Pedaqoji Universitetin Xəbərləri. Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası – 2022, C. 71, №4, s. 9-15
Transactions of Pedagogical University. Series of mathematics and natural sciences – 2022, V. 71, №4, pp. 9-15

Riyaziyyat və mexanika

UOT 517.984

V.Y.Məstəliyev, Ü.M.İskəndərova
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
vagiftrk1@rambler.ru, uliskenderova88@gmail.com

BİR SİNİF KOMPLEKS ƏMSALLI DİFERENSİAL TƏNLİYİN FUNDAMENTAL HƏLLƏR SİSTEMİNİN ASİMPTOTİKASININ QURULMASININ İNTEQRAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN HƏLLƏRİNİN ASİMPTOTİKASININ QURULMASINA EKVİVALENTLİYİ

Açar sözlər: *ikitərtibli xüsusi törəməli tənlik, qarışıq məsələ, fundamental həllər sistemi, matris, inteqral tənlik, xarakteristik tənlik*

Təqdim olunan işdə bir sinif ikitərtibli kompleks əmsallı adi diferensial tənliyin fundamental həllər sisteminin asimptotikasının qurulması məsələsinin inteqral tənliklər sisteminin həllərinin asimptotikasının qurulması məsələsinə ekvivalentliyi göstərilir. Baxılan tənliyin əsas xüsusiyyətlərindən biri odur ki, tənliyə uyğun Birkhof mənada xarakteristik tənliyin köklərinin arqumentləri sabit deyil. Bu xüsusiyyət diferensial tənliyin fundamental həllər sisteminin asimptotikasının qurulması çətinləşdirir.

В.Ю.Масталиев, У.М.Искендерова

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИКИ СИСТЕМЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПОСТРОЕНИЮ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ключевые слова: *уравнение второго порядка с частными производными, смешанная задача, система фундаментальных решений, матрица, интегральное уравнение, характеристическое уравнение*

В рассматриваемой работе исследовано эквивалентность задачи построения асимптотики системы фундаментальных решений, одного класса обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с комплексными коэффициентами задаче построения асимптотики решений системы интегральных уравнений. Одной из основных особенностей рассматриваемого уравнения заключается в том, что аргументы корней характеристического уравнения в смысле Биркгофа, соответствующие уравнению, непостоянны. Эта особенность затрудняет построение асимптотики системы фундаментальных решений дифференциального уравнения.

V.Y.Mastaliev, U.M.Iskandarova

EQUIVALENCE OF CONSTRUCTING THE ASYMPTOTICS OF THE SYSTEM OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF A CLASS COMPLEX COEFFICIENT DIFFERENTIAL EQUATION TO CONSTRUCTING THE ASYMPTOTICS OF THE SOLUTIONS OF THE SYSTEM OF INTEGRAL EQUATIONS

Keywords: *second-order partial derivative differential equation, mixed problem, system of fundamental solutions, matrix, integral equation, characteristic equation*

The presented work shows the equivalence of the problem of establishing the asymptotics of the system of fundamental solutions of a class of two-order complex coefficient ordinary differential equations to the problem of establishing the asymptotics of the solutions of the system of integral equations. One of the main features of the considered equation is that the arguments of the roots of the characteristic equation in the Birkhof sense corresponding to the equation are not constant. This feature makes it difficult to establish the asymptotics of the system of fundamental solutions of the differential equation.

Təqdim olunan işdə

$$y'' - \lambda^2 \left(\frac{x+b}{x+c} \right)^2 y = 0, \qquad x \in [0;1] \tag{1}$$

tənliyinin fundamental həllər sisteminin asimptotikasının qurulması öyrənilir. Burada $\lambda,\ b, c$ kompleks ədədlər, $y(x)$ isə axtarılan funksiyadır.

