УДК 517.444

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РИССА И ЕГО СВОЙСТВА

АХМЕДОВА АЙНУР НОФЕЛ гызы
Сумгаитский государственный университет, dissertant
dissertant.aynur@gmail.com

Ключевые слова: *дискретное преобразование Рисса, пространство Лебега, ограниченность, функция распределения*

Введение. Преобразованием Рисса функции $f \in L_p\left(R^k\right)$, $1 \le p < \infty$ определяется как следующий сингулярный интеграл (см. [1]):

$$\left(R_j f\right)(x) = \gamma_{(k)} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\left\{y \in R^k : |x-y| > \varepsilon\right\}} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{k+1}} f(y) dy, \quad j = 1,2,\ldots,k,$$

где $\gamma_{(k)} = \dfrac{\Gamma((k+1)/2)}{\pi^{(k+1)/2}}$.

Преобразование Рисса является одним из основных операторов гармонического анализа и играет существенную роль в теории эллиптических дифференциальных уравнениях (см. [1-4]).

Из теории сингулярных интегралов (см. [1]) известно, что преобразование Рисса является ограниченным оператором в пространстве $L_p\left(R^k\right)$, $1 < p < \infty$, т.е. если $f \in L_p\left(R^k\right)$, то $R_j f \in L_p\left(R^k\right)$ и имеет место неравенство

$$\left\|R_j f\right\|_{L_p} \le C_p \|f\|_{L_p}. \tag{1.1}$$

В случае $f \in L_1\left(R^k\right)$ имеет место только неравенство слабого типа:

$$m\left\{x \in R^k : \left|\left(R_j f\right)(x)\right| > \lambda\right\} \le \frac{C_1}{\lambda} \|f\|_{L_1}, \qquad \lambda > 0, \tag{1.2}$$

где m-мера Лебега, C_p, C_1 постоянные, не зависящиеся от функции f.

Отметим, что преобразование Рисса функции $f \in L_1\left(R^k\right)$ не является интегрируемым по Лебегу. В работе [5], используя A-интегрирование функций, доказано аналог равенства Рисса для преобразования Рисса функций класса $L_1\left(R^k\right)$.

В работах [1, 6-11] изучена ограниченность преобразования Рисса в функциональных пространствах Соболева, Бесова, Орлича, Компанато, Морри и др. Но дискретный аналог преобразования Рисса не изучен полностью даже в классических пространствах Лебега. В данной работе мы изучаем свойства дискретного преобразования Рисса в дискретных пространствах Лебега.

2. Дискретное преобразование Рисса и его ограниченность в дискретных пространствах Лебега

Обозначим $l_p := l_p\left(Z^k\right)$, $p \ge 1$, класс последовательностей $h = \{h_m\}_{m \in Z^k}$, удовлетворяющих условию

$$\|h\|_{l_p} := \left(\sum_{m \in Z^k} |h_m|^p\right)^{1/p} < \infty,$$

где $Z^k := \left\{m = (m_1,\ldots,m_k):\ m_i \in Z,\ i = \overline{1,k}\right\}$ и Z-множество целых чисел.

Пусть $h=\{h_m\}_{m\in Z^k}\in l_p$, $p\ge 1$. Последовательность $\tilde{R}_j(h)=\{(\tilde{R}_j h)_n\}_{n\in Z^k}$ называется дискретным преобразованием Рисса последовательности h, где

$$\left(\tilde{R}_j h\right)_n=\sum_{m\in Z^k,\ m\neq n}\frac{n_j-m_j}{|n-m|^{k+1}}\cdot h_m,\quad n=\{n_1,\dots,n_k\}\in Z^k.$$

Отметим, что если $h\in l_p$, $1\le p<\infty$, то из неравенства Гельдера следует, что ряд $\sum_{m\in Z^k,\ m\neq n}\frac{n_j-m_j}{|n-m|^{k+1}}\cdot h_m$ абсолютно сходится, и поэтому, дискретное преобразование Рисса последовательности h сходится.

