UOT 519.21

E.A.İbayev, K.K.Ömərova
AMEA İdarəetmə Sistemləri İnstitutu
elshanibayev@gmail.com
omarovakonulk@gmail.com

BİR SEMİ-MARKOV DOLAŞMA PROSESİNİN SƏRHƏD FUNKSİONALININ PAYLANMASININ DOĞURAN FUNKSİYASI ÜÇÜN KƏSR TƏRTİB DİFERENSİAL TƏNLİYİN ALINMASI

Açar sözlər: *doğuran funksiya, təsadüfi kəmiyyət, semi-Markov dolaşma prosesi, kəsr tərtib diferensial tənlik*

İşdə mənfi sıçrayışlı, müsbət axınlı semi-Markov dolaşma prosesi tədqiq olunmuşdur. Birinci dəfə “0” səviyyəsinə çatmaq üçün atılan addımlar sayı adlanan təsadüfi kəmiyyət daxil edilmişdir. Daxil edilmiş təsadüfi kəmiyyətin doğuran funksiyası üçün inteqral tənlik qurulmuşdur. Qurulmuş inteqral tənlik xüsusi paylanmalar sinfində kəsr tərtib sabit əmsallı diferensial tənliyə gətirilir. Sonda doğuran funksiyadan istifadə edərək təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları tapılmışdır.

Э.А.Ибаев, К.К.Омарова

ПОЛУЧЕНИЕ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАНИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА ОДНОГО ПРОЦЕССА ПОЛУМАРКОВСКОГО БЛУЖДАНИЯ

Ключевые слова: *производящая функция, случайная величина, процесс полумарковского блуждания, дифференциальные уравнения дробного порядка*

В данной работе исследован процесс полумарковского блуждания с отрицательным скачком и положительным сносом. Первый раз была введена случайная величина, называемая число шагов, предпринятых для достижения уровня «нуль». Построено интегральное уравнение для введенной случайной величины. Построенное интегральное уравнение в частном классе распределений приводится в дифференциальное уравнение дробного порядка с постоянными коэффициентами. Наконец используя производящую функцию, найдены числовые характеристики случайной величины.

E.A.Ibayev, K.K.Omarova

OBTAINING THE FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATION FOR GENERATING FUNCTION OF THE BOUNDARY FUNCTIONAL DISTRIBUTION OF A SEMI-MARKOV RANDOM WALK PROCESS

Keywords: *generating function, random variable, semi-Markov random walk process, fractional order differential equation*

In this paper, the semi-Markov random walk processes with positive drift and negative jumps is investigated. The random variable – the numbers of the steps for the first moment of reaching condition “0” is introduced. Integral equation for the generating function of the distribution of this random variable is obtained. The Integral equation is reduced to a fractional order differential equation with constant coefficients. Finally, the numerical characteristics of the random variable is obtained by using generating function.

Ehtimal nəzəriyyəsində təsadüfi proseslərlə təsvir olunan sistemlərin ehtimal xarakteristikalarının tədqiqi aktual məsələlərdən biridir. Sığorta, kütləvi xidmət nəzəriyyəsi, ehtiyatların idarə olunması sahələrində bir və ya iki sərhədə malik təsadüfi dolaşma proseslərindən istifadə olunur. Təsadüfi proseslərin tədqiq olunduğu bir çox işlərdə prosesin paylanması ixtiyari qanunla verilir və asimptotik ifadələr alınmışdır [1; 2; 3; 6]. Metzler və Klafterin [4] işində kəsilməz zamana malik təsadüfi dolaşma modelinin əsasında kəsr tərtib ümumiləşmiş diffuziya tənliyi tədqiq olunmuşdur. Faktorizasiya metodundan istifadə edərək Markov zəncirinə malik təsadüfi dolaşma üçün sərhədi aşma problemləri V.I. Lotov və N.G. Orlova [12] tərəfindən tədqiq olunmuşdur. T. H. Nəsirovanın [5] və onun tələbələrinin işlərində semi-Markov dolaşma prosesinin birinci dəfə sıfır səviyyəsinə çatma anına qədər atılan addımlar sayının doğuran funksiyası öyrənilmişdir (bax, [7]-[10]). Qeyd etmək lazımdır ki, semi-Markov dolaşma prosesi üçün atılan addımlar sayının tapılması məsələsi tətbiqi riyaziyyat və mühəndislikdə vacib məsələlərdən biridir.

