Pedaqoji Universitetin Xəbərləri. **Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası – 2023, C. 71, №2, s. 18-24**
Transactions of Pedagogical University. **Series of mathematics and natural sciences – 2023, V. 71, №2, pp. 18-24**

UOT 517.95

***R.M.Zeynalov*[1], *N.Ə.Əliyev*[2]**
Elm və Təhsil Nazirliyinin İdarəetmə Sistemləri İnstitutu[1]
Bakı Dövlət Universiteti[2]
raminz.math@gmail.com
nihan@aliev.info

VAHİD KVADRATDA KOŞİ-RİMAN TƏNLİYİ ÜÇÜN SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN ARAŞDIRILMASI

Açar sözlər: *Koşi-Riman tənliyi, fundamental həll, əsas münasibət, zəruri şərtlər, sinqulyarlıqlar, requlyarizasiya, fredholmluq*

İşdə birinci kvadrantda yerləşən vahid kvadratda Koşi-Riman tənliyi üçün qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində məsələyə baxılmışdır. Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllinin köməyi ilə əsas münasibət qurularaq, zəruri şərtlər alınır. Sərhəd boyu inteqrallardan ibarət olan zəruri şərtlər özündə sinqulyarlıqlar saxlayır. Bu sinqulyarlıqlar özünə məxsus üsulla requlyarlaşdırılaraq, verilmiş sərhəd şərtləri ilə birlikdə qoyulmuş məsələnin fredholmluğu üçün kafi şərtlər təyin edir.

Р.М.Зейналов, Н.А.Алийев

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОШИ-РИМАНА НА ЕДИНИЧНОМ КВАДРАТЕ

Ключевые слова: *уравнение Коши-Римана, фундаментальное решение, основные соотношение, необходимые условия, сингулярность, регуляризация, фредгольмовость*

В данной работе рассматривалась граничная задача с нелокальными граничныи условии в единичном квадрате для уравнения Коши-Римана, расположенного в первом квадранте. С помощью фундаментального решения уравнения Коши-Римана установлено основное соотношение и получены необходимые условия. Необходимые условия, состоящие из интегралов по границе, содержат сингулярности. Эти сингулярности, после регуляризации, вместе с заданными краевыми условиями определяют достаточные условия фредгольмовости данной задачи.

R.M.Zeynalov, N.A.Aliev

STUDYİNG THE SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE CAUCHY-RIEMANN EQUATION IN A UNIT SQUARE

Keywords: *Cauchy-Riemann equation, fundamental solution, fundamental relation, necessary conditions, singularities, regularization, fredholmness*

In this work, the problem was considered within the non-local boundary condition in the unit square for the Cauchy-Riemann equation located in the first quadrant. With the help of the fundamental solution of the Cauchy-Riemann equation, the basic relation is established and the necessary conditions are obtained. Necessary conditions consisting of integrals along the boundary contain singularities. These singularities, being regularized in their own way, determine sufficient conditions for the fredholm of the given problem together with the given boundary conditions.

Giriş

Məlumdur ki, riyazi fizika tənlikləri və xüsusi törəməli tənliklər nəzəriyyəsində əsasən üç tip tənliklər üçün məsələlərin həlli ilə məşğul olurlar. Hiperbolik, parabolik və elliptik tip tənliklər. Hiperbolik və parabolik tip tənliklər üçün Koşi və qarışıq məsələlərə, elliptik tip tənliklər üçün isə sərhəd məsələlərinə baxılmışdır [2-4]. Belə ki, baxılan məsələlərdə başlanğıc şərtlərin sayı verilmiş tənlikdə olan zamana görə törəmənin tərtibi ilə təyin olunduğu halda, sərhəd şərtlərinin sayı tənliyə daxil olan fəza dəyişəninə nəzərən (bunların sayı birdən çox olduqda) yüksək tərtib törəmənin tərtibinin yarısına bərabər götürülür [1; 5]. İkinci tərtib Laplas tənliyi üçün bir şərt Dirixle, Neyman və ya Puankare şərti, dördüncü tərtib olan biharmonik tənlik üçün iki sərhəd şərti verilmiş olur [6; 7]. Burada baxılan Koşi-Riman tənliyi birinci tərtib elliptik tip tənlik olduğundan, onun üçün hansı şəkildə sərhəd şərti verilməlidir ki, məsələ korrekt olsun. Göstərilmişdir ki, qabarıq oblastda sərhəd iki yerə bölünməklə verilmiş qeyri-lokal sərhəd şərti Koşi-Riman tənliyi üçün kifayətdir.Əgər sərhəd dörd yerə bölünmüşdürsə, onda Koşi-Riman tənliyi üçün iki sərhəd şərti vermək lazım gələcəkdir [8].