Tənlikdə

$$y_1 = y, \ \frac{dy_1}{dx} = \lambda y_2 \tag{2}$$

işarələməsi aparaq və bu işarələməni (1) tənliyində nəzərə alaq. Bu halda,

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \lambda y_2{}'$$

olduğundan (1) tənliyi aşağıdakı şəklə gələr:

$$\lambda y_2{}' - \lambda^2 \left(\frac{x+b}{x+c} \right)^2 y_1 = 0$$

Beləliklə, (1) tənliyinin fundamental həllər sisteminin tapılması məsələsi

$$\begin{cases} y_2{}' = \lambda \left(\dfrac{x+b}{x+c} \right)^2 y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = \lambda y_2 \end{cases} \tag{3}$$

şəkilli birtərtibli sistemin həllinin tapılmasına gətirilir. Bu sistemi matris şəklində aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\frac{dY}{dx} = \lambda AY \tag{4}$$

Burada,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \left(\frac{x+b}{x+c}\right)^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{və} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

işarə edilib. (4) matris tənliyinin həllini

$$Y = B(x)\left[E + \frac{1}{\lambda}S(x)\right]z(x) \tag{5}$$

şəklində axtaraq. Burada $z(x)$ yeni məchul funksiyadır. Həllin (5) şəklindən (4) tənliyində iştirak edən tərtibə qədər törəmə alsaq,

$$\frac{dy}{dx} = B'\left(E + \frac{1}{\lambda}S\right)z + Bz\left(E + \frac{1}{\lambda}S\right)' + B\left(E + \frac{1}{\lambda}S\right)z' \tag{6}$$

olduğunu alarıq. Alınmış (5) və (6) funksiyalarını (4) münasibətində nəzərə alsaq, aşağıdakı münasibətlər alınar:

$$B'\left(E + \frac{1}{\lambda}S\right)z + Bz\left(E + \frac{1}{\lambda}S\right)' + B\left(E + \frac{1}{\lambda}S\right)z' = \lambda AB\left(E + \frac{1}{\lambda}S\right)z$$

$$B\left(E + \frac{1}{\lambda}S\right)z' = \lambda AB\left(E + \frac{1}{\lambda}S\right)z - B'\left(E + \frac{1}{\lambda}S\right)z - Bz\left(E + \frac{1}{\lambda}S\right)'$$

$$B\left(E + \frac{1}{\lambda}S\right)z' = \lambda AB\left(E + \frac{1}{\lambda}S\right)z - B'\left(E + \frac{1}{\lambda}S\right)z - \frac{1}{\lambda}BzS' \quad (*)$$

Burada,

$$B\left(E + \frac{1}{\lambda}S\right)z' = \lambda AB\left(E + \frac{1}{\lambda}S\right)z - B'\left(E + \frac{1}{\lambda}S\right)z - Bz\left(E + \frac{1}{\lambda}S\right)'$$

Digər tərəfdən,

$$B^{-1}AB = \theta \quad \text{və} \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1(x) & 0 \\ 0 & \theta_2(x) \end{pmatrix}$$

olduğunu nəzərə alsaq, buradan

$$AB = B\theta \tag{7}$$

münasibətini almış olarıq.
Burada,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

işarə edilmişdir.

(7) bərabərliyində A, B və θ matrislərinin ifadələrini nəzərə almaqla aşağıdakı matris tənliyi alırıq:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \left(\dfrac{x+b}{x+c}\right)^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix}$$

Bu matris tənliyin uyğun elementlərini müqayisə etsək,

$$b_{21} = b_{11}\theta_1, \quad b_{22} = b_{12}\theta_2$$

$$\left(\frac{x+b}{x+c}\right)^2 b_{11} = b_{21}\theta_1$$

$$\left(\frac{x+b}{x+c}\right)^2 b_{12} = b_{22}\theta_2 \text{ və}$$

$$\theta_1 = \frac{x+b}{x+c}, \theta_2 = -\frac{x+b}{x+c}$$

olduğunu alarıq. Beləliklə, B matrisi aşağıdakı şəklə gələr:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \theta_1 b_{11} & \theta_1 b_{12} \end{pmatrix}$$

Digər tərəfdən,

$$\det B = b_{12} b_{11} (\theta_2 - \theta_1) \neq 0$$

və

$$\left(E + \frac{1}{\lambda} S\right)^{-1} = E - \frac{1}{\lambda} S + \frac{\tilde{S}(x,\lambda)}{\lambda^2}$$

olduğunu (*) da nəzərə almaqla bu tənliyi

$$\frac{dz}{dx} = \lambda\left(E - \frac{1}{\lambda} S + \frac{\tilde{S}(x,\lambda)}{\lambda^2}\right)\theta\left(E + \frac{1}{\lambda} S\right) z -$$

$$-\left(E - \frac{1}{\lambda} S + \frac{\tilde{S}(x,\lambda)}{\lambda^2}\right) B^{-1}\left[B'\left(E + \frac{1}{\lambda} S\right) + \frac{1}{\lambda} BS'\right] z$$

