

Riyaziyyat və mexanika

UOT 517.956.32

S.S.Haxıyev¹, F.Ş.Əhmədov²
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti¹
Bakı Dövlət Universiteti²
axiyev63@mail.ru

BİR SİNİF MEYL EDƏN ARQUMENTLİ QEYRİ-LOKAL HİPERBOLİK SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNƏ QOŞMA MƏSƏLƏ ANLAYIŞI

DOI: 10.30546/2520-2049.72.2.2024.202

Açar sözlər: sərhəd məsələsi, qeyri-lokal, xətti, hiperbolik, məsələnin operatoru, izomorfizm, qoşma məsələ, qoşma operator

İşdə ikinci tərtib meyl edən argumentli xətti hiperbolik tənliklər sistemində qeyri-lokal sərhəd şərtləri daxilində baxılmışdır. Məsələnin verilənləri üzərinə qoyulmuş bəzi şərtlər daxilində fəzalar arasında izomorfizm anlayışından istifadə edərək verilmiş məsələyə qoşma məsələ anlayışı daxil edilmişdir. Qoşma məsələ öz şəklinə görə integro-cəbri tənliklər sistemi kimi alınmışdır.

С.С.Ахыев, Ф.Ш.Ахмедов

ПОНЯТИЕ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ОТКЛОНЯЮЩИМИСЯ АРГУМЕНТАМИ

Ключевые слова: краевая задача, нелокальная, линейная, гиперболическая, оператор задачи, изоморфизм, сопряженная задача, сопряженный оператор

В работе линейная гиперболическая система второго порядка с отклоняющимися аргументами рассмотрена при линейных нелокальных краевых условиях. При некоторых условиях накладываемых на данные задачи используя понятие изоморфизма между пространствами введено понятие сопряженной задачи. По виду сопряженная задача получена как интегро-алгебраическая система.

THE CONCEPT OF ADJOINT PROBLEM FOR THE NONLOCAL HYPERBOLIC PROBLEM WITH DEVIATING ARGUMENTS

Keywords: boundary-value problem, nonlocal, linear, hyperbolic, operator of problem, isomorphism, adjoint problem, adjoint operator

In the paper linear second-order hyperbolic system with deviating arguments has been considered under linear nonlocal boundary conditions. Under some restrictions on the data of the problem using the concept of isomorphism between spaces there has been gotten the concept of adjoint problem. With respect of view of the adjoint problem is looked like integro-algebraic system.

1. Məsələnin qoyuluşu

İşdə ikinci tərtib meyl edən argumentli

$$\begin{aligned} V_{1,1}z)(t, x) &\equiv z_{tx}(t, x) + z(t, x)A_0(t, x) + z_x(t, x)A_1(t, x) + \\ &+ z_t(t, x)A_2(t, x) + z_x(h_1(t, x), x)B_1(t, x) + z_t(t, h_2(t, x))B_2(t, x) = \\ &= g_3(t, x), \\ (t, x) &\in D = T \times X, \quad T = [t_0, t_1], \quad X = [x_0, x_1], \end{aligned} \quad (1)$$

hiperbolik tənliklər sisteminə

$$V_{1,0}z)(t) \equiv \sum_{j=1}^m [z_t(t, \zeta_j)\alpha_j(t) + z(t, \zeta_j)\beta_j(t)] = g_2(t), \quad t \in T, \quad (2)$$

$$V_{0,1}z)(x) \equiv z_x(0, x) = g_1(x), \quad x \in X, \quad (3)$$

$$V_{0,0}z \equiv z(0, 0) = g_0. \quad (4)$$

qeyri-lokal şərtləri daxilində baxılmışdır [1 – 5].

