UOT 517.947

SONLU PARÇADA DÖRDTƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN FREDHOLM MƏNADA HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

EYVAZLI GÜNEL MÜBARİZ qızı
Sumqayıt Dövlət Universiteti, dissertant
aliyevagunel193@mail.ru

Açar sözlər: *operator, operator-diferensial tənlik, sərhəd məsələsi, öz-özünə qoşma operator, tamam kəsilməz operator, aralıq törəmə operatorları.*

Məsələnin qoyuluşu. $H-$ Separabel Hilbert fəzasında aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$Mu=\frac{d^4u}{dt}+A^4u+\sum_{j=0}^{3}A_ju^{(j)}+\sum_{k=1}^{3}T_ku^{(k)}=f(t) \tag{1}$$

$$u(0)=u'(0)=0,\quad u(1)=u'(1)=0 \tag{2}$$

Burada $u(t)$ və $f(t)$ $[0,1]$ parçasında sanki hər yerdə təyin olunmuş, qiymətləri H Hilbert fəzasına daxil olan vektor-funksiyalardır. $A-$öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operator, $A_j\left(j=\overline{0,3}\right)$ və $T_k\left(k=\overline{0,3}\right)$ operatorları H fəzasında təsir edən A operatoruna tabe olan və müəyyən əlavə şərtləri ödəyən xətti operatorlardır. $A_j=0\ \left(j=\overline{0,3}\right)$, $T_k=0\left(k=\overline{0,3}\right)$ olduqda baxılan məsələnin requlyar həll olunması məsələsi [9],[10] işlərində müəllif tərəfindən öyrənilmişdir. $T_k=0\left(k=\overline{0,3}\right)$ olduqda baxılan məsələnin requlyar həll olunması məsələsi [11] işində araşdırılmışdır. Həmin məsələnin həllində aralıq törəmə operatorlarının norması üçün alınmış qiymətləndirmələrdən istifadə olunmuşdur. Qeyd edək ki, operator-diferensial tənliklərin həll olunması məsələlərinə $[1]-[8]$ məqalələrində müxtəlif operator-diferensial tənliklər üçün baxılmışdır.

Təqdim olunan məqalədə (1) tənliyinin bütün əmsallarının sıfır operatordan fərqli olduğu hallarda Fredholm mənada həll olunması məsələsi tədqiq edilmişdir. Tənliyin əmsalları üzərinə bəzi şərtlər qoymaqla aşağıdakı teorem isbat edilmişdir.

Əsas nəticələr.

Teorem. Fərz edək ki, (1) tənliyinin əmsalları aşağıda göstərilən şərtləri ödəyir:

1) A operatoru öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən və tamam kəsilməz A^{-1} tərs operatoruna malik operatordur;
2) $B_j=A_jA^{-j}\,(j=\overline{0,3})$ operatorları H fəzasında təsir edən məhdud operatorlardır;
3) $K_m=T_mA^{-m}\left(m=\overline{0,3}\right)$ operatorları H fəzasında təsir edən tamam kəsilməz operatorlardır;
4) $h=\sum_{i=0}^{3}c_i\left\|B_{3-i}\right\|<1$ cəbri şərti ödənilir.

Burada $c_i\left(i=\overline{0,3}\right)$ ədədləri A operatoruna uyğun aralıq törəmə operatorlarının normaları ilə təyin olunan sabit ədədlərdir [11]. Onda M operatoru $\overset{0}{W}{}_2^4([0,1];H)$ fəzasını $L_2([0,1];H)$ fəzasına inikas etdirən Fredholm tipli operatordur, yəni (1), (2) sərhəd məsələsi Fredholm mənada həll olunandır.

İsbatı. Tərifə görə (1), (2) məsələsinin Fredholm mənada həll oluna bilən olmasını göstərmək üçün M operatorunun $\dim\ker M = co\dim M < \infty$ şərtini ödəməsini isbat etmək lazımdır.

