Pedaqoji Universitetin Xəbərləri. Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası – 2023, C. 71, №1, s. 9-17
Transactions of Pedagogical University. Series of mathematics and natural sciences – 2023, V. 71, №1, pp. 9-17

Riyaziyyat və mexanika

УДК 517.518

С.Г.Касумова
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет
sabine.kasumova.adpu@mail.ru

О ПРОСТРАНСТВЕ БЕСОВА С ДОМИНИРУЮЩЕЙ СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ, СОДЕРЖАЩИХ РАЗНОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Ключевые слова: *Пространство Бесова, векторнозначные функции, смещанные производные, разность дробного порядка*

В работе с помощью разностей дробного порядка определяются пространства Бесова с формирующей смещенной производной для векторзначных (Е-значных) функции и исследуются теоремы вложения для этих пространств. Доказано, что все пространства Бесова с доминирущей смещенной производной $SB^r_{p,\theta}(R^n, E)$ совпадают при определении их на языке разностей произвольного порядка как целого так и дробного с точностью до эквивалентности соответствующих норм.

S.H.Qasımova

KƏSR TƏRTİBLİ FƏRQLƏR SAXLAYAN QARIŞIQ TÖRƏMƏLƏRİN HƏLLEDİCİ ROL OYNADIĞI BESOV FƏZALARI HAQQINDA

Açar sözlər: *Besov fəzası, vektor qiymətli funksiyalar, qarışıq törəmələr, kəsr tərtibli fərqi*

İşdə kəsr tərtibli fərqlərin köməyi ilə vektor qiymətli (E-qiymətli) funksiyalar üçün qarışıq törəmələrin həlledici rol oynadığı Besov fəzası təyin olunub və bu fəzada daxil olma teoremlər təyin edilmişdir.

İsbat edilmişdir ki, qarışıq törəmələrin həlledici rol oynadığı bütün Besov fəzalarında $SB^r_{p,\theta}(R^n, E)$ uyğun normaların ekvivalentliyinə qədər ixtiyari tərtibli həm tam, həm də kəsirli fərqlər dilində müəyyən edildikdə üst-üstə düşür.

S.H.Kasumova

ON THE BESOV SPACE WITH DOMINANT MIXED DERIVALIVE CONTAINING FRACTIONAL ORDER DIFFERENCES

Keywords: *Besov space, vector-valued funktions, mixed derivatives, fractional order difference*

In this paper,with the help of differences of fractinal order, Besov spaces with a dominant mixed derivative for vector-valued (E-valued) functions are defined and the embedoling theorem for these spaces is investigated. It is proved that all Besov spaces with dominating mixed derivative $SB^r_{p,\theta}(R^n,E)$ coincide when they are defined in the language of differences of an arbitrary order, both integer and fractional, up to the eqvivalence of the correspoding norms.

В работе с помошью разностей дробного порядка определяются пространства Бесова доминирующей смешанной производной для векторнозначных ($E-$значных) функций и исследуются теоремы вложения для этих пространства .

Пусть N- множество натуральных чисел, $N_0 = N\cup\{0\}$, $n \in N$, $R^n = (-\infty,+\infty)^n - n$-мерное евклидово пространство. $e^i -$ орто - гональный стандартный базис в $R^n, x = (x_1,\dots,x_n) = \sum_1^n x_i\, e_i, y \in R^n$, $xy = \sum_1^n x_i\, y_i$, $|x| = (x\cdot x)^{1/2}$.

Через $a = (a_1,\dots a_n)$, $k = (k_1,\dots,k_n)$ обозначим мультииндекс с целочисленными неотрицательными компонентами $|a| = \sum_1^n a_i$,

$(a,k) = \sum_1^n a_i k_i$. Положим $D_j = \frac{\partial}{\partial z_j}$, $D^k = D_1^{k_1}\dots D_n^{k_n}$

Пуст $E -$ банахово пространство, норма элемента $a \in E$ обозначим через $\|a\|_E$, $p = (p_1,\dots,p_n)$ вектор компонентами, удовлетворяющими неравенствам $1 \le p_i \le \infty$ $(i = 1,\dots,n)$.

