Pedaqoji Universitetin Xəbərləri. Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası – 2023, C. 71, №3, s. 17-21
Transactions of Pedagogical University. Series of mathematics and natural sciences – 2023, V. 71, №3, pp. 17-21

UOT 512

Z.Q.Sadıxov, Ş.Ş.Süleymanova
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
suleymanovasebnem.85@gmail.com

HİLBERT FƏZASINDA VƏ BƏZİ DİGƏR TOPOLOJİ FƏZALARDA KƏSİLMƏZ FUNKSİYALARININ İTERATİV CƏBRLƏRİNİN DOĞURANLAR SİSTEMİ

Açar sözlər: *İterativ cəbrlər, doğuranlar sistemi funksiyaların dekart hasili, Maltsev əməlləri, sonsuz qiymətli məntiq, Hilbert fəzaları, kantor diskantinium*

Bu işdə Kolmoqorovun superpozisiyasi haqqında teorem və Sulipetskinin sonlu qiymətli məntiq cəbri üçün superpozisiyasi haqqında teoreminin müəyyən analoqu isbat olunur. İşdə isbat olunur ki, öz Dekart kvadratına homeomorf olan topoloji fəzalarda elə kəsilməz binar funksiya var ki, o funksiya kəsilməz unar funksiyalar çoxluğu ilə birlikdə Maltsev əməlləri vasitəsilə bütün kəsilməz funksiyaların əmələ gətirdiyi iterativ cəbri doğurur.

З.Г.Садыхов, Ш.Ш.Сулейманова

ОБРАЗУЮЩАЯ СИСТЕМА ИТЕРАТИВНЫХ АЛГЕБР НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ГИЛЬБЕРТОВЫХ И ДРУГИХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ключевые слова: *итеративная алгебра, декартово произведение порождающей систем функций, операции Мальцева, бесконечнозначная логика, Гильбертово пространство, канторов дисконтинуум*

В работе доказывается теорема Колмогорова о суперпозиции и ее аналог теорема о суперпозиции для конечномерной алгебры логики Сулипетского. В работе доказывается существование в топологических пространствах гомеоморфной своему Декартовому квадрату непрерывной бинарной функции, которой вместе со множеством унарных непрерывных функций посредством операций Мальцева порождает итеративную алгебру, образуемую всеми непрерывными функциями.

Z.Q.Sadixov, Sh.Sh.Suleymanova

SYSTEM OF GENERATORS OF ITERATIVE ALGEBRAS OF CONTINUOUS FUNCTIONS IN HILBERT SPACE AND SOME OTHER TOPOLOGICAL SPACES

Keywords: *iterative algebra, cartesian product of the sets of generating, Maltsev operations, infinite-valued logic, Hilbert space, cantor discontinuum*

In article the Kolmogorov superposition theorem and its analog-superposition theorem for Sulipetsky finite-valued algebra of logic are proved. In this paper we prove the existence in topological space of such a continuous binary function homeomorphic to its Cartesian aquare that together with the set of unary continuous functions, using the Maltsev operations generates an interactive algebra farmed by all continuous function.

Tutaq ki, bizə $A \neq \emptyset$ çoxluğu verilib. İxtiyari $n \in \mathbb{N}$ natural ədədi üçün

$$P_A^{(n)} = \{f \ / \ f : A^n \to A\}.$$

Yəni $P_A^{(n)}$ A çoxluğunda bütün n – ar funksiyalar çoxluğudur.

$$P_A = \bigcup_{1 \le n < \aleph_0} P_A^{(n)}$$

olsun. Yəni, $\mathbb{P}_A$ A çoxluğunda təyin olunmuş bütün funksiyalar çoxluğudur.

P_A çoxluğunda A.İ.Maltsev tərəfindən təklif olunmuş 4 (dörd) binar əməl: $\xi, \tau, \Delta, \nabla$ və 1 (bir) binar əməl $*$ onu

$$\mathcal{P}_A =< P_A \,; \xi, \tau, \Delta, \nabla *>$$

iterativ cəbrinə çevirir. A çoxluğu sonlu çoxluq olduqda J Slupeçki və A sonsuz çoxluq olduqda A.İ.Maltsev isbat etmişdir ki, elə
$f \in P_A^{(2)}$ funksiyası var ki,

$$P_A = \left[\{f\} \cup P_A^{(1)}\right]_{\mathcal{P}_A}$$

yəni elə $f : A^2 \to A$ funksiyası var ki, o A- da unar funksiyalar çoxluğu $P_A^{(1)}$ ilə birlikdə $\mathcal{P}_A$ cəbrinin doğuranları sistemi olurlar. Başqa sözlə A elə $f \in P_A^{(2)}$ binar funksiyası var ki, istənilən $g \in P_A$ funksiyasını f funksiyası və unar funksiyaların kompozisiyası şəklində göstərmək olar.