Məsələnin qoyuluşu

Aşağıdakı məsələyə baxaq:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}+i\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}=0,\quad x=(x_1,x_2)\in D\subset\mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$\alpha_{k1}(t)u(t,0)+\alpha_{k2}(t)u(0,t)+\alpha_{k3}(t)u(1-t,1)+ \\ +\alpha_{k4}(t)u(1,1-t)=\varphi_k(t),\quad k=1,2;\, t\in[0,1], \tag{2}$$

burada $i=\sqrt{-1},\ D=\{x=(x_1,x_2): x_1\in(0,1), x_2\in(0,1)\}, \alpha_{kj}(t),\ k=1,2;\ j=\overline{1,4};$ verilmiş kəsilməz funksiyalar, (2) sərhəd şərtləri isə xətti asılı deyil. Burada Karleman şərti ödənilir [9]. Məlumdur ki, Koşi-Riman tənliyinin fundamental həlli [10]:

$$U(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}\ , \tag{3}$$

funksiyasıdır.

Əsas münasibət

Verilmiş (1) tənliyini (3) fundamental həllinə vurub, D oblastı boyunca inteqrallayaq:

$$\int_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_2}U(x-\xi)\,dx-i\int_D\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}U(x-\xi)dx=0.$$

Ostroqradski-Qauss formulunı tətbiq etsək, alarıq:

$$\int_\Gamma u(x)\,U(x-\xi)\cos dx-\int_D u(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}dx+$$

$$+i\int_\Gamma u(x)U(x-\xi)\cos(\nu,x_1)dx-i\int_D u(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}dx=0,$$

və ya

$$\int_\Gamma u(x)\,U(x-\xi)[\cos(\nu,x_2)+i\cos(\nu,x_1)]dx=$$

$$=\int_D u(x)\left[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}+i\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}\right]dx=$$

$$=\int_D u(x)\delta\,(x-\xi)dx=\begin{cases}u(\xi), & \xi\in D,\\ \frac{1}{2}u(\xi), & \xi\in\Gamma,\end{cases} \tag{4}$$

burada ν - ilə D oblastı olan vahid kvadratın sərhəddinə çəkilmiş xarici normal, $\delta(x)$ ilə Dirakın delta funksiyası işarə edilmişdir. Aldıgımız (4) əsas münasibəti iki hissədən ibarətdir. Birinci hissə ($\xi\in D$ olan hissə) verilmiş (1) tənliyinin D də təyin olunmuş ixtiyari həllini, ikinci hissə isə ($\xi\in\Gamma$ olan hissə) zəruri şərtləri verir.

Bu şərtləri ayıraq:

Zəruri şərtlər

$$\frac{1}{2}u(\xi_1,0)=\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(x_1,0)}{x_1-\xi_1}dx_1-\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(0,x_2)}{x_2-i\xi_1}dx_2+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{u(x_1,1)}{1+i(x_1-\xi_1)}dx_1+\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(1,x_2)}{x_2+i(1-\xi_1)}dx_2,$$
$$\frac{1}{2}u(0,\xi_2)=\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(x_1,0)}{\xi_2-ix_1}dx_1-\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(0,x_2)}{x_2-\xi_2}dx_2+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{u(x_1,1)}{1-\xi_2+ix_1}dx_1+\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(1,x_2)}{x_2-\xi_2+i}dx_2,$$
$$\frac{1}{2}u(\xi_1,1)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{u(x_1,0)}{1-i(x_1-\xi_{1)}}dx_1-\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(0,x_2)}{x_2-1-i\xi_1}dx_2-$$
$$-\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(x_1,1)}{x_1-\xi_1}dx_1+\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(1,x_2)}{x_2-1+i(1-\xi_1)}dx_2,$$
$$\frac{1}{2}u(1,\xi_2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{u(x_1,0)}{\xi_2-i(x_1-1)}dx_1-\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(0,x_2)}{x_2-\xi_2-i}dx_2+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{u(x_1,1)}{1-\xi_2+i(x_1-1)}dx_1+\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(1,x_2)}{x_2-\xi_2}dx_2$$