İşdə mənfi sıçrayışlı, müsbət axınlı semi-Markov dolaşma prosesinin və bu prosesin sıfır səviyyəsinə birinci dəfə çatma anına qədər atılan addımlar sayının riyazi modeli qurulmuşdur. Atılan addımlar sayının şərti paylanmasının doğuran funksiyası üçün qurulmuş inteqral tənlik xüsusi paylanmalar sinfində kəsr tərtib sabit əmsallı diferensial tənliyə gətirilmişdir.

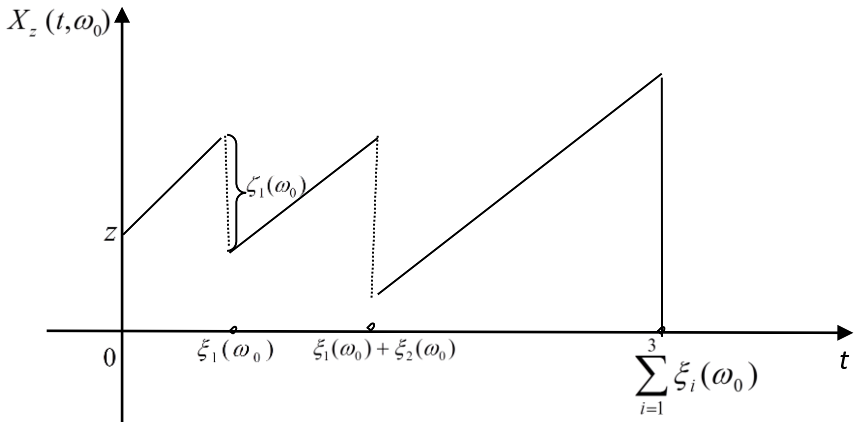
Məsələnin qoyuluşu

Tutaq ki, $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ ehtimal fəzasında $\{\xi_k, \zeta_k\}_{k\geq 1}$ təsadüfi kəmiyyətlərin cütləri ardıcıllığı verilmişdir. Belə ki, ξ_k və ζ_k, $k=\overline{1,\infty}$ müsbət, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Bu təsadüfi kəmiyyətlərdən istifadə edərək, aşağıdakı semi-Markov dolaşma prosesini quraq:

$$X_z(t) = z + t - \sum_{i=0}^{k-1} \zeta_i, \quad \text{əgər} \quad \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i \le t < \sum_{i=0}^{k} \xi_i \quad k = \overline{1,\infty},$$

burada $\xi_0 = \zeta_0 = 0$. $X_z(t)$ prosesi "mənfi sıçrayışlı, müsbət axınlı semi-Markov dolaşma prosesi" adlanır.

$X_z(t)$ prosesinin realizasiyalarından biri şəkil 1-də göstərilmişdir:



Şəkil 1. Mənfi sıçrayışlı, müsbət axınlı semi-Markov dolaşma prosesi

Aşağıdakı kimi təsadüfi kəmiyyət daxil edək:

$$\nu_1^0 = \min\left\{k : z + \sum_{i=1}^{k}(\xi_i - \zeta_i) \le 0\right\}.$$

Burada fərz olunur ki, $\zeta_i - \xi_i \succ 0$ vahid ehtimalla ödənilir .

ν_1^0 (aşağı sərhəd funksionalı) baxılan prosesin birinci dəfə sıfır səviyyəsinə çatma anına qədər atılan addımlar sayıdır.

Bu işdə əsas məqsəd ν_1^0-ın şərti paylanmasının doğuran funksiyasını tapmaqdan ibarətdir.

ν_1^0 -ın doğuran funksiyasının təyini

Məlumdur ki, ν_1^0-ın şərti paylanmasının doğuran funksiyası aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\psi(u \mid z) = E\left(u^{\nu_1^0} \middle| X_z(0) = z\right) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k P\left\{\nu_1^0 = k \middle| X_z(0) = z\right\} \quad 0 < u \le 1.$$

Teorem. Tutaq ki, ξ_k və ζ_k, $k=\overline{1,\infty}$ müsbət, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Onda ν_1^0-ın şərti paylanmasının doğuran funksiyası üçün inteqral tənlik aşağıdakı şəkildədir.

$$\psi(u|z) = uP\{z+\xi_1-\zeta_1 \le 0\} + \\ + u\int_{y=0}^{\infty}\psi(u|y)P\{z+\xi_1-\zeta_1>0; z+\xi_1-\zeta_1\in dy\} \tag{1}$$