Burada: $A_0(t, x), A_1(t, x), A_2(t, x), B_1(t, x), B_2(t, x)$ – verilmiş $n \times n$ - ölçülü matrislərdir, belə ki, $A_0 \in L_{p, n \times n}(D)$, yəni elementləri $L_p(D)$ -dəndir, $1 \leq p < \infty$; elə $a_1 \in L_p(T)$, $a_2 \in L_p(X)$, $b_1 \in L_p(T)$, $b_2 \in L_p(X)$ funksiyaları var ki, sanki bütün D – də $\|A_1(t, x)\| \leq a_1(t)$, $\|A_2(t, x)\| \leq a_2(x)$, $\|B_1(t, x)\| \leq b_1(t)$, $\|B_2(t, x)\| \leq b_2(x)$; $h_1(t, x)$ və $h_2(t, x)$ – D -də ölçülən verilmiş funksiyalardır və sanki bütün D -də $h_1(t, x) \in T$ və $h_2(t, x) \in X$; $\alpha_j(t)$ və $\beta_j(t)$, $j = 1, \dots, m$, T –də verilmiş $n \times n$ -ölçülü matrislərdir, belə ki, $\alpha_j \in L_{\infty, n \times n}(T)$ və $\beta_j \in L_{p, n \times n}(T)$; $g_3(t, x)$, $g_2(t)$, $g_1(x)$, g_0 – verilmiş sətir

n –vektorlardır, belə ki, $g_3 \in L_{p,n}(D)$, $g_2 \in L_{p,n}(T)$, $g_1 \in L_{p,n}(X)$; $L_p(D)$, $L_p(T)$, $L_p(X)$ uyğun olaraq D -də, T -də X -də p - integrallanan funksiyalar fəzasıdır; $L_{p,n}(D)$, $L_{p,n}(T)$, $L_{p,n}(X)$ və $L_{p,n \times n}(D)$, $L_{p,n \times n}(T)$, $L_{p,n \times n}(X)$ elementləri uyğun olaraq $L_p(D)$, $L_p(T)$, $L_p(X)$ -dən olan n –ölçülü sətir vektorlar fəzası və $n \times n$ -ölçülü matrislər fəzasıdır: $\zeta_j \in X$, $j = 1, \dots, m$, verilmiş nöqtələrdir.

Baxılan (1)-(4) tipli qeyri-lokal xətti hiperbolik sərhəd məsələsinə müxtəlif tətbiqi işlərdə [6 – 9] və, məsələn, [1 – 5; 10] işlərində rast gəlmək olur. Bu sərhəd məsələsinin həlli olan n –ölçülü $z(t, x)$ vektor-funksiyasını $W_{p,n}(D)$ S.LSobolev fəzasından, yəni özləri və Sobolev mənada ümumiləşmiş z_t, z_x və z_{tx} törəmələri $L_{p,n}(D)$ -dən olan $z(t, x)$ vektor-funksiyaları fəzasından fərz edəcəyik [11]. Doğrudan da (1)-(4) məsələsinin verilənləri üzərinə qoyulan şərtlər daxilində $V_{1,1}, V_{1,0}, V_{0,1}, V_{0,0}$ operatorları $W_{p,n}(D)$ fəzasından uyğun olaraq $L_{p,n}(D)$, $L_{p,n}(T)$, $L_{p,n}(X)$, R^n fəzalarına təsir edirlər.

Sərhəd məsələsini $V = (V_{0,0}, V_{1,0}, V_{0,1}, V_{1,1})$ operatoru vasitəsilə bir operator tənlik şəklində yazmaq olar:

$$Vz = g, \quad z \in W_{p,n}(D), \quad (5)$$

burada $g = (g_0, g_1(x), g_2(t), g_3(t, x))$ dördlüyü $\Omega_{p,n}(D) = R^n \times L_{p,n}(X) \times L_{p,n}(T) \times L_{p,n}(D)$ fəzasının elementidir.