Через $L_p(R^n,E)$ будем обозначать пространства сильно измеримых на R^n E-значных функции $f(x)$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_p(R^n,E)} = \|f\|_{p,R^n,E} = \|f\|_{(p_1,\dots,p_n)R^n,E} =$$

$$= \left\{\int_R \left[\dots\left\{\int_R \left(\int_R \|f(x)\|_E^{p_1}\, dx_1\right)^{p_2/p_1} dx_2\right\}^{p_3/p_2} \dots\right]^{p_n/p_{n-1}} dx_n\right\}^{1/p_n}$$

Определение 1. Пусть $f \in L_p(R^n,E)$. *Разностью порядка* $\rho > 0$ *функции* $f(x)$, $x \in R^n$ *с шагом* $h \in R^n$ *назовем выражение* (см.[1])

$$\Delta^{\rho}(h)f(x) = \exp(\pi p i)\sum_{j=0}^{\infty} A_j^{-1-\rho} f(x+jh)$$

$$\Delta_m^{\rho}(t)f(x) = \exp(\pi p i)\sum_{j=0}^{\infty} A_j^{-1-\rho} f(x+jte_m)$$

где числа $A_j^{-1-\rho}$ определюется из соотнощения

$$(1-t)^{\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} A_{j=0}^{-1-\rho} t^j$$

Лемма 1. *Пусть* $f \in L_p(R^n, E), p \in [1, \infty)^n$ *Тогда для любого* $\rho : 0 < \rho \leq 1 \quad \left\|\Delta_h^{\rho} f\right\|_{p,E} \longrightarrow 0, \quad h \to 0$

Обозначим через $E_{\sigma}(f)_{p,E}$ наилучшее приближение функции $f \in L_p(R^n, E)$ целыми E- значеными функциями $g(z)$ степени $\sigma([2],[3])$ по норме $L_p(R^n, E)$, $1 \leq p \leq \infty$,

$$E_{\sigma}(f)_{p,E} = \inf_g \|f-g\|_{p,E}.$$

Определение 2. *Пусть* $h_0 > 0$, $\rho_i > 0$, $k_i \in N_0$, $\rho_i > r_i - k_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, $r = (r_1, \dots r_n) \in (0, \infty)^n, p \in [1, \infty]^n$. *Пространством* $'B_{p,\theta}^r(R^n, E)$ *называется линейное нормированное пространство* E *- значных функций* f, *определенных на* R^n *с конечной нормой*

$$\|f\|_{'B_{p,\theta}^r(R^n,E)} = \|f\|_{p,E} + \|f\|_{'b_{p,\theta}^r(R^n,E)} = \|f\|_{p,E} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{h_0}\left[\frac{\left\|\Delta_i^{\rho_i}(h)D_i^{k_i}f\right\|_{p,E}}{h^{r_i-k_i}}\right]^{\theta}\frac{dh}{h}\right\}^{1/\theta}, \quad 1 \leq \theta < \infty$$

При $\theta = \infty$ *пронстранство* $'B_{p,\infty}^r(R^n, E)$ *обозначается еще через* $'H_p^r(R^n, E)$ *и норма определяется следующим образом*

$$\|f\|_{'H_p^r(R^n,E)} = \|f\|_{'B_{p,\infty}^r(R^n,E)} = \|f\|_{p,E} + \|f\|_{'b_{p,\infty}^r(R^n,E)} =$$

$$= \|f\|_{p,E} + \sum_{i=1}^{n} \sup_{0<h<h_0} \frac{\left\|\Delta_i^{\rho_i}(h)D_i^{k_i}f\right\|_{p,E}}{h^{r_i-k_i}}$$

Аналогично определяется пространства Бесова с доминирующий смешанной производной для векторнозначных функций.