Теорема 2.1. Пусть $1<p<\infty$. Если $h\in l_p$, то $\tilde{R}_j h\in l_p$, и существует постоянная $c_p>0$ такое, то для любого $h\in l_p$ имеет место неравенство

$$\left\|\tilde{R}_j h\right\|_{l_p}\le c_p\cdot\|h\|_{l_p}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Определим функцию $f(x)$ следующим образом: $f(x)=\frac{2^k}{\gamma_{(k)}}\cdot h_n$ при $x\in P(n,1/4)$, $n=\{n_1,\dots,n_k\}\in Z^k$, и $f(x)=0$ в других точках, где $P(n,\delta):=\left\{y\in R^d: |y_i-n_i|<\delta,\ i=\overline{1,k}\right\}$. Из условия $h\in l_p$ следует, что $f\in L_p(R^k)$ и

$$\|f\|_{L_p}=\left(\sum_{n\in Z^k}\int_{P(n,1/4)}\left|\frac{2^k}{\gamma_{(k)}}\cdot h_n\right|^p dy\right)^{1/p}=\frac{2^{k(1-1/p)}}{\gamma_{(k)}}\cdot\|h\|_{l_p}.$$

Тогда в силу неравенства (1.1) получим, что $R_j f\in L_p(R^k)$ и $\left\|R_j f\right\|_{L_p}\le C_p\frac{2^{k(1-1/p)}}{\gamma_{(k)}}\cdot\|h\|_{l_p}$.

Определим функцию $F(x)$ следующим образом: $F(x)=\left(\tilde{R}_j h\right)_n$ при $x\in P(n,1/2)$, $n=\{n_1,\dots,n_k\}\in Z^k$

Пусть $G(x)=(R_j f)(x)-F(x)$. Сначала докажем, что $G(x)\in L_p(R^d)$. Для любого $x=(x_1,\dots,x_k)\in P(n,1/2)$, $|x_i-n_i|\neq 1/4$, $i=\overline{1,k}$, $n=\{n_1,\dots,n_k\}\in Z^k$, имеем

$$G(x)=\gamma_{(k)}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\{y\in R^k:|x-y|>\varepsilon\}}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{k+1}}f(y)dy-\left(\tilde{R}_j h\right)_n=$$

$$=\sum_{m\in Z^k,\ m\neq n}2^k h_m\int_{P(m,1/4)}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{k+1}}dy+2^k h_n\int_{P(n,1/4)}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{k+1}}dy-\sum_{m\in Z^k,\ m\neq n}\frac{n_j-m_j}{|n-m|^{k+1}}\cdot h_m=$$

$$=\sum_{m\in Z^k,\ m\neq n}2^k h_m\int_{P(m,1/4)}\left(\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{k+1}}-\frac{n_j-m_j}{|n-m|^{k+1}}\right)dy+2^k h_n\int_{P(n,1/4)}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{k+1}}dy=$$

$$=G_1(x)+G_2(x), \tag{2.2}$$

где $\int_{P(n,1/4)}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{k+1}}dy:=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{P(n,1/4)\setminus U(x;\varepsilon)}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{k+1}}dy$ и $U(x;\varepsilon)=\left\{y\in R^k:|x-y|\le\varepsilon\right\}$.