və ya

$$\begin{cases} u(t,0)=\frac{i}{\pi}\int_0^1\frac{u(\tau,0)}{\tau-t}d\tau-\frac{i}{\pi}\int_0^1\frac{u(0,\tau)}{\tau-it}d\tau+\frac{i}{\pi}\int_0^1\frac{u(1-\tau,1)}{1+i(1-\tau-t)}d\tau+\frac{i}{\pi}\int_0^1\frac{u(1,1-\tau)}{1-\tau+i(1-t)}d\tau, \\ u(0,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{u(\tau,0)}{t-i\tau}d\tau-\frac{i}{\pi}\int_0^1\frac{u(0,\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{u(1-\tau,1)}{1-t+i(1-\tau)}d\tau+\frac{i}{\pi}\int_0^1\frac{u(1,1-\tau)}{1-\tau-t+i}d\tau, \\ u(1-t,1)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{u(\tau,0)}{1-i(\tau-1+t)}d\tau-\frac{i}{\pi}\int_0^1\frac{u(0,\tau)}{\tau-1-i(1-t)}d\tau+\frac{i}{\pi}\int_0^1\frac{u(1-\tau,1)}{\tau-t}d\tau-\frac{i}{\pi}\int_0^1\frac{u(1,1-\tau)}{\tau-it}d\tau, \\ u(1,1-t)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{u(\tau,0)}{1-t-i(\tau-1)}d\tau-\frac{i}{\pi}\int_0^1\frac{u(0,\tau)}{\tau-1+t-i}d\tau+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{u(1-\tau,1)}{t-i\tau}d\tau-\frac{i}{\pi}\int_0^1\frac{u(1,1-\tau)}{\tau-t}d\tau, \end{cases} \tag{5}$$

Zəruri şərtlər üçün alınan (5) münasibətindən görünür ki,onlara sinqulyar hədlər daxildir.

Zəruri şərtlərin requlyarizasiyası

Aldığımız (5) zəruri şərtlərindən aşağıdakı xətti kombinasiyanı quraq:

$$\alpha_{k1}(t)u(t,0)-\alpha_{k2}(t)u(0,t)+\alpha_{k3}(t)u(1-t,1)-\alpha_{k4}(t)u(1,1-t)=$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{i}{\pi}\int_0^1 \frac{\alpha_{k1}(t)u(\tau,0)+\alpha_{k2}(t)u(0,\tau)+\alpha_{k3}(t)u(1-\tau,1)+\alpha_{k4}(t)u(1,1-\tau)d\tau}{\tau-t}+ \\
&+\cdots = \frac{i}{\pi}\int_0^1 \frac{d\tau}{\tau-t}\{\left[\left(\alpha_{k1}(t)-\alpha_{k1}(\tau)\right)+\alpha_{k1}(\tau)\right]u(\tau,0)+ \\
&+\left[\left(\alpha_{k2}(t)-\alpha_{k2}(\tau)\right)+\alpha_{k2}(\tau)\right]u(0,\tau)+ \\
&+\left[\left(\alpha_{k3}(t)-\alpha_{k3}(\tau)\right)+\alpha_{k3}(\tau)\right]u(1-\tau,1)+ \\
&+\left[\left(\alpha_{k4}(t)-\alpha_{k4}(\tau)\right)+\alpha_{k4}(\tau)\right]u(1,1-\tau)+ \\
&+\cdots = \frac{i}{\pi}\int_0^1 \frac{d\tau}{\tau-t}[\alpha_{k1}(\tau)u(\tau,0)+\alpha_{k2}(\tau)u(0,\tau)+\alpha_{k3}(\tau)u(1-\tau,1)+ \\
&+\alpha_{k4}(\tau)u(1,1-\tau)+\ldots = \frac{i}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi_k(\tau)d\tau}{\tau-t}+\ldots, \quad k=1,2,
\end{aligned} \tag{6}
$$

burada (...) ilə sinqulyar olmayan hədlərin cəmi işarə edilmiş və (2) sərhəd şərtindən istifadə edilmişdir. Alınan ifadənin sağ tərəfində yazılmış birinci toplanan sinqulyar inteqraldır. Orada məchul funksiya iştirak etməliyindən, bu inteqral Koşinin baş mənasında mövcuddur. Əgər

$$
\varphi_k(t) \in C^{(1)}[0,1], \ \ \varphi_k(0)=\varphi_k(1)=0, \ \ k=1,2, \tag{7}
$$

şərti ödənilərsə (6) ifadəsinin sağ tərəfində yazılan inteqral adi mənada da mövcud olacaqdır.

Beləliklə aldığımız (6) ifadələri (onlar iki dənədir) requlyardırlar.