şəklinə gətirmiş oluruq. Beləliklə, (*) tənliyi

$$\frac{dz}{dx} = \lambda\theta z\left(-S\theta + \theta S - B^{-1}B'\right) z + \frac{1}{\lambda} Q(x,\lambda) z$$

şəkilli tənliyə gətirilir. Burada

$$\theta S - S\theta - B^{-1}B' = 0,$$

$$\theta S - S\theta = B^{-1}B'$$

$$\theta_i S_{ij} - \theta_j S_{ij} = \left(B^{-1}B'\right)_{ij},$$

$$S_{ij}\left(\theta_i - \theta_j\right) = \left(B^{-1}B'\right)_{ij}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{\theta_i - \theta_j}\left(B^{-1}B'\right)_{ij}, \quad i \neq j$$

$$\left(B^{-1}B'\right)_{ij} =$$

$$= \left[\frac{1}{\det B}\begin{pmatrix} \theta_2 b_{12} & -b_{12} \\ -\theta_1 b_{11} & b_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}' & b_{12}' \\ (\theta_1 b_{11})' & (\theta_2 b_{12})' \end{pmatrix}\right]_{ij} = 0, \; i = j$$

$$\frac{1}{b_{12}b_{11}\left(\theta_2 - \theta_1\right)}\begin{pmatrix} \theta_2 b_{12} & -b_{12} \\ -\theta_1 b_{11} & b_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}' & b_{12}' \\ (\theta_1 b_{11})' & (\theta_2 b_{12})' \end{pmatrix} = 0$$

olduqlarını nəzərə almaqla B matrisinin elementlərini tapmaq üçün aşağıdakı sistemi alırıq:

$$\begin{cases} \theta_2 b_{12} b_{11}' - b_{12}(\theta_1 b_{11})' = 0 \\ \theta_2 b_{12} b_{12}' - b_{12}(\theta_2 b_{12})' = 0 \\ -\theta_1 b_{11} b_{11}' + b_{11}(\theta_1 b_{11})' = 0 \\ -\theta_1 b_{11} b_{12}' + b_{11}(\theta_2 b_{12})' = 0 \end{cases}$$

Buradan isə

$$\begin{cases} \left(\theta_2 b_{12} - b_{12}\theta_1\right) b_{11}' = b_{12}\theta_1' b_{11} \\ \left(-\theta_1 b_{11} + b_{11}\theta_2\right) b_{12}' = b_{11}\theta_2' b_{12} \end{cases}$$

olduğunu alırıq. Bu sistemin hər tərəfini b_{12}-ə bölsək, alarıq ki:

$$\begin{cases} \left(\theta_2 - \theta_1\right) b_{11}' = \theta_1' b_{11} \\ \left(\theta_2 - \theta_1\right) b_{12}' = \theta_2' b_{12} \end{cases}$$

Onda:

$$\begin{cases} \dfrac{b_{11}'}{b_{11}} = \dfrac{\theta_1'}{\theta_2 - \theta_1} \\ \dfrac{b_{12}'}{b_{12}} = \dfrac{\theta_2'}{\theta_2 - \theta_1} \end{cases}$$

Digər tərəfdən, nəzərə alsaq ki,

$$\int_0^x \frac{\theta_1'}{\theta_2-\theta_1}d\xi = -\int_0^x \frac{\frac{\xi+c-\xi-b}{(\xi+c)^2}}{2\frac{\xi+b}{\xi+c}}d\xi = -\frac{1}{2}\int_0^x \frac{c-b}{(\xi+c)^2}\frac{\xi+c}{\xi+b}d\xi =$$

$$= \frac{b-c}{2}\int_0^x \frac{d\xi}{(\xi+c)(\xi+b)} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{\xi+c}-\frac{1}{\xi+b}\right)d\xi = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{x+c}{x+b}-\ln\frac{c}{b}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{b(x+c)}{c(x+b)} = \ln\sqrt{\frac{b(x+c)}{c(x+b)}}$$