Пусть $m\neq n$. Так как для любых точек $x\in P(n,1/2)$ и $y\in P(m,1/4)$ имеет место неравенство

$$\left|x_j-y_j\right|\le|x-y|\le|n-m|+3/4,\quad |x-y|\ge|n-m|-3/4,$$

то имеем

$$\left|\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{k+1}}-\frac{n_j-m_j}{|n-m|^{k+1}}\right|\le\left|\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{k+1}}-\frac{x_j-y_j}{|n-m|^{k+1}}\right|+\left|\frac{x_j-y_j}{|n-m|^{k+1}}-\frac{n_j-m_j}{|n-m|^{k+1}}\right|\le$$

$$\le |x_j-y_j|\cdot\big\| |n-m|-|x-y| \big\|\cdot\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{|x-y|^i|n-m|^{k+2-i}}+\frac{|x_j-n_j|+|y_j-m_j|}{|n-m|^{k+1}}\le$$

$$\le\left||n-m|+\frac{3}{4}\right|\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{k+1}{\left(|n-m|-3/4\right)^{k+1}\cdot|n-m|}+\frac{3/4}{|n-m|^{k+1}}\le\frac{6(k+1)4^k+1}{|n-m|^{k+1}}.$$

Следовательно, для любого $x\in P(n,1/2)$

$$|G_1(x)|\le\sum_{m\in Z^k,\ m\ne n}2^k|h_m|\int\limits_{P(m,1/4)}\left|\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{k+1}}-\frac{n_j-m_j}{|n-m|^{k+1}}\right|dy\le\sum_{m\in Z^k,\ m\ne n}\frac{6(k+1)4^k+1}{|n-m|^{k+1}}\cdot|h_m|. \tag{2.3}$$

Отсюда с учетом неравенства Гельдера имеем

$$\|G_1\|_{L_p}=\left(\sum_{n\in Z^k}\int\limits_{P(n,1/2)}|G_1(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\le\left(6(k+1)4^k+1\right)\left(\sum_{n\in Z^k}\left[\sum_{m\in Z^k,\ m\ne n}\frac{|h_m|}{|n-m|^{k+1}}\right]^p\right)^{1/p}\le$$

$$\le\left(6(k+1)4^k+1\right)\left(\sum_{n\in Z^k}\left[\sum_{m\in Z^k,\ m\ne n}\frac{|h_m|^p}{|n-m|^{d+1}}\right]\cdot\left[\sum_{m\in Z^k,\ m\ne n}\frac{1}{|n-m|^{k+1}}\right]^{p-1}\right)^{1/p}=$$

$$=\left(6(k+1)4^k+1\right)\theta_0^{1-1/p}\left(\sum_{n\in Z^k}\left[\sum_{m\in Z^k,\ m\ne n}\frac{|h_m|^p}{|n-m|^{k+1}}\right]\right)^{1/p}=$$

$$=\left(6(k+1)4^k+1\right)\theta_0^{1-1/p}\left(\sum_{m\in Z^k}|h_m|^p\sum_{n\in Z^k,\,n\ne m}\frac{1}{|n-m|^{k+1}}\right)^{1/p}=\left(6(k+1)4^k+1\right)\theta_0\|h\|_{l_p}, \tag{2.4}$$

где $\theta_0=\sum_{n\in Z^k,\,n\ne0}\frac{1}{|n|^{k+1}}$.

Теперь покажем, что $G_2\in L_p(R^k)$. Если $x=(x_1,...,x_k)\in P(n,1/2)$, $|x_i-n_i|\ne1/4$, $i=\overline{1,k}$, $n=\{n_1,...,n_k\}\in Z^k$, то

$$|G_2(x)|=2^k|h_n|\left|\int\limits_{P(n,1/4)}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{k+1}}dy\right|\le$$

$$\le2^k|h_n|\int\limits_{U(x,2)\setminus U(x,\rho(x))}\frac{dy}{|x-y|^k}=\frac{2^kk\cdot\pi^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)}|h_n|\cdot\ln\frac{2}{\rho(x)}, \tag{2.5}$$