Bu məqsədlə $\overset{0}{W}{}_2^4([0,1];H)$ fəzasında aşağıdakı operatorları təyin edək:

$$Lu = \frac{d^4u}{dt^4} + A^4u + \sum_{j=0}^{3} A_{3-j}u^{(j)},$$

$$Ku = \sum_{k=0}^{3} T_{3-k}u^{(k)}.$$

Onda $Mu = Lu + Ku$ olar.

[11] işində isbat olunmuş teorem 1-ə görə, L operatoru $\overset{0}{W}{}_2^4([0,1];H)$ fəzasından $L_2([0,1];H)$ fəzasına təsir edən və məhdud L^{-1} tərs operatoruna malik olan operatordur. Göstərək ki, teoremin 3) şərti ödəndikdə $K : \overset{0}{W}{}_2^4([0,1];H) \to L_2([0,1];H)$ operatoru tamam kəsilməz operatordur. Bu məqsədlə istənilən $\varepsilon > 0$ üçün

$$\|Ku\|_{L_2([0,1];H)} \le \varepsilon \|u\|_{\overset{0}{W}{}_2^4([0,1];H)} + \eta(\varepsilon)\|u\|_{L_2([0,1];H)} \tag{3}$$

bərabərsizliyindən istifadə edəcəyik.

İstənilən $u \in \overset{0}{W}{}_2^4([0,1];H)$ üçün $\|u\|_{\overset{0}{W}{}_2^4([0,1];H)} \le c,$ ($c-$ sabit ədəddir) və A^{-1} operatoru tamam kəsilməz olmasından $\overset{0}{W}{}_2^4([0,1];H) \to L_2([0,1];H)$ daxilolmasının kompakt olduğu alınır. Onda elə $u \in \overset{0}{W}{}_2^4([0,1];H)$ ardıcıllığı və $\{u_{n_p}\} \subset \{u_n\}, \|u_{n_p}\|_{\overset{0}{W}{}_2^4([0,1];H)} \le c$ alt ardıcıllığı vardır ki, o $L_2([0,1];H)$ fəzasında yığılan olar. Onda $p,q > N_0$ üçün $\left\|u_{n_p} - u_{n_q}\right\|_{L_2([0,1];H)} \le \delta_1$ olar, burada δ_1 kifayət qədər kiçik ədəddir.

(3) bərabərsizliyindən istifadə etsək alarıq:

$$\left\|Ku_{n_p} - ku_{n_q}\right\|_{L_2([0,1];H)} \le \varepsilon \left\|u_{n_p} - u_{n_q}\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^4([0,1];H)} + \eta(\varepsilon)\left\|u_{n_p} - u_{n_q}\right\|_{L_2([0,1];H)} \le$$

$$\le \varepsilon\left(\left\|u_{n_p}\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^4([0,1];H)} + \left\|u_{n_q}\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^4([0,1];H)}\right) + \eta(\varepsilon)\cdot\delta_1$$

Əgər $n_p, n_q \to \infty$ şərtində limitə keçsək, buradan $\{ku\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllığından $L_2([0,1];H)$ fəzasında yığılan altardıcıllıq ayırmağın mümkün olduğunu alarıq. Ona görə də teoremin doğruluğunu almaq üçün (3) bərabərsizliyini göstərmək lazımdır.

Bu məqsədlə əvvəlcə istənilən $j = \overline{1,4}$ üçün

$$\left\|K_j A^{4-j} \frac{d^j u}{dt^j}\right\|_{L_2([0,1];H)} \le \varepsilon \|u\|_{\overset{0}{W}{}_2^4([0,1];H)} + \eta(\varepsilon)\|u\|_{L_2([0,1];H)}$$

olduğunu göstərək.

$K_j\left(j=\overline{1,4}\right)$ operatorları tamam kəsilməz operatorlar olduğundan istənilən $\varepsilon_1>0$ ədədi üçün $K_j=Q_j+R_j$ ayrılışını yaza bilərik. Burada Q_j sonlu ölçülü operatorlar, R_j isə $\left\|R_j\right\|<\varepsilon$ şərtini ödəyən operatorlardır. Bu halda $Q_j(x)=\sum\limits_{i=1}^{s}\left(x,\varphi_i\right)\varphi_i$, $x,\varphi_i\in H$ yaza bilərik.