Xüsusi halda A çoxluğunda τ topologiyası verildikdə $\mathbb{A} =< A;\tau >$ topoloji fəzasında bütün kəsilməz funksiyaların çoxluğu $\mathcal{P}_A$ cəbrində altcəbr əmələ gətirir. Yəni, $\mathbb{A}$ topoloji fəzasında bütün finitar kəsilməz funksiyalar çoxluğu

$$C(\mathbb{A}) = \bigcup_{1\leq n<\aleph_0} C^{(n)}(\mathbb{A}),$$

$$C^{(n)}(\mathbb{A}) = C(\mathbb{A}^n, \mathbb{A}).$$

$\mathcal{P}_A$ cəbrində qapalı altçoxluqdur, deməli altcəbr əmələ gətirir.

Maltsev A.A. [1] –də isbat etmişdir ki,

Teorem: Aşağıdakı $\mathbb{A}$ topoloji fəzalar üçün: $\mathbb{D}^\tau$ τ çəkili (sonsuz) diskontinium, sonlu ölçülü $\mathbb{I}^k$ kubu (burada $\mathbb{I} = [0;1]$), sonlu ölçülü tor

$$\mathbb{T}^k = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1}_{k},$$

ümumiləşmiş silindr $\mathbb{T}^k \times \mathbb{I}^l$ üçün

$$\left(\exists f \in C^{(2)}(\mathbb{A})\right)\left[C^{(1)}(A) \cup \{f\}\right]_{\mathcal{P}_A} = C(\mathbb{A}).$$

Bu məsələlər ilə əlaqədar biz ona diqqət elədik ki, topoloji fəzalar ki, bu və bir neçə digər analoji teoremlərdə baxılan əsas çoxluqlarda Abel qrupu strukturu var və binar $f \in C^{(2)}(\mathbb{A})$ funksiyası Abel qrupunun additiv əməli ilə sıx bağlıdır. Buna görə məsələyə bir qədər fərqli yanaşaraq aşağıdakı teoremi isbat etdik.

Teorem: Öz dekart kvadratı ilə homeomorf olan ixtiyari $\mathbb{A} =< A;\tau >$ topoloji fəzasında

$$\left(\exists f \in C^{(2)}(\mathbb{A})\right)\left[C^{(1)}(A) \cup \{f\}\right]_{\mathcal{P}_A} = C(\mathbb{A})$$

olur.

İsbatı: Tutaq ki, $u \in C^{(2)}(\mathbb{A})$ $\mathbb{A}^2$-nin $\mathbb{A}$-ya homeorfizmidir. Onda $u^{-1} \in C(\mathbb{A}, \mathbb{A}^2)$ $u_2 = u$ və $v_2 = u^{-1}$ işarə edək. $n \geq 3$ üçün

$$u_n = u_{n-1} * u_2$$

$$v_n = \left(v_2 \times \underbrace{\mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_A \ldots \times \mathbb{I}_A}_{n-2}\right) \circ v_{n-1}$$

götürək. Burada "$\circ$" işarəsi ilə biz funksiyaların adi kompoziya əməlini işarə etmişik.

Aydındır ki,

$$u_n \in C^{(n)}(\mathbb{A})$$

$$v_n \in C(\mathbb{A}, \mathbb{A}^n)$$

Bütün $n \geq 2$ natural ədədləri üçün olur.

$$v_n{}^\circ u_n = \underbrace{\mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_A \ldots \times \mathbb{I}_A}_{n}$$

olduğunu isbat edək:
$\mathbb{I}_A$ A çoxluğunda eyniyyət funksiyasıdır.Yəni, $\forall x \in A$ üçün $\mathbb{I}_A(x) = x$ olur.

$$v_2{}^\circ u_2 = \mathbb{I}_{A^2} = \mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_A$$

$2 \leq k \leq n-1$ üçün $v_k{}^\circ u_k = \underbrace{\mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_A \ldots \times \mathbb{I}_A}_{k}$ olduğunu fərz edək. İterativ cəbrlərdə " $*$ " binar əməlinin tərifinə görə

$$u_{n-1} * v_2 = u_{n-1}{}^\circ(u_2 \times \mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_A \ldots \times \mathbb{I}_A)$$

olur.