где $\rho(x)$-расстояние от точки x до границы области $P(n,1/4)$. Следовательно, для любого $n\in Z^k$ имеем

$$\int\limits_{P(n,1/2)}|G_2(x)|^p\,dx\le\left(\frac{2^kk\cdot\pi^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)}|h_n|\right)^p\cdot\int\limits_{P(n,1/2)}\left(\ln\frac{2}{\rho(x)}\right)^p dx\le$$

$$\le\left(\frac{2^kk\cdot\pi^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)}|h_n|\right)^p\cdot2d\int\limits_0^{1/2}\left(\ln\frac{2}{1/2-t}\right)^p dt\le\left(\frac{2^kk\cdot\pi^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)}|h_n|\right)^p\cdot2k\theta_1,$$

где $\theta_1:=\int\limits_0^{1/2}\left(\ln\frac{2}{1/2-y}\right)^p dy$. Отсюда следует неравенство

$$\|G_2\|_{L_p}=\left(\sum_{n\in Z^k}\int\limits_{P(n,1/2)}|G_1(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\le\frac{2^kk\cdot\pi^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)}\cdot(2k\theta_1)^{1/p}\|h\|_{l_p} \tag{2.6}$$

Из неравенств (2.2), (2.4), (2.6) получим, что $G \in L_p(R^k)$.

Так как $F(x) = (R_j f)(x) - G(x)$, то из соотношений $R_j f \in L_p(R^k)$ и $G \in L_p(R^k)$ следует, что $F \in L_p(R^k)$ и $\|F\|_{L_p} \le \left(C_p \dfrac{2^{k(1-1/p)}}{\gamma_{(k)}} + \left(6(k+1)4^k+1\right)\theta_0 + \dfrac{2^k k \cdot \pi^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)} \cdot (2k\theta_1)^{1/p} \right) \|b\|_{l_p}$.

Следовательно

$$\left\|\tilde{R}_j h\right\|_{l_p} = \left(\sum_{n \in Z^k} \left|\tilde{R}_j h_n\right|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{n \in Z^k} \int_{P(n,1/2)} |F(x)|^p dx \right)^{1/p} =$$

$$= \|F\|_{L_p} \le \left(C_p \frac{2^{k(1-1/p)}}{\gamma_{(k)}} + \left(6(k+1)4^k+1\right)\theta_0 + \frac{2^k k \cdot \pi^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)} \cdot (2k\theta_1)^{1/p} \right) \|b\|_{l_p}.$$

Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. Существует число $c_1 > 0$ такое, что для любой последовательности $h \in l_1$ и для любого $\lambda > 0$ имеет место неравенство

$$\left|\left(\tilde{R}_j h\right)(\lambda)\right| \le \frac{c_1}{\lambda} \|h\|_{l_1}, \tag{2.7}$$

где $\left(\tilde{R}_j h\right)(\lambda) = \left|\left\{ n \in Z^k : \left|\left(\tilde{R}_j h\right)_n\right| > \lambda \right\}\right| := \sum_{\left\{n \in Z^k :\, \left|\left(\tilde{R}_j h\right)_n\right| > \lambda\right\}} 1$ - функция распределения дискретного преобразования Рисса последовательности h.

Доказательство. Определим функции $f(x)$, $F(x)$, $G(x)$, $G_1(x)$, $G_2(x)$ как в доказательстве теоремы 2.1. Из условия $h \in l_1$ следует, что $f \in L_1(R^k)$,

$$\|f\|_{L_1} = \sum_{n \in Z^k} \int_{P(n,1/4)} \left| \frac{2^k}{\gamma_{(k)}} h_n \right| dx = \frac{1}{\gamma_{(k)}} \|h\|_{l_1}.$$

Тогда из (1.2) получим

$$m\left\{ x \in R^k : \left|(R_j f)(x)\right| > \lambda \right\} \le \frac{C_1}{\lambda \cdot \gamma_{(k)}} \|h\|_{l_1}, \quad \lambda > 0. \tag{2.8}$$

