\tau)\, \left[\beta_{0,k}^*(t) + \beta_{1,k}^*(t)\right]dt + \sum_{k=1}^{2} f_k(\tau)\, \left[g_{0,k}^*(\tau) + g_{1,k}^*(\tau)\right] +$$

$$+\int_0^l f(\tau,x)\, A_{1,0}^*(\tau,x)\theta(\alpha - x)dx + \iint_G f(t,x)\, A_{0,0}^*(t,x)\theta(t-\tau)\theta(\alpha-x)dtdx; \qquad (13)$$

$$(\omega_3 \hat{f})(\zeta) = f_3(\zeta) + \sum_{k=1}^{2}\int_0^T f_k(t)\, \theta(\alpha-\zeta)\, \left[\beta_{1,k}^*(t) + \beta_{2,k}^*(t)\right]dt + \sum_{k=1}^{2}\int_0^T f_k(t)\, \beta_{3,k}^*(t)dt +$$

$$+\int_0^T f(t,\zeta)\, A_{0,1}^*(t,\zeta)dt + \iint_G f(t,x)\, A_{0,0}^*(t,x)\theta(x-\zeta)dtdx; \qquad (14)$$

$$(\omega_2 \hat{f})(\tau) = \sum_{k=1}^{2}\int_0^T f_k(t)\, \theta(t-\tau)\, \left[\beta_{2,k}^*(t) + \beta_{3,k}^*(t)\right]dt + \sum_{k=1}^{2} f_k(\tau)\, \left[g_{2,k}^*(\tau) + g_{3,k}^*(\tau)\right] +$$

$$+\int_0^l f(\tau,x)A_{1,0}^*(\tau,x)\theta(x-\alpha)dx + \iint_G f(t,x)A_{0,0}^*(t,x)\theta(t-\tau)\theta(x-\alpha)dtdx; \qquad (15)$$

$$(\omega\hat{f})(\tau,\zeta) = f(\tau,\zeta) + \iint_G f(t,x)\, A_{0,0}^*(t,x)\theta(t-\tau)\theta(x-\zeta)q_1(\zeta,x)dtdx +$$

$$+\int_0^l f(\tau,x)\, A_{1,0}^*(\tau,x)\theta(x-\zeta)q_1(\zeta,x)dx + \int_0^T f(t,\zeta)\, A_{0,1}^*(t,\zeta)\theta(t-\tau)dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\int_0^T f_k(t)\theta(t-\tau)\left[\theta(\alpha-\zeta)\beta_{1,k}^*(t) + \theta(\zeta-\alpha)\beta_{3,k}^*(t)\right]dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} f_k(\tau)\left[\theta(\alpha-\zeta)g_{1,k}^*(\tau) + \theta(\zeta-\alpha)g_{3,k}^*(\tau)\right], \qquad (16)$$

və

$$q_1(\zeta,x) = \theta(\zeta-\alpha)\theta(x-\alpha) + \theta(\alpha-x).$$

(11) eyniliyinin köməyi ilə məlum teoremə görə alınır ki, bütün $1 \le p \le \infty$ üçün $\hat{L} : \hat{W}_{p,n}(G) \to \hat{Q}_{p,n}$ operatorunun komponentləri $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega$ olan və bilavasitə (12)-(16) bərabərlikləri ilə təyin olunan $\hat{L}^* = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega)$: $\hat{Q}_{q,n} \to \hat{Q}_{q,n}$ məhdud qoşması var. Onda

$$\hat{L}^* \hat{f} = \hat{\psi} \qquad (2^1)$$

tənliyinə bütün $1 \le p \le \infty$ üçün (1^1) -ə qoşma tənlik kimi baxmaq olar. Burada $\hat{f} = (f_0, f_1, f_2, f_3, f)$ -axtarılan, $\hat{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi)$ -isə $\hat{Q}_{q,n}$ -dən verilmiş elementdir və $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

$\hat{L}^*$ operatorunun $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega$ komponentlərinin (12)-(16) ifadəsindən istifadə etsək (2^1) tənliyini aşağıdakı kimi ekvivalent inteqro-cəbri tənliklər sistemi şəklində yaza bilərik,

$$\begin{aligned}
&\omega_0 \hat{f} = \psi_0; \\
&(\omega_1 \hat{f})(\tau) = \psi_1(\tau), \ \tau \in (0,T); \\
&(\omega_2 \hat{f})(\tau) = \psi_2(\tau), \ \tau \in (0,T); \\
&(\omega_3 \hat{f})(\zeta) = \psi_3(\zeta), \ \zeta \in (0,l); \\
&(\omega \hat{f})(\tau,\zeta) = \psi(\tau,\zeta), \ (\tau,\zeta) \in G.
\end{aligned} \qquad (3^1)$$