$$v_n{}^\circ u_n = ((v_2 \times \underbrace{\mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_A \ldots \times \mathbb{I}_A)^\circ v_{n-1})}_{n-2}{}^\circ(u_{n-1} * u_2) =$$

$$= ((v_2 \times \underbrace{\mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_A \ldots \times \mathbb{I}_A)^\circ v_{n-1})}_{n-2}{}^\circ \left(u_{n-1}{}^\circ(u_2 \times \underbrace{\mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_A \ldots \times \mathbb{I}_A)}_{n-2} \right) =$$

$$=(v_2 \times \underbrace{\mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_A \ldots \times \mathbb{I}_A)}_{n-2} (v_{n-1}{}^\circ u_{n-1})(u_2 \times \underbrace{\mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_A \ldots \times \mathbb{I}_A)}_{n-2} =$$

$$(v \times \underbrace{\mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_A \ldots \times \mathbb{I}_A}_{n-2})^\circ(u_2 \times \underbrace{\mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_A \ldots \times \mathbb{I}_A}_{n-2} =$$

$$= (v_2 \times u_2) \times \underbrace{\mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_A \ldots \times \mathbb{I}_A)}_{n-2} = (\mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_A) \times$$

$$\times \underbrace{\mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_A \ldots \times \mathbb{I}_A}_{n-2} = \underbrace{\mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_A \ldots \times \mathbb{I}_A}_{n} = \mathbb{I}_{An}$$

Beləliklə, biz aldıq ki, bütün $n \geq 2$ - lər üçün $v_n{}^\circ u_n = \mathbb{I}_{A^n}$.

İxtiyari $n(2 \leq n < \aleph_0)$ üçün $f \in C^{(n)}(\mathbb{A})$ funksiyasını belə yaza bilərik:

$f = f_0 \mathbb{I}_{A^n} = f^\circ v_n{}^\circ u_n = \tilde{f}^\circ u_n$, harada ki, $\tilde{f} = f^\circ v_n$, qurmaya görə isə $\tilde{f} \in C^{(1)}(\mathbb{A})$-dır. Yenə iterativ cəbrin əməlinin tərifinə görə ixtiyari $\varphi,\ h \in P_A^{(1)}$ üçün $\varphi^\circ h = \varphi * h$ olduğundan $u_n \in [\{u_2\}]_{\mathcal{P}_A}$.

Nəticədə $f = \tilde{f} * u_n \left[C^{(1)}(\mathbb{A}) \cup \{u\}\right]_{\mathcal{P}_A}$

Beləliklə aldıq ki, ixtiyari $n \geq 2$ üçün

$$\bigcup_{2 \leq n < \aleph_0} C^{(n)}(\mathbb{A}) \subseteq \left[C^{(1)}(\mathbb{A}) \cup \{u\}\right]_{\mathcal{P}_A}$$

Bu isə $C^{(1)}(\mathbb{A}) \subseteq \left[C^{(1)}(\mathbb{A}) \cup \{u\}\right]_{\mathcal{P}_A} = \mathbb{C}(\mathbb{A})$

Trivial fakta görə o deməkdir ki, eyni zamanda $u \in C^{(2)}(\mathbb{A})$ olduğu üçün teorem isbat olundu.

Nəticə. $\mathbb{A}$ topoloji fəzası aşağıdakı fəzalardan biri Hilbert fəzası, Hilbert kubu, Kantor diskontiniumu, ixtiyari τ sonsuz çəkili kub, sonsuz diskret fəza, irrasional ədədlər fəzası (daha başqa topoloji fəzalar da var) olduqda

$$\left(\exists f \in C^{(2)}(\mathbb{A})\right) \left[C^{(1)}(A) \cup \{f\}\right]_{\mathcal{P}_A} = C(\mathbb{A})$$

olur.

ƏDƏBİYYAT

1. *Мальцев А.А.* Топологический вариант теорема Слупецкого для некоторых компактов. – Докл. АН СССР, 1969, 188, №1, стр 33-36.
2. *Садыхов З.Г.* О конгриенциях и порождающих множествах итеративных алгебр непрерывных функций. Тезисы сообщений XVII Всесоюзной алгебр конф. Част II, 1983, с.

Redaksiyaya daxil olub 16.02.2023