Из неравенств (2.3) и (2.5) следует, что $G_1 \in L_1(R^k)$, $G_2 \in L_1(R^k)$,

$$\|G_1\|_{L_1} = \int_{R^k} |G_1(x)| dx = \sum_{n \in Z^k} \int_{P(n,1/2)} |G_1(x)| dx \le \left(6(k+1)4^k+1\right) \sum_{n \in Z^k} \sum_{m \in Z^k,\, m \ne n} \frac{|h_m|}{|n-m|^{k+1}} =$$

$$= \left(6(k+1)4^k+1\right) \sum_{m \in Z^k} |h_m| \sum_{n \in Z^k,\, n \ne m} \frac{1}{|n-m|^{k+1}} = \left(6(k+1)4^k+1\right)\theta_0 \|h\|_{l_1}, \tag{2.9}$$

$$\|G_2\|_{L_1} = \int_{R^k} |G_2(x)| dx \le \frac{2^k k \cdot \pi^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)} \cdot \sum_{n \in Z^k} |h_n| \int_{P(n,1/2)} \ln \frac{2}{\rho(x)} dx \le$$

$$\le \frac{2^{k+1} k^2 \cdot \pi^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)} \int_0^{1/2} \ln \frac{2}{1/2 - y} dy \cdot \|h\|_{l_1} = \frac{2^k k^2 \cdot \pi^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)} [\ln 4 + 1] \cdot \|h\|_{l_1}. \tag{2.10}$$

Из (2.2), (2.9), (2.10) получим, что $G \in L_1(R^k)$,

$$\|G\|_{L_1} \le \left[\left(6(k+1)4^k+1\right)\theta_0 + \frac{2^k k^2 \cdot \pi^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)} [\ln 4 + 1] \right] \cdot \|h\|_{l_1}.$$

Тогда в силу неравенства Чебышева имеем

$$m\left\{ x \in R^k : |(G)(x)| > \lambda \right\} \le \frac{1}{\lambda} \left[\left(6(k+1)4^k+1\right)\theta_0 + \frac{2^k k^2 \cdot \pi^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)} [\ln 4 + 1] \right] \|h\|_{l_1}. \tag{2.11}$$

Так как $F(x)=(R_j f)(x)-G(x)$, то из (2.8), (2.10) и (2.11) следует неравенство

$$m\{x\in R^k : |F(x)|>\lambda\}\le m\left\{x\in R^k : |(R_j f)(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}+m\left\{x\in R^k : |G(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}\le$$

$$\le\frac{2}{\lambda}\left[\left(6(k+1)4^k+1\right)\theta_0+\frac{2^k k^2\cdot\pi^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)}[\ln 4+1]+\frac{C_1}{\gamma_{(k)}}\right]\|h\|_{l_1}.$$

Отсюда имеем

$$\left(\tilde{R}_j h\right)(\lambda)=\left|\left\{n\in Z^k : \left|\left(\tilde{R}_j h\right)_n\right|>\lambda\right\}\right|=m\{x\in R^k : |F(x)|>\lambda\}\le$$

$$\le\frac{2}{\lambda}\left[\left(6(k+1)4^k+1\right)\theta_0+\frac{2^k k^2\cdot\pi^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)}[\ln 4+1]+\frac{C_1}{\gamma_{(k)}}\right]\|h\|_{l_1}.$$

Теорема 2.2 доказана.

3. Асимптотическое поведение функции распределения дискретного преобразование Рисса

Теорема 3.1. Пусть $h\in l_1$. Тогда имеет место равенство

$$\lim_{\lambda\to 0+}\lambda\cdot\left(\tilde{R}_j h\right)(\lambda)=d_{(k)}\left|\sum_{n\in Z^k}h_n\right|, \tag{3.1}$$

где $d_{(k)}=\dfrac{2^k}{k\cdot(k-1)!!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}$ и $\left[\dfrac{k-1}{2}\right]$-целая часть числа $\dfrac{k-1}{2}$.