bərabərliyi doğrudur. Onda, B matrisinin elementləri üçün

$$b_{11} = c_1\sqrt{\frac{b(x+c)}{c(x+b)}}$$

$$b_{12} = c_2\sqrt{\frac{c(x+b)}{b(x+c)}}$$

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{b(x+c)}{c(x+b)}} & \sqrt{\frac{c(x+b)}{b(x+c)}} \\ \sqrt{\frac{b(x+b)}{c(x+c)}} & -\sqrt{\frac{c(x+b)}{b(x+c)}} \end{pmatrix}$$

$$b_{21} = b_{11}\theta_1 = c_1\sqrt{\frac{b(x+c)}{c(x+b)}}\frac{x+b}{x+c} = c_1\sqrt{\frac{b(x+b)}{c(x+c)}}$$

$$b_{22} = b_{12}\theta_2 = -c_2\sqrt{\frac{c(x+b)}{b(x+c)}}\frac{x+b}{x+c} = -c_2\sqrt{\frac{c(x+b)^3}{b(x+c)^3}}$$

olduğunu alarıq. Beləliklə, bu halda (1) tənliyi

$$\frac{dz}{dx} = \lambda\theta z + \frac{1}{\lambda}Q(x,\lambda)z \qquad (8)$$

şəkilli tənliyə gəlir. Burada,

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{b(x+c)}{c(x+b)}} & \sqrt{\frac{c(x+b)}{b(x+c)}} \\ \sqrt{\frac{b(x+b)}{c(x+c)}} & -\sqrt{\frac{c(x+b)}{b(x+c)}} \end{pmatrix},$$

$$\theta = \begin{pmatrix} \dfrac{x+b}{x+c} & 0 \\ 0 & -\dfrac{x+b}{x+c} \end{pmatrix},$$

$$Q_{ij}(x,\lambda) = (\theta S - S\theta - B^{-1}B')_{ij}, \quad |Q(x,\lambda)| \le C \text{ və } S_{ij} = \frac{1}{\theta_i - \theta_j}\left(B^{-1}B'\right)_{ij}, \quad i \ne j$$

matrislərdir.

(8) tənliyində

$$z = \beta(x,\lambda)e^{\lambda\int_0^x \theta(\xi)d\xi}$$

şəklində əvəzləmə aparsaq, onda (8) tənliyi

$$\frac{d\beta_{s,j}}{dx} = \lambda\left[\theta_s(x)\beta_{s,j}(x,\lambda) - \beta_{s,j}(x,\lambda)\theta_j(x)\right] + \frac{1}{\lambda}Q_{ij}(x,\lambda)\beta_{s,j}(x,\lambda)$$

şəkilli tənliyə gəlir, buradan da aşağıdakı şəkilli inteqral tənliklər sisteminə keçmək olar:

$$\beta_{s,j}(x,\lambda) =$$

$$= e^{\lambda\int_0^x[\theta_s(\eta)-\theta_j(\eta)]d\eta}\left[c_{i,j} + \frac{1}{\lambda}\int_{a_{i,j}}^x e^{-\lambda\int_0^\xi[\theta_s(\eta)-\theta_j(\eta)]d\eta}\sum_{k=1}^2 q_{s,k}(\xi)\beta_{k,j}(\xi,\lambda)d\xi\right], s,j=1,2 \quad (5')$$

Beləliklə, biz aşağıda qeyd olunmuş teoremi isbat etdik:

Teorem: (1) tənliyinin fundamental həllər sisteminin asimptotikasının qurulması məsələsi (5′) şəkilli inteqral tənliklər sisteminin həllərinin asimptotikasının qurulmasına ekvivalentdir.

ƏDƏBİYYAT

1. *Мамедов Ю.А.* О задаче Штурма-Лиувилля в случае комплексной плотности // Bakı Universitetinin xəbərləri, Bakı, 1998, №1, s. 133.
2. *Расулов М.Л.* Метод контурного интеграла // М., "Наука", 1964, 462 с.
3. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // М., "Наука", 1983, 352 с.

Redaksiyaya daxil olub 03.04.2023