2. Xətti məhdud funksionalların ümumi şəkli

Qeyd edək ki, $Nz = (z(t_0, x_0), z_x(t_0, x), z_t(t, x_0), z_{tx}(t, x))$ operatoru $W_{p,n}(D)$ fəzasından $\Omega_{p,n}(D)$ fəzasına izomorf qaydada təsir edir [1 – 5; 10]. Doğrudan da bu operator hər bir $z \in W_{p,n}(D)$ vektor funksiyasına $\Omega_{p,n}(D)$ fəzasının yeganə $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1(x), \varphi_2(t), \varphi_3(t, x))$ dördlüyünü qarşı qoyur. Eləcə də, bu operatora görə hər bir $\varphi \in \Omega_{p,n}(D)$ dördlüyü yeganə $z \in W_{p,n}(D)$ vektor-funksiyasına uyğun olur:

$$\begin{aligned} z(t, x) = (N^{-1}\varphi)(t, x) \equiv & \varphi_0 + \int_{x_0}^x \varphi_1(\zeta) d\zeta + \\ & + \int_{t_0}^t \varphi_2(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \varphi_3(\tau, \zeta) d\tau d\zeta, \end{aligned} \quad (6)$$

burada $z(t, x)$ üçün $z(t_0, x_0) = \varphi_0, z_x(t_0, x) = \varphi_1(x), z_t(t, x_0) = \varphi_2(t), z_{tx}(t, x) = \varphi_3(t, x)$. Bu qeyd olunanlara əsasən deyə bilərik ki, $W_{p,n}(D)$ fəzasında təyin olunmuş hər bir xətti məhdud $f(z)$ funksionalı yeganə

$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Omega_{q,n}(D) = R^n \times L_{q,n}(X) \times L_{q,n}(T) \times L_{q,n}(D)$ dördlüyü ilə

$$\begin{aligned} f(z) = & \varphi_0 \lambda'_0 + \int_X \varphi_1(x) \lambda'_1(x) dx + \\ & + \int_T \varphi_2(t) \lambda'_2(t) dt + \iint_D \varphi_3(t, x) \lambda'_3(t, x) dt dx \end{aligned} \quad (7)$$

şəklində göstərilə bilər. Burada

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= z(t_0, x_0), & \varphi_1(x) &= z_x(t_0, x), \\ \varphi_2(t) &= z_t(t, x_0), & \varphi_3(t, x) &= z_{tx}(t, x), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

()' işarəsi transponirə əməliyyatıdır.

Axırıncı (7) ifadəsinə əsasən $\Omega_{q,n}(D)$ fəzasına $W_{p,n}(D)$ -yə qoşma fəza deyə bilərik: $\Omega_{q,n}(D) = W_{p,n}^*(D)$. Həmin (7) ifadəsini $\Omega_{p,n}(D)$ fəzasında təyin olunmuş xətti məhdud funksionalların ümumi şəkli kimi də qəbul etmək olar. Bu mənada $\Omega_{q,n}(D)$ fəzasına həm də $\Omega_{p,n}(D)$ fəzasına qoşma fəza kimi baxa bilərik: $\Omega_{q,n}(D) = \Omega_{p,n}^*(D)$.

3. Qoşma operator və qoşma məsələ

Baxılan (1)-(4) məsələsinin $V = (V_{0,0}, V_{1,0}, V_{0,1}, V_{1,1})$ operatoru $W_{p,n}(D)$ fəzasında təyin olunub və $\Omega_{p,n}(D)$ fəzasına təsir edir. Odur ki, V operatorunun $g = (g_0, g_1, g_2, g_3) \in \Omega_{p,n}(D)$ qiymətləri çoxluğunda təyin olunmuş xətti məhdud f funksionalı $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Omega_{q,n}(D)$ dördlüyü ilə təmsil olunur:

$$\begin{aligned} f(Vz) = & (V_{0,0}z) \lambda'_0 + \int_X (V_{0,1}z) \lambda'_1(x) dx + \int_T (V_{1,0}z) \lambda'_2(t) dt + \\ & + \iint_D (V_{1,1}z)(t, x) \lambda'_3(t, x) dt dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Bu (8) ifadəsi həm də $W_{p,n}(D)$ fəzasında, daha dəqiq, izomorfluğa görə $z(t, x)$ – in $\varphi_0 = z(t_0, x_0)$, $\varphi_1(x) = z_x(t_0, x)$, $\varphi_2(t) = z_t(t, x_0)$, $\varphi_3(t, x) = z_{tx}(t, x)$ elementlərindən təşkil olunmuş $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ dördlüklərinin