Сначала докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 3.1. Пусть $h\in l_1$ и $\sum\limits_{n\in Z^k}h_n=0$. Тогда имеет место асимптотическое равенство

$$\left(\tilde{R}_j h\right)(\lambda)=o(1/\lambda),\quad \lambda\to 0+. \tag{3.2}$$

Доказательство леммы 3.1. Сначала предположим, что последовательность $h\in l_1$ сосредоточена на некотором шаре $\{x\in R^k : |x|\le p\}$, т.е. $h_n=0$ для $|n|>p$. В этом случае из равенства

$$\left(\tilde{R}_j h\right)_n=\sum_{|m|\le p}\frac{n_j-m_j}{|n-m|^{k+1}}\cdot h_m-\frac{n_j}{|n|^{k+1}}\sum_{|m|\le p}h_m=\sum_{|m|\le p}\frac{(n_j-m_j)\cdot|n|^{k+1}-n_j|n-m|^{k+1}}{|n-m|^{k+1}\cdot|n|^{k+1}}\cdot h_m,\ |n|>m$$

следует, что при достаточно больших значениях n выполняется неравенство

$$\left|\left(\tilde{R}_j h\right)_n\right|\le\frac{(k+1)2^{k+1}}{|n|^{k+1}}\sum_{|m|\le p}|m h_m|,$$

а отсюда вытекает асимптотическое равенство (3.2).

Теперь рассмотрим общий случай. Из условия $\sum\limits_{n\in Z^k}h_n=0$ следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует последовательности $h'=\{h'_n\}_{n\in Z^k}\in l_1$ и $h''=\{h''_n\}_{n\in Z^k}\in l_1$ такие, что $h=h'+h''$, последовательность $h'\in l_1$ сосредоточена на некотором шаре $\{x\in R^k : |x|\le p\}$ и $\sum\limits_{n\in Z^k}h'_n=0$, а последовательность $h''\in l_1$ удовлетворяет неравенству $\sum\limits_{n\in Z^k}|h''_n|<\dfrac{\varepsilon}{4c_1}$, где c_1 константа из неравенства (2.7). Так как последовательность $h'\in l_1$ сосредоточена на шаре $\{x\in R^k : |x|\le p\}$ и $\sum\limits_{n\in Z^k}h'_n=0$, то последовательность $h'\in l_1$ удовлетворяет равенству (3.2), поэтому существует число $\lambda(\varepsilon)>0$ такое, что при $0<\lambda<\lambda(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\lambda\left(\left(\tilde{R}_j h'\right)(\lambda/2)\right) < \varepsilon/2, \tag{3.3}$$

где $\left(\tilde{R}_j h'\right)(\lambda) = \sum_{\left\{n\in Z^k : \left|\left(\tilde{R}_j h'\right)_n\right| > \lambda\right\}} 1$. С другой стороны, из неравенства (2.7) следует, что для любого $\lambda > 0$

$$\lambda\left(\left(\tilde{R}_j h''\right)(\lambda/2)\right) < 2c_1\|h''\|_{l_1} < \varepsilon/2 \tag{3.4}$$

где $\left(\tilde{R}_j h''\right)(\lambda) = \sum_{\left\{n\in Z^k : \left|\left(\tilde{R}_j h''\right)_n\right| > \lambda\right\}} 1$.

В силу включения $\left\{n \in Z_C : \left|\left(\tilde{B}h\right)_n\right| > \lambda\right\} \subset \left\{n \in Z_C : \left|\left(\tilde{B}h'\right)_n\right| > \lambda/2\right\} \cup \left\{n \in Z_C : \left|\left(\tilde{B}h''\right)_n\right| > \lambda/2\right\}$ и неравенств (3.3), (3.4) получим для любого $0 < \lambda < \lambda(\varepsilon)$

$$\lambda \cdot \left(\tilde{R}_j h\right)(\lambda) \le \lambda\left(\left(\tilde{R}_j h'\right)(\lambda/2)\right) + \lambda\left(\left(\tilde{R}_j h''\right)(\lambda/2)\right) < \varepsilon.$$

Это показывает, что равенство (3.2) выполняется для любого $h \in l_1$, удовлетворяющего условию $\sum_{n\in Z^k} h_n = 0$. Лемма 3.1 доказана.