İstənilən $j=\overline{1,4}$ üçün aşağıdakı bərabərsizliyi ala bilərik:

$$\left\|R_jA^{4-j}\frac{d^ju}{dt^j}\right\|_{L_2([0,1];H)}\le\left\|R_j\right\|\cdot\left\|A^{4-j}\frac{d^ju}{dt^j}\right\|_{L_2([0,1];H)}\le\varepsilon_1 const\|u\|_{\overset{0}{W}{}_2^4([0,1];H)}$$

Teoremin şərtlərinə görə $A=A^x\ge\mu_0E$ və A^{-1} tamam kəsilməz operator olduğu üçün istənilən $x\in H$ vektorunu

$$Ax=\sum_k\lambda_k\left(x,l_k\right)l_k$$

şəklində göstərə bilərik; burada $Al_k=\lambda_kl_k$, yəni l_k vektorları A operatorunun məxsusi vektorları, λ_k ədədləri isə uyğun məxsusi ədədlərdir. $\left\|l_k\right\|=1,\left(l_n,l_m\right)=0,\ n\ne m$ olduqda.

Bu halda istənilən $\varphi_i\in H$ vektorunu

$$\varphi_i=\sum_{k=1}^{N}\left(\varphi_i,l_k\right)l_k+\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)$$

şəklində göstərmək olar. Burada $\sum\limits_{i=1}^{n}\left\|\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)\right\|<\varepsilon_i$. Nəticədə aralıq törəmə operatorlarının qiymətləndirilməsi haqqında məlum olan nəticələrdən istifadə edərək aşağıdakıları ala bilərik ([11] işinə bax!)

$$\left\|\sum_{i=1}^{N}A^{4-j}\frac{d^ju}{dt^j},\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)\varphi_i\right\|_{L_2([0,1];H)}\le\left\|A^{4-j}\frac{d^ju}{dt^j}\right\|_{L_2([0,1];H)}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left\|\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)\right\|\left\|\psi_i\right\|\le\varepsilon_1 const\|u\|_{\overset{0}{W}{}_2^4([0,1];H)}$$

Digər tərəfdən alarıq:

$$\left\|\sum_{i=1}^{N}\sum_k\left(A^{4-j}\frac{d^ju}{dt^j},l_k\right)\varphi_i\right\|_{L_2([0,1];H)}\le\left\|\sum_{i=1}^{N}\sum_k\left(\frac{d^ju}{dt^j},\lambda_k^{4-j}l_k\right)\varphi_i\right\|_{L_2([0,1];H)}\le$$

$$\le\left\|\frac{d^ju}{dt^j}\right\|\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_k\lambda_k^{4-j}\left\|\varphi_i\right\|\le const\left\|\frac{d^ju}{dt^j}\right\|_{L_2([0,1];H)}$$

[12] monoqrafiyasından məlumdur ki, $\frac{d^ju}{dt^j}\left(j=\overline{1,3}\right)$ aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:

$$\left\|\frac{d^ju}{dt^j}\right\|_{L_2([0,1];H)}\le\varepsilon\|u\|_{\overset{0}{W}{}_2^4([0,1];H)}+\eta(\varepsilon)\|u\|_{L_2([0,1];H)},\ (j=\overline{0,3})$$

Beləliklə, aşağıdakı nəticəyə gəlirik:

$$\left\|\sum_{i=1}^{N}\sum_k\left(A^{4-j}\frac{d^ju}{dt^j},l_k\right)\varphi_i\right\|_{L_2([0,1];H)}\le\varepsilon\|u\|_{\overset{0}{W}{}_2^4([0,1];H)}+\eta(\varepsilon)\|u\|_{L_2([0,1];H)}.$$

Burada isə istənilən $u\in\overset{0}{W}{}_2^4([0,1];H)$ və istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün

$$\|Ku\|_{L_2([0,1];H)}\le\varepsilon\|u\|_{\overset{0}{W}{}_2^3([0,1];H)}+\eta(\varepsilon)\|u\|_{L_2([0,1];H)},\ j$$

olduğu alınır.