İsbatı. $k \ge 2$ üçün tam ehtimal düsturundan istifadə edək. Onda

$$P\{\nu_1^0 = k|X_z(0)=z\} = \\ = \int_{y=0}^{\infty}P\{z+\xi_1-\zeta_1>0;\ z+\xi_1-\zeta_1\in dy\}P\{\nu_1^0 = k-1|X_z(0)=y\}.$$

Bu bərabərliyin hər iki tərəfini u^k -ya $(0<u\le 1)$ vurub, sonra k -ya $k=\overline{2,\infty}$ görə cəmləsək, alarıq:

$$\sum_{k=2}^{\infty}u^kP\{\nu_1^0 = k|X_z(0)=z\} = \\ = \sum_{k=2}^{\infty}u^k\int_{y=0}^{\infty}P\{z+\xi_1-\zeta_1>0;\ z+\xi_1-\zeta_1\in dy\}P\{\nu_1^0 = k-1|X_z(0)=y\}. \tag{2}$$

(2) tənliyini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\sum_{k=1}^{\infty}u^kP\{\nu_1^0 = k|X_z(0)=z\} = uP\{z+\xi_1-\zeta_1\le 0\} + \\ + \sum_{k=2}^{\infty}u^k\int_{y=0}^{\infty}P\{z+\xi_1-\zeta_1>0;\ z+\xi_1-\zeta_1\in dy\}P\{\nu_1^0 = k-1|X_z(0)=y\}. \tag{3}$$

(3) tənliyində bəzi çevirmələr aparsaq, (1) tənliyini alarıq.

Teorem isbat olundu.

(1) tənliyini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\psi(u|z) = uP\{z-\xi_1+\zeta_1\le 0\} + \\ + u\int_{y=0}^{\infty}\int_{s=0}^{\infty}\psi(u|y)P\{\xi_1\in ds;\ z+s-\zeta_1>0;\ z+s-\zeta_1\in dy\}. \tag{4}$$

(4) tənliyini

$$\psi(u|z) = uP\{z-\xi_1+\zeta_1\le 0\} + \\ + u\int_{y=0}^{\infty}\int_{s=0}^{\infty}\psi(u|y)d_y\left[P\{\xi_1\in ds;\ \zeta_1<z+s\} - P\{\xi_1\in ds;\ \zeta_1<z+s-y\}\right]$$

və ya

$$\psi(u|z) = uP\{z - \xi_1(\omega) + \zeta_1(\omega) \le 0\} -$$

$$-u \int_{y=0}^{\infty} \int_{s=0}^{\infty} \psi(u|y) d_y \left[P\{\xi_1 \in ds;\ \zeta_1(\omega) < z + s - y\} \right] \tag{5}$$

kimi yazmaq olar.

(5)-dən görünür ki, $z + s - y > 0$ olmalıdır. Onda

$$\psi(u|z) = uP\{z - \xi_1 + \zeta_1 \le 0\} -$$

$$-u \int_{y=0}^{\infty} \int_{s=\max(0;y-z)}^{\infty} \psi(u|y) d_y \left[P\{\xi_1 \in ds;\ \zeta_1 < z + s - y\} \right]. \tag{6}$$

(6) tənliyindən, asanlıqla aşağıdakı tənliyi almaq olar:

$$\psi(u|z) = u\int_0^{\infty} P\{\zeta_1 > z + x\} p_{\xi_1}(x)dx -$$

$$-u\int_z^{\infty} \psi(u|y) \int_{y-z}^{\infty} p_{\xi_1}(s) p_{\zeta_1}(z + s - y) ds dy - \tag{7}$$

$$-u\int_0^{z} \psi(u|y) \int_0^{\infty} p_{\xi_1}(s) p_{\zeta_1}(z + s - y) ds dy.$$

Fərz edək ki, ξ_1 təsadüfi kəmiyyəti $\alpha > 0$ və $\beta > 0$ parametrli Qamma paylanmasına, ζ_1 təsadüfi kəmiyyəti isə μ parametrli eksponensial paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlərdir:

$$\rho_{\xi_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases} \qquad \rho_{\zeta_1}(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