Qeyd edək ki, (2^1) və ya (3^1) qoşma məsələsinin həlli üçün aprior qiymətləndirmə

$$(\Omega f)(\tau,\zeta) = f(\tau,\zeta) + \int_\tau^T \int_\zeta^l f(t,x) A_{0,0}^*(t,x) q_1(\zeta,x) dt dx +$$

$$+ \int_\zeta^l f(\tau,x) A_{1,0}^*(\tau,x) q_1(\zeta,x) dx + \int_\tau^T f(t,\zeta) A_{0,1}^*(t,\zeta) dt$$

operatorunun Ω^{-1} tərsinin qiymətlənməsi ilə və tərsə malik $2n \times 2n$ ölçülü

$$\Delta(\tau) = \begin{pmatrix} g_{0,1}^*(\tau) + g_{1,1}^*(\tau) & g_{2,1}^*(\tau) + g_{3,1}^*(\tau) \\ g_{0,2}^*(\tau) + g_{1,2}^*(\tau) & g_{2,2}^*(\tau) + g_{3,2}^*(\tau) \end{pmatrix}$$

matrisi əlaqəli olur.

Teorem 1. Tutaq ki, $(0,T)$ -də sanki hər yerdə $\det \Delta(\tau) \ne 0,$ $\|\Delta(\tau)\| \le M_1,$ $\|\Delta^{-1}(\tau)\| \le M_1,$ $M_1 > 0$ və $\gamma_1 = M_2(c_0 + c_1) < 1$

şərtləri ödənilir, harada ki, $M_2 > 0$ sabiti $\hat{f}$ – dən asılı deyil. Onda $\hat{L}^*$ qoşma operatoru üçün

$$\left\|\hat{f}\right\|_{\hat{Q}_{q,n}} \le M_3 \left\|\hat{L}^* \hat{f}\right\|_{\hat{Q}_{q,n}}, \ \forall \hat{f} \in \hat{Q}_{q,n}$$

aprior qiymətlənməsi doğrudur $[5,6]$. Burada,

$$c_k = \left\|g^*_{1,k}\right\|_{\infty,(0,T)} \alpha^{\frac{1}{q}} + \left\|g^*_{3,k}\right\|_{\infty,(0,T)} (l-\alpha)^{\frac{1}{q}} + \left\|\beta^*_{1,k}\right\|_{p,(0,T)} (T\alpha)^{\frac{1}{q}} +$$

$$\left\|\beta^*_{3,k}\right\|_{p,(0,T)} (T(l-\alpha))^{\frac{1}{q}}, \ k = 0,1$$

və $M_3 > 0$ sabiti $\hat{f}$ – dən asılı deyil.

Teorem 2. Tutaq ki, Teorem 1-in şərtləri ödənilir. Onda ixtiyari $\hat{\varphi} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi) \in \hat{Q}_{p,n}$ sağ tərəfi üçün (1)-(4) məsələsinin heç olmasa bir $z \in \hat{W}_{p,n}(G)$ həlli var. Bunun üçün (1)-(4) məsələsinə qoşma olan (3^1) sisteminin ixtiyari $\hat{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi) \in \hat{Q}_{q,n}$ sağ tərəfi üçün birdən çox $\hat{f} = (f_0, f_1, f_2, f_3, f) \in \hat{Q}_{q,n}$ həlli ola bilməz.

Teorem 3. Tutaq ki,

$$\Delta_1(t) = \begin{pmatrix} g_{0,1}(t) + g_{1,1}(t) & g_{0,2}(t) + g_{1,2}(t) \\ & \\ g_{2,1}(t) + g_{3,1}(t) & g_{2,2}(t) + g_{3,2}(t) \end{pmatrix}$$

matrisi üçün sanki bütün $(0,T)$ -də $\det \Delta_1(t) \ne 0$, $\left\|\Delta_1(t)\right\| \le M_1$, $\left\|\Delta_1^{-1}(t)\right\| \le M_1$ və $\gamma_2 = M_4 \left\|\Omega^{-1}\right\|(c^0 + c^1) < 1$ şərtləri ödənilir, harada ki, $M_4 > 0$ sabiti $z(t,x)$ – dən asılı deyil. Onda (1)-(4) məsələsinin $\hat{L}$ operatoru üçün