Определение 3. *Пусть* $k = (k_1, \dots, k_n) \in N^n$, $r = (r_1, \dots, r_n) \in (0, \infty)^n$, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n) \in (0, \infty)^n$, $\rho_i > r_i - k_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n) \in [1, \infty]^n$, $\theta \in [1, \infty]$. *Пространством* $S_{p,\theta}^r B(R^n, E), 1 \leq \theta < \infty$ *назвается линейное нормированное пространство* $E -$ *значных функций* f, *определенных на* R^n *с конечной нормой.*

$$\|f\|_{'S^r_{p,\theta}B(R^n,E)} = \sum_{e\subset e_h}\left\{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left\|\Delta^{\rho^e}_{h^e} D^{k^e} f(\cdot)\right\|^\theta_{p_i,E} \prod_{j\in e} \frac{dh_j}{h_j^{(r_j-k_j)\theta H}}\right\}^{1/\theta}$$

Соответственно, пространство $'S^r_{p,\infty}B(R^n,E) = {}'S^r_p H(R^n,E)$ определя - ется требованием конечности нормы.

$$\|f\|_{'S^r_p H(R^n,E)} = \sum_{e\subset e_n} \sup_{h>0}\left\{\left\|\Delta^{\rho^e}_{h^e} D^{k^e} f\right\|_{p,E} \prod_{j\in e} h_j^{-(r_j-k_j}\right\}$$

Здесь $\rho^e = (\rho^e_1,\dots,\rho^e_n)$, $\rho_j > r_j (j = 1,\dots,n)$; $h = (h_1,\dots,h_n)$,

$$\rho^e_j = \begin{cases}\rho_j, & j\in e\\ 0, & j\in e_n/e\end{cases}$$

$\Delta^{\rho^e}(h)f$ - смешанная разность порядков ρ^e_j по x_i если $j\in e$. Разность $\Delta^{\rho^e}(h)f$, будем обозначать

$$\Delta^\rho(h)f = \Delta^\rho_1(h_1)(\dots(\Delta^\rho_n(h_n)f)\dots).$$

Из определении пространства $B^r_{p,\theta}(R^n,E)$, $'B^r_{p,\theta}(R^n,E)$, а также $S^r_{p,\theta}B(R^n,E)$, $'S^r_{p,\theta}B(R^n,E)$ следует, что

$f\in {}'B^r_{p,\theta}(R^n,E) \Rightarrow f\in B^r_{p,\theta}(R^n,E)$,

$f\in {}'S^r_{p,\theta}B(R^n,E) \Rightarrow f\in S^r_{p,\theta}B(R^n,E)$,

т.е. $'B^r_{p,\theta}(R^n,E)\subset B^r_{p,\theta}(R^n,E)$ а также $'S^r_{p,\theta}B(R^n,E)\subset S^r_{p,\theta}B(R^n,E)$.

В работе [4] показано, что $'B^r_{p,\theta}(R^n,E) = B^r_{p,\theta}(R^n,E)$ и соответствующие нормы эквивалентны.

Нами будет показано, что $'S^r_{p,\theta}B(R^n,E) = S^r_{p,\theta}B(R^n,E)$ и соответствующие нормы эквивалентны.