Teorem 1. Əgər $\alpha_{kj}(t)$ və $\varphi_k(t)$ funksiyaları $k=1,2$; $j=\overline{1,4}$; $t \in [0,1]$ olduqda kəsilməz funksiyalar olub, (2) sərhəd şərtləri xətti asılı deyilsə və (7) şərti ödənilirsə, onda (6) ifadələri requlyardırlar.

Məsələnin fredholmluğu

İndi isə verilmiş (2) sərhəd şərtlərinə və (6) requlyar ifadələrinə bir sistem kimi baxaq:

$$
\begin{cases}
\alpha_{k1}(t)u(t,0)+\alpha_{k2}(t)u(0,t)+\alpha_{k3}(t)u(1-t,1)+\alpha_{k4}(t)u(1,1-t)=\varphi_k(t), \\
\alpha_{k1}(t)u(t,0)-\alpha_{k2}(t)u(0,t)+\alpha_{k3}(t)u(1-t,1)-\alpha_{k4}(t)u(1,1-t)= \\
\qquad = \frac{i}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi_k(\tau)d\tau}{\tau-t}+\cdots, \ \ k=1,2
\end{cases} \tag{8}
$$

Aldığımız (8) şəklində olan iki münasibətləri tərəf-tərəfə toplayıb, sonra isə çıxmaqla aşagıdakı iki sistemi almış oluruq:

$$\begin{cases} \alpha_{k1}(t)u(t,0) + \alpha_{k3}(t)u(1-t,1) = \dfrac{\varphi_k(t)}{2} + \dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\varphi_k(\tau)}{\tau - t}d\tau + \cdots, \\ \alpha_{k2}(t)u(0,t) + \alpha_{k4}(t)u(1,1-t) = \dfrac{\varphi_k(t)}{2} - \dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\varphi_k(\tau)}{\tau - t}d\tau - \cdots, \ k = 1,2. \end{cases} \tag{9}$$

Bu sistemdən isə:

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{13}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{23}(t) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{10}$$

$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} \alpha_{12}(t) & \alpha_{14}(t) \\ \alpha_{22}(t) & \alpha_{24}(t) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{11}$$

şərtləri daxilində (9) sistemindən

$$u(t,0), u(0,t), u(1-t,1), \ \ və \ \ u(1,1-t) \tag{12}$$

funksiyaları üçün normal şəkilli nüvələri requlyar (nüvələrində sinqulyarlıqlar olmayan) ikinci növ Fredholm tipli inteqral tənliklər sistemi almış oluruq.

Teorem 2. Teorem 1-in şərtləri daxilində əgər (10), (11) şərtləri ödənilirsə, onda Koşi-Riman tənliyi üçün baxılan (1)-(2) sərhəd məsələsi Fredholm tiplidir.

Yəni (1)-(2) məsələsi ikinci növ Fredholm tipli nüvəsində sinqulyarlıq olmayan inteqral tənliklər sisteminə gətirilir.

ƏDƏBİYYAT

1. *Əliyev N.Ə., Zeynalov R.M.* Koşi-Riman tənliyi üçün Lavrentyev-Bitsadze şərtli Steklov məsələsinin fredholmluğu. ADPU-nun Xəbərləri, Təbiət elmləri bölməsi, Bakı-№1-2012, səh.16-19.
2. *Алиев Н.А., Зейналов И.С.* Представленные решения одной задачи Коши в виде интегрального вычета, ДУ, т1, №9, 1965, стр.1264-1266.
3. *Алиев Н.А., Касимов Ф.А.* Решение смешанной задачи для ограниченной области, ученые записки, Азнефтхим, им. М.Азизбекова, №7, 1978, стр.30-36.
4. *Алиев Н. А., Гулиев А. С.* «Граничная задача для уравнения Лапласа в трехмерном пространстве», изв. АН Азерб.ССР, серия физико - технических и математических наук, №9, 1985, стр.53 – 56.

5. *Aliev, N., Rezapour, Sh., Jahanshahi, M.* A mixed problem for Navier-Stokes System, Mathematica Moravica Journal of University of Kragujevac, Serbia vol. 12-2 (2008), pp. 1- 14.
6. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными,Физмат., 1961, 400 стр.
7. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1958, 544 стр.
8. *Aliyev N.A., Samadova S.* Boundary value problem in square for Cauchy-Riemann equation, Third international scientific conference of young researchers, Baku, Azerbaijan, 17-18 aprel, 2015, pp.141-142.
9. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.

Redaksiyaya daxil olub 28.11.2022