$\Omega_{p,n}(D)$ fəzasında təyin olunmuş xətti məhdud funksionaldır. Yəni (8) ifadəsini müəyyən çevirmələrdən sonra aşağıdakı şəkllə gətirmək olar

$$\begin{aligned} f(Vz) &= \varphi_0(W_{0,0}\lambda') + \int_X \varphi_{0,1}(\zeta)(W_{0,1}\lambda')(\zeta)d\zeta + \\ &+ \int_T \varphi_2(\tau)(W_{1,0}\lambda')(\zeta)d\zeta + \iint_D \varphi_3(\tau, \zeta)(W_{1,1}\lambda')(\tau, \zeta)d\tau d\zeta, \end{aligned} \quad (9)$$

harada ki, $W_{0,0}, W_{0,1}, W_{1,0}, W_{1,1}$ operatorları aşağıdakı şəkildə təyin olunur [2 – 5]:

$$\begin{aligned} W_{0,0}\lambda' &= \lambda'_0 + \int_T \sum_{j=1}^m \beta_j(t) \lambda'_2(t)dt + \iint_D A_0(t, x) \lambda'_3(t, x)dtdx, \\ (W_{0,1}\lambda')(\zeta) &= \lambda'_1(\zeta) + \sum_{j=1}^m \theta(\zeta_j - \zeta) \int_T \beta_j(t) \lambda'_2(t)dt + \\ &+ \iint_D \theta(x - \zeta) A_0(t, x) \lambda'_3(t, x)dtdx + \\ &+ \int_T A_1(t, \zeta) \lambda'_3(t, \zeta)dt + \int_T B_1(t, \zeta) \lambda'_3(t, \zeta)dt, \quad \zeta \in X, \\ (W_{1,0}\lambda')(\tau) &= \sum_{j=1}^m \alpha_j(\tau) \lambda'_2(\tau) + \int_T \theta(t - \tau) \sum_{j=1}^m \beta_j(t) \lambda'_2(t)dt + \\ &+ \iint_D \theta(t - \tau) A_0(t, x) \lambda'_3(t, x)dtdx + \int_X A_2(\tau, x) \lambda'_3(\tau, x)dx + \\ &+ \int_X B_2(\tau, x) \lambda'_3(\tau, x)dx, \quad \tau \in T, \\ (W_{1,1}\lambda')(\tau, \zeta) &= \sum_{j=1}^m \theta(\zeta_j - \zeta) \alpha_j(\tau) \lambda'_2(\tau) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_T \theta(t - \tau) \sum_{j=1}^m \theta(\zeta_j - \zeta) \beta_j(t) \lambda'_2(t) dt + \\
 & + \lambda'_3(\tau, \zeta) + \iint_D \theta(t - \tau) \theta(x - \zeta) A_0(t, x) \lambda'_3(t, x) dt dx + \\
 & + \int_T \theta(t - \tau) A_1(t, \zeta) \lambda'_3(t, \zeta) dt + \\
 & + \int_X \theta(x - \zeta) A_2(\tau, x) \lambda'_3(\tau, x) dx + \int_T \theta(h_1(\tau, \zeta) - \tau) B_1(t, \zeta) \lambda'_3(t, \zeta) dt + \\
 & + \int_X \theta(h_2(\tau, x) - \zeta) B_1(\tau, x) \lambda'_3(\tau, x) dx + \int_T \varphi_2(\tau) (W_{1,0} \lambda')(\zeta) d\zeta + \\
 & + \iint_D \varphi_3(\tau, \zeta) (W_{1,1} \lambda')(\tau, \zeta) d\tau d\zeta, \quad (\tau, \zeta) \in D. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Burada, λ' transponirə olunmuş $\lambda'_0, \lambda'_1(\zeta), \lambda'_2(\tau), \lambda'_3(\tau, \zeta)$ sütun vektorları dördlüyünün işarəsidir, yəni $\lambda' = (\lambda'_0, \lambda'_1(\zeta), \lambda'_2(\tau), \lambda'_3(\tau, \zeta))$ və $\theta(t)$ Hevisayd funksiyasıdır. Bu operatorların (10) ifadələrinə görə aydındır ki, $W_{0,0}, W_{0,1}, W_{1,0}, W_{1,1}$ operatorlarının qiymətləri n – ölçülü sütun vektorlardır.