Справедлива следующая теорема

Теорема 1. *Для того, чтобы функция* $f\in L_p(R^n,E)$ *принадлежала пространству* $'S^r_{p,\theta}B(R^n,E)$, $r = (r_1,\dots,r_n)\in(0,\infty)^n$, $\rho = (\rho_1,\dots,\rho_n)\in[1,\infty]^n$, $1\le\theta<\infty, (a>1)$ *необходимо и достаточно и, чтобы величина*

$$\left\{\sum_{i=0}^\infty a^{i\theta} E^\theta_{a^{i/r_1},\dots,a^{i/r_n}}(f)_{p,E}\right\}^{1/\theta}, \qquad 1\le\theta<\infty \tag{1}$$

$$\sup_i\left\{a^i E_{a^{i/r_1},\dots,a^{i/r_n}}(f)_{p,E}\right\}, \qquad \theta=\infty \tag{2}$$

была конечна. При этом полунорма $'s^r_{p,\theta}b(R^n,E)$ ($'s^r_{p,\infty}b(R^n,E)$ *при* $\theta=\infty$) эквивалентна выражению (1) [(2) *при* $\theta=\infty$] .

Доказательство. Пуст $f\in {}'S^r_{p,\theta}B(R^n,E)$. Тогда

$$\|f\|_{{}'S'_{p,\theta}B(R^n,E)} = \sum_{e\subset e_n}\left\{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left\|\Delta_{h^r}^{\rho^r} D^{k^e} f(\cdot)\right\|_{p,E}^{\theta} \prod_{j\in e} \frac{dh_j}{h_j^{1+(r_j-k_j)^\theta}}\right\}^{1/\theta} < \infty.$$

Рассмотрим $m = (m_1 \dots, m_n) \in N^n$,$m_i > \rho_{i>} r_i, i = 1, \dots, n$.
Если учесть неравенство

$$\left\|\Delta_{h^e}^{m^e} D^{k^e} f(\cdot)\right\|_{p,E} = \left\|\Delta_{h^e}^{m^e-\rho^e} \Delta_{h^e}^{\rho^e} D^{k^e} f(\cdot)\right\|_{p.E}, \le C \left\|\Delta_{h^e}^{\rho^e} D^{k^e} f(\cdot)\right\|_{p,E}$$

то имеем, что $f \in S_{p,\theta}^r B(R^n, E)$ и

$$\left\{\sum_{i=0}^\infty a^{i\theta} E_{a^{i/r_1,\dots,}a^{i/r_n}}^\theta \ (f)_{p,E}\right\}^{1/\theta} \le$$

$$\le C\|f\|_{S_{p,\theta}^r B(R^n,E)} = \sum_{e\subset e_n}\left\{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left\|\Delta_{h^r}^{m^r} D^{k^e} f(\cdot)\right\|_{p,E}^{\theta} \prod_{j\in e} \frac{dh_j}{h_j^{1+(r_j-k_j)\theta}}\right\}^{1/\theta} \le$$

$$\le C \sum_{e\subset e_h}\left\{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left\|\Delta_{h^e}^{\rho^e} D^{k^e} f(\cdot)\right\|_{p,E}^{\theta} \prod_{j\in e} \frac{dh_j}{h_j^{1+(r_j-k_j)^\theta}}\right\}^{1/\theta} = \|f\|_{{}'S_{p,\theta}^r B(R^n,E)}$$

Следовательно, из $f \in {}'S_{p,\theta}^r B(R^n, E)$ следует, что $f \in S_{p,\theta}^r B(R^n, E)$ и справедливо неравенство

$$\left\{\sum_{i=0}^\infty a^{i\theta} E_{a^{i/r_1,\dots,}a^{i/r_n}}^\theta \ (f)_{p,E}\right\}^{1/\theta} \le$$
$$\le \|f\|_{S_{p,\theta}^r B(R^n,E)} \le C\|f\|_{{}'S_{p,\theta}^r B(R^n,E)}$$

А теперь пусть E-значная функция f представима рядом, сходящегося в $L_p(R^n, E)$:

$$f(x) = \sum_{s\ge 0} Q_{|a^s|}(x)$$

Причем

$$\sum_{s\ge 0} a^{(s,r)_\theta} \left\|Q_{[a^s]}\right\|_{p,E}^{\theta} < \infty$$

где $Q_{[a^s]}$- целая функция экспоненциального типа степени a^{s/r_j} по x_j.