$$\left\|z\right\|_{\hat{W}_{p,n}(G)} \le M_5 \left\|\hat{L}z\right\|_{\hat{Q}_{p,n}}, \ \forall z \in \hat{W}_{p,n}(G)$$

aprior qiymətlənməsi doğrudur [6]. Burada,

$$c^k = (T\alpha)^{\frac{1}{q}} \left\|\beta_{1,k}\right\|_{p,(0,T)} + (T(l-\alpha))^{\frac{1}{q}} \left\|\beta_{3,k}\right\|_{p,(0,T)} + \alpha^{\frac{1}{q}} \left\|g_{1,k}\right\|_{\infty,(0,T)} + (l-\alpha)^{\frac{1}{q}} \left\|g_{3,k}\right\|_{\infty,(0,T)}, \ k = 0,1$$

və $M_5 > 0$ sabiti $z(t,x)$ – dən asılı deyil. .

Teorem 4. Tutaq ki, Teorem 3-ün şərtləri ödənilir. Onda ixtiyari $\hat{\varphi} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi) \in \hat{Q}_{p,n}$ sağ tərəfi üçün (1)-(4) məsələsinin birdən çox $z \in \hat{W}_{p,n}(G)$ həlli ola bilməz. Bunun üçün (1)-(4) məsələsinə qoşma olan (3^1) sisteminin, başqa sözlə

$$\hat{L}^* \hat{f} = \hat{\psi},$$

tənliyinin ixtiyari $\hat{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi) \in \hat{Q}_{q,n}$ sağ tərəfi üçün heç olmasa bir $\hat{f} \in \hat{Q}_{q,n}$ həlli var, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

Teorem 1 və Teorem 3-ün şərtlərini nəzərə alsaq aşağıdakı teoremin doğruluğunu hökm edə bilərik:

Teorem 5. Tutaq ki, Teorem 1 və Teorem 3-ün şərtləri ödənilir. Onda (1)-(4) məsələsi və qoşma (3^1) məsələsi uyğun olaraq $\hat{W}_{p,n}(G)$ və $\hat{Q}_{q,n}$ -də korrekt həll olunandır. Başqa sözlə, ixtiyari $\hat{\varphi} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi) \in \hat{Q}_{p,n}$ və $\hat{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi) \in \hat{Q}_{q,n}$ sağ tərəfləri üçün yeganə $z \in \hat{W}_{p,n}(G)$ və $\hat{f} = (f_0, f_1, f_2, f_3, f) \in \hat{Q}_{q,n}$ həlləri var və bu həllər üçün həmçinin

$$\|z\|_{\hat{W}_{p,n}(G)} \leq M_3 \|\hat{\varphi}\|_{\hat{Q}_{p,n}} \text{ və } \|\hat{f}\|_{\hat{Q}_{q,n}} \leq M_6 \|\hat{\psi}\|_{\hat{Q}_{q,n}},$$

qiymətlənmələri də ödənilir. Burada, $M_3 > 0, M_6 > 0$ sabitlərdir və uyğun olaraq $z(t,x)$, $\hat{f}(\tau,\zeta)$-dən asılı deyildirlər.

ƏDƏBİYYAT

1. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, (1962), 256 с.
2. *Егоров А.И.* Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами.- Авт. и тел.,1964, т.25, №5, с.613-623.
3. *Ахыев С.С.* О некоторых вопросах оптимизации систем линейных гиперболических уравнений второго порядка с разрывными решениями и нелокальными краевыми условиями. Деп. в АЗНИИНТИ, №1860-Аз от 22.07.92г., №11(253), 37с.
4. *Нахушев А.М.* Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги.- ДУ, 1979, т.15, №1, с.95-105.
5. *Ахыев С.С.* Задача оптимального управления для линейных нелокальных гиперболических уравнений второго порядка с разрывными решениями. Доклады НАН Азербайджана. 2007, т.LXIII, №5, с.8-15.
6. *Orucoglu K., Akhiev S.S.,* The Riemann function for the third order one-dimensional pseudoparabolic equation, Acta Appl. Math. 53, No. 3(1998), 353-370.

Redaksiyaya daxil olub 27.03.2022