Bu paylanmalar sinfində (7) inteqral tənliyi aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$\psi(u|z) = \frac{u\beta^{\alpha} e^{-\mu z}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-(\mu+\beta)x} x^{\alpha-1} dx -$$

$$-\frac{u\mu\beta^{\alpha} e^{-\mu z}}{\Gamma(\alpha)} \int_z^{\infty} e^{\mu y} \psi(u|y) \int_{y-z}^{\infty} e^{-(\mu+\beta)s} s^{\alpha-1} ds dy - \tag{8}$$

$$-\frac{u\mu\beta^{\alpha} e^{-\mu z}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{z} e^{\mu y} \psi(u|y) \int_0^{\infty} e^{-(\mu+\beta)s} s^{\alpha-1} ds dy.$$

(8) tənliyinin hər iki tərəfini $e^{\mu z}$-ə vurub, sonar isə hər iki tərəfdən z-ə görə törəmə alsaq, alarıq:

$$e^{\mu z}\psi'(u|z)+\mu e^{\mu z}\psi(u|z)=-\frac{\beta^{\alpha}\mu u e^{(\beta+\mu)z}}{\Gamma(\alpha)}\int_z^{\infty}e^{-\beta y}\psi(u|y)(y-z)^{\alpha-1}\,dy. \tag{9}$$

(9) tənliyinin hər iki tərəfini $e^{-(\mu+\beta)z}$ -ə vursaq, alarıq:

$$e^{-\beta z}\psi'(u|z)+\mu e^{-\beta z}\psi(u|z)=-\frac{\beta^{\alpha}\mu u}{\Gamma(\alpha)}\int_z^{\infty}e^{-\beta y}\psi(u|y)(y-z)^{\alpha-1}\,dy. \tag{10}$$

(10) tənliyinin həlli

Aşağıdakı kimi işarələmə qəbul edək:

$$Q(u|z)=e^{-\beta z}\psi(u|z) \tag{11}$$

Onda (10) tənliyindən alarıq:

$$Q'(u|z)+(\mu+\beta)Q(u|z)+\frac{\beta^{\alpha}\mu u}{\Gamma(\alpha)}\int_z^{\infty}Q(u|y)(y-z)^{\alpha-1}\,dy=0. \tag{12}$$

Məlumdur ki, Veyl mənada kəsr tərtib inteqral aşağıdakı kimi verilir:

$$I^{\alpha}(Q(u|z))=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_z^{\infty}Q(u|y)(y-z)^{\alpha-1}dy.$$

Sonuncu bərabərliyi (12) tənliyində nəzərə alsaq aşağıdakı tənliyi alarıq:

$$Q'(u|z)+(\mu+\beta)Q(u|z)+\beta^{\alpha}\mu u I^{\alpha}(Q(u|z))=0. \tag{13}$$

Fərz edək ki, $\alpha\in(0,1)$ və $\phi(z)$ funksiyası $(0,\infty)$ aralığında diferensiallanandır. Onda $\phi(z)$ funksiyasının Veyl mənada α tərtib kəsr törəməsi aşağıdakı kimi verilir:

$$D^{\alpha}\phi(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}(z-u)^{-\alpha}\phi'(u)du.$$

(13) tənliyinin hər iki tərəfinə Veyl mənada α tərtib kəsr törəməni tətbiq edək. Onda aşağıdakı tənliyi alarıq:

$$D_z^{\alpha+1}(Q(u|z))+(\mu+\beta)D_z^{\alpha}(Q(u|z))-\mu\beta^{\alpha}uQ(u|z)=0. \tag{14}$$

Asanlıqla göstərmək olar ki, $D_z^{\alpha}e^{-k(u)z}=-[k(u)]^{\alpha}e^{-k(u)z}$.

Fərz edək ki, (14) kəsr tərtib diferensial tənliyin həllərindən biri $Q(u|z)=e^{-k(u)z}$ şəklindədir, burada $k(u)$ aşağıdakı xarakteristik tənliyin köklərindən biridir:

$$[k(u)]^{\alpha+1}-(\mu+\beta)\cdot[k(u)]^{\alpha}-\mu\beta^{\alpha}u=0. \tag{15}$$

Beləliklə, $\psi(u|z) = e^{-[\beta - k(u)]z}$ olur. Aydındır ki, $\psi(1|z) = 1$. Deməli $k(1) = \beta$ olmalıdır.