$\overset{0}{W}{}_2^3([0,1];H) \to L_2([0,1];H)$ daxilolmasının kompakt olmasına əsasən buradan K operatorunun kompakt operator olduğunu alırıq.

L operatorunu $L = (E + KL^{-1})L$ kimi göstərmək olar. L operatoru məhdud L^{-1} tərs operatoruna malik olduğundan $(E + KL^{-1})$ operatorunu, $L_2([0,1];H)$ fəzasında Fredholm tipli operator olduğunu alırıq. L operatoru izomorfizm olduğundan M operatorunun da Fredholm tipli operator olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

ƏDƏBİYYAT

1. Алиев А.Р. Краевые задачи для одного класса операторно-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // Матем. заметки, 2003, т.74, вып. 6, с.803-814
2. Алиев В.И. Разрешимость краевой задачи с оператором в краевых условиях для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка. // ДАН Аз. ССР, 1981, т.37, № 6, с. 17-21
3. Асланов Г.И. О разрешимости и асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве // Успехи мат. наук, 1993, вып.4, с. 172-173
4. Гасымов М.Г. О краевых задачах для одного класса операторно-дифференциальных уравнений // ДАН СССР, 1977, т. 235, с. 505-508
5. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
6. Мирзоев С.С. Об условиях корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений // ДАН СССР, 1983, т.273, № 2, с. 292-296
7. Mirzoev S.S. On the norms of operators of intermediate derivatives // Transactions of NASA, 2003, v.XIII, № 1, pp. 157-165
8. Шкаликов А.А. Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними / Труды семинара им. И.Г.Петровского, 1983, вып. 14, с.140-224
9. Эйвазлы Г.М. Об однозначной разрешимости краевой задачи для операторно-дифференциального уравнения четвертого порядка в гильбертовом пространстве // Journal of Baku Engineering University. Mathematics and Computer Science, 2018, vol.2, №2, pp. 59-66
10. Эйвазлы Г.М. О разрешимости одной краевой задачи для однородного операторно-дифференциального уравнения четвертого порядка в гильбертовом пространстве // Journal of Contemporary Applied Mathematics. v.9, № 2, 2019. December, ISSN 2222-5498. pp. 57-61

РЕЗЮМЕ

ФРЕДГОЛЬМОВАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

Эйвазлы Г.М.

Ключевые слова: *оператор, операторно-дифференциальные уравнения, краевые условия, самосопряженный оператор, вполне непрерывный оператор, фредгольмовая разрешимость.*

В представленной статье доказывается теорема о фредгольмовой разрешимости некоторых краевых задач для операторно-дифференциального уравнения четвертого порядка на конечном отрезке. Для этой цели используются ранее полученные результаты о регулярной разрешимости краевой задачи для операторно-дифференциального уравнения четвертого порядка с самосопряженными положительно-определенными коэффициентами на конечном отрезке. В доказательстве теоремы важную роль играют оценки нормы операторов промежуточных производных, ранее полученные автором в других работах.

SUMMARY

ON FREDHOLM SOLVABILITY OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FOURTH ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION IN FINITE SEGMENT

Eyvazli G.M.

Key words*: *operator, operator-differential equation, boundary problem, self-adjoint operator, completely continuous operator, operators of intermediate derivatives.

In the paper we prove a theorem on Fredholm solvability of some boundary value problem for a fourth order operator-differential equation on a finite segment. To this end, we use the earlier obtained results on regular solvability of a boundary value problem for a fourth order operator-differential equation with self-adjoint positive-definite coefficients on a finite segment. The estimates of the norms on intermediate derivatives operators obtained earlier by the author in other paper play an important role in proving the theorem.

Daxilolma tarixi: İlkin variant 01.06.2020

Son variant 10.09.2020