Bu qaydada təyin olunmuş, yəni (10) ifadələri ilə verilən $W = (W_{0,0}, W_{0,1}, W_{1,0}, W_{1,1})$ operatoruna V operatorunun qoşma operatoru deyəcəyik: $W = V^*$, [1 – 5; 12].

Buna uyğun olaraq

$$\begin{aligned}
 W_{0,0} \lambda' &= \gamma'_0, \\
 (W_{0,1} \lambda')(\zeta) &= \gamma'_1(\zeta), \quad \zeta \in X, \\
 (W_{1,0} \lambda')(\tau) &= \gamma'_2(\tau), \quad \tau \in T; \\
 (W_{1,1} \lambda')(\tau, \zeta) &= \gamma'_3(\tau, \zeta) \quad (\tau, \zeta) \in D \tag{11}
 \end{aligned}$$

sisteminə (1)-(4) məsələsinə qoşma məsələ deyəcəyik [1 – 5; 12]. Qeyd edək ki, (10) ifadələrinə əsasən (11) məsələsi integro-cəbri tənliklər sistemidir və ona qoşma W operatoru $\Omega_{q,n}(D)$ fəzasında təsir edir. Belə ki, $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in$

$\Omega_{q,n}(D)$ hesab edəcəyik, yəni $\gamma_0 \in R^n$, $\gamma_1 \in L_{q,n}(X)$, $\gamma_2 \in L_{q,n}(T)$, $\gamma_3 \in L_{q,n}(D)$ sağ tərəfləri hər hansı n – ölçülü sətir vektorlardır.

ƏDƏBİYYAT

1. *Ахиев С.С.* Представления решений некоторых линейных операторных уравнений. - ДАН СССР, 1980, т.251, №5, с.1037-1040.
2. *Ахмедов Ф.Ш.* Оптимизация гиперболических систем при нелокальных краевых условиях Бицадзе-Самарского.- ДАН СССР, 1985, т.283, №4, с.787-791.
3. *Orucoglu K., Akhiev S.S.* The Riemann function for the third order onedimensional pseudoparabolic equation, Acta Appl. Math. 53(1998), No 3, p. 353-370.
4. *Ахмедов Ф.Ш., Ахыев С.С.* Об одной линейной нелокальной краевой задаче для гиперболического уравнения. Ученые записки АзТУ, серия фундаментальных наук. 2010, т.IX(35), №3, с.37-40.
5. *Ахыев С.С.* Понятие сопряженной задачи для линейных гиперболических контактно- краевых задач. Доклады НАН Азербайджана, 2001, т.LVII, №4-6, с.40-44.
6. *Егоров А.И.* Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами.-Авт. и тел., 1964, т.25, №5, с.613-623.
7. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами.- М.: Наука, 1978, 463с.
8. *Чудновский Ф.Ф.* Теплофизика почв.- М.: Наука, 1976, 352с.
9. *Нахушев А.М.* Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения влагопереноса.- Дифференц. уравнения, 1980, т.16, №9, с. 1643-1649.
10. *Ахыев С.С.* О некоторых вопросах оптимизации систем линейных гиперболических уравнений второго порядка с разрывными решениями и нелокальными краевыми условиями. Деп. в АЗНИИНТИ, №1860-Аз от 22.07.92г., №11(253), 37с.
11. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, (1962), 256 с.
12. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физ-матгиз, 1959, 684с.

Redaksiyaya daxil olub 11.12.2023