(15) tənliyindən alırıq:

$$k'(1) = \frac{\beta^{\alpha}\mu}{(\alpha+1)\beta^{\alpha} - (\mu+\beta)\cdot\alpha\cdot\beta^{\alpha-1}},$$

$$k''(1) = \frac{\left[(\mu+\beta)\cdot\alpha\cdot(\alpha-1)\beta^{\alpha-2} - (\alpha+1)\cdot\alpha\,\beta^{\alpha-1}\right][k'(1)]^2}{(\alpha+1)\beta^{\alpha} - (\mu+\beta)\cdot\alpha\cdot\beta^{\alpha-1}}.$$

$\psi(u|z)$-in ifadəsindən istifadə edərək, ν_1^0-nin şərti paylanmasının riyazi gözləməsini və dispersiyasını hesablaya bilərik:

$$E(\nu_1^a|z) = \psi_a'(1|z) = \frac{\beta^{\alpha}\mu z}{(\mu+\beta)\cdot\alpha\cdot\beta^{\alpha-1} - (\alpha+1)\beta^{\alpha}}.$$

$$D(\nu_1^a|z) = \psi_a''(1|z) + \psi'(1|z)\left[1 - \psi'(1|z)\right] =$$

$$-\frac{\left[(\mu+\beta)\cdot\alpha\cdot(\alpha-1)\beta^{\alpha-2} - (\alpha+1)\cdot\alpha\,\beta^{\alpha-1}\right][k'(1)]^2 z}{(\alpha+1)\beta^{\alpha} - (\mu+\beta)\cdot\alpha\cdot\beta^{\alpha-1}} + \frac{\beta^{\alpha}\mu z}{(\mu+\beta)\cdot\alpha\cdot\beta^{\alpha-1} - (\alpha+1)\beta^{\alpha}}.$$

Nəticə

İşdə mənfi sıçrayışlı, müsbət axınlı semi-Markov dolaşma prosesinin sıfır səviyyəsinə birinci dəfə çatma anına qədər atılan addımlar sayının şərti paylanmasının doğuran funksiyasını tapmaq üçün kəsr tərtib sabit əmsallı diferensial tənlik alınmışdır. Doğuran funksiya üçün alınmış ifadədən istifadə edərək birinci və ikinci tərtib momentlər tapılmışdır.

ƏDƏBİYYAT

1. *Ахмедова Г.М.* Распределение основных функционалов от обобшенного процесса с задерживаюшим экраном. В сб “Теория вероятностей и математическая статистика” , 20, 1979.
2. *Borovkov A.A.* “On the Asymptotic Behavior of the Distributions of First-Passage,” Mathematics and Statistics, Vol. 75, No. 1, 2004, pp. 24-39.doi:10.1023/B:MATN.0000015019.37128.cb
3. *Gihman, I.I., Skorohod, A.V.* The Theory of Stochastic Processes II, Springer-Verlag, 1975.
4. *R. Metzler and J. Klafter.* The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. Phys Rep. 339(1), 2000, 1-77.
5. *Насирова Т.И.* Процессы полумарковского блуждания. Баку, Элм, 1984, 163 с.

6. *Lotov V.I.* "On the Asymptotics of the distribution in two-sided boundary Problems for random walks defined on a Markov Chain". Siberian Advances in Mathematics. Vol. 1, № 3, 1991, pp. 26-51.
7. *Nasirova T.I., Kerimova U.Y.* Definition of Laplace Transforms for distribution of the first Passage of Zero level of the Semi-Markov random process with positive tendency and negative jump. Applied mathematics, 2011, 2, 908-911. Doi: 10. 4236 / om 2011 27122.
8. *Садыкова Р.И.* Производящая функция распределения верхнего граничного функционала процесса полумарковского блуждания. (Generating function of distribution of the upper boundary functional) // News of ANAS, 2007, Vol. XXVII, №2-3, pp.101-105.
9. *Babayev. Sh.A.* On finding of generating function of steps number of some class semimarkov process with upper delaying screen // Proceeding of Institute of Mathematics and Mechanics , Baku 2004, v. XXI (XXIX), p. 45-50.
10. *T.A. Aliyeva, K.M. Cafarov.* The distribution of the first moment of escaping of a condition zero point of the process of semi-Markov random walk with positive and negative drifts, with delaying screein zero point // Mathematics, International ecoenergy academy, 1. 2004, p. 15-20.
11. *R.A.Bandaliyev, T.I.Nasirova, K.K.Omarova.* Mathematical modeling of the Semi-Markovian random walk processes with jumps and delaying screen by means of a fractional order differential equation. Math. Appl. Sci. 2018; 1-11.
12. *V.I. Lotov and N.G. Orlova.* Factorization representations in the boundary crossing problems for random walks on a Markov chain, Sib. Math. J. 46(4), 2005, 661-667.

Redaksiyaya daxil olub 11.04.2022