Доказательство теоремы 3.1. В случае $\sum_{n\in Z^k} h_n = 0$ утверждение теоремы следует из леммы 3.1. Рассмотрим случай $\sum_{n\in Z^k} h_n = \alpha \neq 0$. Обозначим $h'_n = h_n$ при $n \neq 0$, $h'_0 = h_0 - \alpha$, и $h''_n = 0$ при $n \neq 0$, $h''_0 = \alpha$. Тогда $h = h' + h''$, где $h' = \{h'_n\}_{n\in Z^k} \in l_1$ and $h'' = \{h''_n\}_{n\in Z^k} \in l_1$. Так как $\sum_{n\in Z^k} h'_n = 0$, то из леммы 3.1 получим

$$\left(\tilde{R}_j h'\right)(\lambda) = o(1/\lambda), \quad \lambda \to 0+. \tag{3.5}$$

Так как $\left(\tilde{R}_j h''\right)_n = \dfrac{\alpha\, n_j}{|n|^{k+1}}$ при $n \neq 0$, $\left(\tilde{R}_j h''\right)_0 = 0$, то

$$\left(\tilde{R}_j h''\right)(\lambda) = \sum_{\left\{n\in Z^k : \left|\left(\tilde{R}_j h''\right)_n\right| > \lambda\right\}} 1 = \sum_{\left\{n\in Z^k : \left|\alpha\, n_j\right| > \lambda |n|^{k+1}\right\}} 1 = \left|\left\{n \in Z^k : \left|\alpha\, n_j\right| > \lambda |n|^{k+1}\right\}\right| \sim$$

$$\sim m\left\{x \in R^k : \left|\alpha\, x_j\right| > \lambda |x|^{k+1}\right\} = \int_{\left\{x\in R^k : \left|\alpha\, x_j\right| > \lambda |x|^{k+1}\right\}} dx = \frac{2^k |\alpha|}{k\lambda \cdot (k-1)!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} = \frac{d_{(k)}|\alpha|}{\lambda}, \quad \lambda \to 0+. \tag{3.6}$$

Для любого $0 < \varepsilon < 1$ из включений

$$\left\{n \in Z^k : \left|\left(\tilde{R}_j h''\right)_n\right| > (1+\varepsilon)\lambda\right\} \setminus \left\{n \in Z^k : \left|\left(\tilde{R}_j h'\right)_n\right| > \varepsilon\lambda\right\} \subset \left\{n \in Z^k : \left|\left(\tilde{R}_j h\right)_n\right| > \lambda\right\} \subset$$

$$\subset \left\{n \in Z^k : \left|\left(\tilde{R}_j h'\right)_n\right| > \varepsilon\lambda\right\} \cup \left\{n \in Z^k : \left|\left(\tilde{R}_j h''\right)_n\right| > (1-\varepsilon)\lambda\right\}$$

и из (3.5), (3.6) получим неравенства

$$\frac{d_{(k)}|\alpha|}{1+\varepsilon} \le \liminf_{\lambda\to 0+} \lambda \cdot \left(\tilde{R}_j h\right)(\lambda) \le \limsup_{\lambda\to 0+} \lambda \cdot \left(\tilde{R}_j h\right)(\lambda) \le \frac{d_{(k)}|\alpha|}{1-\varepsilon}.$$

Отсюда следует равенство (3.1). Теорема 3.1 доказана.

Отметим, что для дискретных преобразований Гильберта и Альфорса-Берлинга аналоги этих теорем доказаны соответственно в работах [12] и [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Stein E.M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton, University Press, 1970.
2. Astala K., Iwaniec T., G.Martin. Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane. Princeton, University Press, 2009.