В силу теоремы $f \in S_{p,\theta}^r B(R^n, E)$ и величина $\sum_{s\ge 0} a^{(s,r)_\theta} \left\|Q_{[a^s]}\right\|_{p.E}^{\theta}$ эквивалентна $\|f\|^{\theta}_{S_{p,\theta}^r B(R_n,E)}$.

Сначала рассмотрим случай $\theta = \infty$.Тогда

$$\left\|\Delta_{h^e}^{\rho^e} D^{k^e} f(\cdot)\right\|_{p,E} \le \sum_{s,N} \left\|\Delta_{h^r}^{\rho^e} D^{k^e} Q_{[a^s]}\right\|_{p,E} + \sum_{s\ge N+1} \left\|D^{k^e} Q_{[a^s]}\right\|_{p,E} \le$$

$$\leq C\sum_{s\leq N}\left(\prod_{j\in e}\left|h_j\right|^{p_j}a^{sp_j/r_j}\right)\left\|D^{k^e}Q_{[a^s]}\right\|_{p,E}+C\sum_{s\geq N+1}\left\|D^{k^e}Q_{[a^s]}\right\|_{p,E}\leq$$

$$\leq C\sum_{s\leq N}\left(\prod_{j\in e}\left|h_j\right|^{p_j}a^{s(p_j+k_j/r_j}\left\|Q_{[a^s]}\right\|_{p,E}\right)+C\sum_{s\geq N+1}\prod_{j\in e}a^{sk_j/r_j}\left\|D^{k^e}Q_{[a^s]}\right\|_{p,E}\leq$$

$$\leq C\prod_{j\in e}\left|h_j\right|^{p_j}\sum_{s\leq N}a^{s\sum_{j\in e}(p_j+k_j)/r_j-s}+C\sum_{s\geq N+1}a^{-s}\prod_{j\in e}a^{sk_j/r_j}=$$

$$=C\prod_{j\in e}\left|h_j\right|^{p_j}\sum_{s\leq N}a^{s\sum_{j\in e}(p_j+k_j)/r_j-s}+C\sum_{s\geq N+1}a^{s\sum_{j\in e}k_j/r_j-s}\leq$$

$$\leq C\prod_{j\in e}\left|h_j\right|^{p_j}a^N\sum\nolimits_{j\in e}\left((p_j+k_j/r_j-1\right)$$

$$+C_a^{-(N+1)}\sum_{j\in e}\left(1-k_j/r_j\right).$$

Зафиксируем приращения $|h|>0$ подберем натуральное числа так, чтобы:

$$a^{-(N+1)}<\prod_{j\in e}\left|h_j\right|^{r_j}\leq a^{-N}$$

Тогда

$$\prod_{j\in e}\left|h_j\right|^{\rho_j}\leq a^N\sum\nolimits_{j\in e}((\rho_j+k_j)/k_j-1)\leq$$

$$\leq C\prod_{j\in e}\left|h_j\right|^{\rho_j}\prod_{j\in e}\left|h_j\right|^{r_j}\prod_{j\in e}\left|h_j\right|^{-r_j\sum_{j\in e}((\rho_j+k_j)/r_j-1)}=$$

$$=C\prod_{j\in e}\left|h_j\right|^{\rho_j+r_j}\prod_{j\in e}\left|h_j\right|^{-r_j\sum_{j\in e}((\rho_j+k_j)/r_j)}=$$

$$=\prod_{j\in e}\left|h_j\right|^{\rho_j+r_j-r_j(p_j+k_j)/r_j}=C\prod_{j\in e}\left|h_j\right|^{r_j-k_j}$$

Следовательно

$$\left\|\Delta_{h^e}^{\rho^e}D^{k^e}f(\cdot)\right\|_{p,E}\leq \mathrm{C}\prod_{j\in e}\left|h_j\right|^{r_j-k_j}$$

А именно , $f\in {}'S_p^rH(R^n,E)$ и

$$\|f\|_{'S'_{p,\theta}B(R^n,E)}\leq C\|f\|_{S'_{p,\theta}H(R^n,E)}\leq\sum_{s\geq 0}a^{(s,r)^\theta}\left\|Q_{[a^s]}\right\|_{p.E}^\theta$$

Аналогично рассматривается случай $1\leq\theta<\infty$.

Из теоремы 1 следует, что верно следующая

Теорема 2. *Пусть E банахово пространство,* $p=(p_1,\dots,p_n)\in[1,\infty]^n, 1\leq\theta\leq\infty, r=(r_1,\dots,r_n)\in[0,\infty]^n$. *Тогда пространства* $S_{p,\theta}^rB(R^n,E)$, ${}'S_{p,\theta}^rB(R^n,E)$ *совпадают и соответствующие нормы эквивалентны.*

Также справедлива

Теорема 3. *Если* $f \in H_p^r(R_n, E)$, $n \geq 2, 1 \leq p_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, n$, $r = (r_1, \dots, r_n)$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, *то* $f \in SH_p^a(R_n, E), \forall a = (a_1, \dots, a_n)$, $\sum_{j=1}^{n} \frac{a_1}{r_1} = 1$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|_{SH_p^a(R_n,E)} \leq C\|f\|_{H_p^r(R_n,E)},$$

где C *- некоторая постоянная.*

Доказательство. Так как функция $f \in H_p^r(R_n, E)$, то ее можно представить в виде целых функций конечной степени $2^{s/r_j}$ по каждой переменной x_j :

$$\mathrm{f(x)} = \sum_{\mathrm{s}=0}^{\infty} \mathrm{Q_s(x)}$$

причем

$$\|Q_s\|_{p,E} \leq C2^{-s},$$

(см. [3])

Функция $Q_s(x) = Q_{2^{sr_1},\dots,2^{sr_n}}(x)$ удовлетворяют неравенствам [3]

$\left\|\Delta^{\rho_j}(h_j)Q_s\right\|_{p,E} \leq C\|Q_s\|_{p,E}$.

$\left\|\Delta^{\rho_j}(h_j)Q_s\right\|_{p,E} \leq C\|Q_s\|_{p,E} \leq C\left(\left|h_j\right|^{\rho_j} 2^{s\rho_j/r_j}\right)\|Q_s\|_{p,E} \quad (j = 1, \dots, n)$

Если вектор, $a = (a_1, \dots, a_n)$ задан и у него некоторые компоненты равны нулю, то дело сводится по сути дело к исследованию функции от меньшего числа переменных. Поэтому будем считать, что все $a_j > 0$ и $\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{r_j} = 1$

Для доказательство теоремы мы должны оценить все смешенные разности от функции f, порожденные векторами $\rho^e. \rho_j > \propto_j, j \in e$. Для $e = e_n$, $\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{r_j} > 1$.Для множества e, явлющихся строгими подмножествами e_nсумма $\sum_{j=1}^{n} \frac{\rho_j}{r_j}$ $(\rho_j > a_j, j \in e)$ может быть сделана меньше единицы: $1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{r_j} > \sum_{j \in e} \frac{a_j}{r_j} > \frac{a_j}{r_j}$ поэтому можно подобрать числа $\rho_j > a$ так, что $\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{r_j} < 1$.