3. Hofmann S., Mayboroda S., McIntosh A. Second order elliptic operators with complex bounded measurable coefficients in Lp, Sobolev and Hardy spaces // Annales scien. de l'École Norm. Sup., Serie 4, 44:5 (2011), pp.723-800
4. Tumanov A. Commutators of singular integrals, the Bergman projection, and boundary regularity of elliptic equations in the plane // Math. Research Letters, 23:4 (2016), pp.1221-1246
5. Aliyev R.A., Nabiyeva Kh.I. The A-integral and restricted Riesz transform // Constructive Mathematical Analysis, 3:3 (2020), pp.104-112
6. Burenkov V.I. Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces I, II. // Eurasian Math. J. 3 (2012), pp.11–32, 4 (2013), pp.21-45
7. Cao J., Chang D.-Ch., Yang D., Yang S. Riesz transform characterizations of Musielak-Orlicz-Hardy spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), pp.6979-7018
8. Dosso M., Fofana I., Sanogo M. On some subspaces of Morrey-Sobolev spaces and boundedness of Riesz integrals // Annales Polonici Mathematici, 108 (2013), pp.133-153
9. Huang, J. The boundedness of Riesz transforms for Hermite expansions on the Hardy spaces // J. Math. Anal. Appl. 385 (2012), pp.559-571
10. Nazarov F., Tolsa X., Volberg A. The Riesz transform, rectifiability, and removability for Lipschits harmonic functions // Publicacions Matemàtiques, 58:2 (2014), pp.517-532
11. Ruzhansky M., Suragan D., Yessirkegenov N. Hardy–Littlewood, Bessel–Riesz, and fractional integral operators in anisotropic Morrey and Campanato spaces // Fract. Calc. Appl. Anal., 21:3 (2018), pp.577-612
12. Aliyev R.A., Amrahova A. F. Properties of the discrete Hilbert transform // Complex Analysis and Operator Theory, 13:8 (2019), pp.3883-3897
13. Aliyev R.A., Ahmadova A.N. Discrete Ahlfors-Beurling transform and its properties // Probl. Anal. Issues Anal. 9 (27): 2 (2020), pp.3-15

XÜLASƏ

DİSKRET RİSS ÇEVİRMƏSİ VƏ ONUN XASSƏLƏRİ

Əhmədova A.N.

Açar sözlər: *diskret Riss çevirməsi, Lebeq fəzası, məhdudluq, paylanma funksiyası*

Riss çevirməsi klassik Lebeq, Morri, Sobolev, Besov, Kampanato və s. fəzalarında geniş tədqiq olunub. Lakin onun diskret analoqu tam öyrənilməyib. Məqalədə diskret Riss çevirməsinin diskret Lebeq fəzalarında xassələri tədqiq olunur. p dərəcədən cəmlənən ardıcıllıqlar fəzasında diskret Riss çevirməsinin məhdudluğu göstərilir, cəmlənən ardıcıllıqlar fəzasında isə zəif daxilolma münasibətinin ödənildiyi göstərilərək, paylanma funksiyasının asimptotikası verilir.

SUMMARY

DISCRETE RIESZ TRANSFORM AND ITS PROPERTIES

Ahmadova A.N.

Key words: *discrete Riesz transform, Lebesgue spaces, boundedness, distribution function*

The Riesz transform has been well studied on classical Lebesgue, Morrey, Sobolev, Besov, Campanato, etc. spaces. But its discrete version has not been studied. In this paper, we study the properties of the discrete Riesz transform on discrete Lebesgue spaces. In the space of sequences summed by degree p, the boundedness of the discrete Riesz transform is proved, and in the space of the summed sequences, weak inclusion is shown, and asymptotic behavior of distribution function is given.

Daxilolma tarixi:	İlkin variant	18.11.2020
	Son variant	11.12.2020