Поэтому достаточно оценить норму смешанной разности порядка. $\rho^{e^n} = \rho$. Имеем

$$\|\Delta^\rho(h)f\|_{p,E} \leq \sum_{s=0}^{\infty} \|\Delta^\rho(h)Q_s\|_{p,E} \leq$$

$$\leq C\sum_{s=0,}^{N}\prod_{j=1}^{n}(\left|h_j\right|^{\rho_j}2^{sp_j/r_i})\|Q_s\|_{p,E}+$$

$$+\sum_{s=N+1}^{\infty}\|Q_s\|_{p,E}\leq C\prod_{j=1}^{n}(\left|h_j\right|^{\rho_j}\sum_{s=0}^{N}2^{s(\sum_{k=1}^{n}p_k/r_k-1)}+$$

$$+C\sum_{s=N+1}^{\infty}2^{-s}\leq C\prod_{j=1}^{n}(\left|h_j\right|^{\rho_j}\sum_{s=0}^{N}2^{s(\sum_{k=1}^{n}p_k/r_k-1)+}$$

$$+C\sum_{s=N+1}^{\infty}2^{-s}\leq C\prod_{j=1}^{n}(\left|h_j\right|^{\rho_j}2^{N(\sum_{k=1}^{n}p_k/r_k-1)}+C2^{-(N+1)}$$

Зафиксируем приращение $\left|h_j\right|>0$ и подберем натуральное числа N так , чтобы:

$$2^{-(N+1)}<\prod_{j=1}^{n}(\left|h_j\right|^{a_j}\quad\leq 2^{-N}$$

Тогда

$$\prod_{j=1}^{n}(\left|h_j\right|^{\rho_j}2^{N(\sum_{k=1}^{n}p_k/r_k-1)}\leq\prod_{j=1}^{n}\left|h_j\right|^{\rho_j-\propto_j\sum_{k=1}^{n}\rho_k/r_{j+}\propto_j}$$

Подберем вектор $\rho=(\rho_1,\dots,\rho_n)$ так, чтобы

Таким образом, вектор p коллинеарен вектору a и при таком векторе ρ получаем,что$(\rho=(\lambda\alpha_1,\dots,\lambda\alpha_n),\lambda>1)$: $\|\Delta^{\rho}(h)f\|_{p,E}\leq C\prod_{j=1}^{n}(|h_i|^{a_i})$. Если ρ произвольный вектор $\left(\rho^j>a_j,\ j=1,\dots,n\right)$ то сачала, разност порядка ρ от функции $f(x)$ оцениваем через разност порядка ρ где $\rho=(\rho_1,\dots,\rho_n)$ - вектор, коллинеарный вектору a $(\rho_j>\rho_j=\lambda\alpha_j,\quad j=(1,\dots,n),\lambda>1$.

Неравенство между нормами классов следует из того факта, что постоянная C в последнем неравенстве оценивается через норму $\|f\|_{\prime H_p'}(f_{h,}E)$. Теорема доказана.

Теорема 4. Если $f\in B_{p.\theta}^{r}(R_n,E), n\geq 2,1\leq\theta<\infty, 1\leq p_j\leq\infty$ $j=1,\dots,n$, $r=(r_1,\dots,r_n)$, $r_j>0, j=1,\dots,n,$ то $f\in SB_{p,\theta}^{a}(R_n,E),\quad\forall a=(a_1,\dots,a_n)$, $\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{r_j}=1, a_j\geq 0, j=1,\dots,n$ и имеет место неравенство

$$\|f\|_{SB_{p,\theta}^{a}(R_n,E)}\leq C\|f\|_{B_{p,\theta}^{r}(R_n,E)}$$

где C - некоторая постоянная, не зависящая от f.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бугров Я.С.* Дробные разностные операторы и классы функций. Труды МИАН СССР им. В.А.Стеклова, 1985, т.172, с.60-69.
2. *Никольсий С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М:Наука,1977. с.456.
3. *Джабраилов М.С.* Теоремы вложения в векторно значных пространствах дифференцируемых функции и их применения. Баку издательство Элм, 1996, с. 170.
4. *Гулиев В.С., Махаров И.К.* Банаховозначные пространства Бесова, содержащие разности дробного порядка. Труды Института математики и механики АН Азерб. 1998, т.9, с.44-48.

Redaksiyaya daxil olub 10.10.2022