UOT 517.3

$\mu \to \infty$ ŞƏRTİNDƏ L OPERATORUNUN QRİN FUNKSİYASININ ASİMPTOTİKASI VƏ SPEKTRİNİN DİSKRETLİYİ

BAYRAMOVA NÖVRƏSTƏ SİDQƏLİ qızı
Sumqayıt Dövlət Universiteti, dosent
abdullayev_ayxan@list.ru

Açar sözlər: *L operatoru, Qrin funksiyası, asimptotik qiymətləndirmə, Banax fəzası, Hilbert-Şmidt operatoru.*

Məqalədə

$$l(y)=(-1)^n\left(P(x)y^{(n)}\right)^{(n)}+\sum_{j=2}^{2n}Q_j(x)y^{(2n-j)}+\mu y \qquad (1)$$

diferensial ifadəsi və

$$y^{(\ell_1)}(0)=y^{(\ell_2)}(0)=\ldots=y^{(\ell_n)}(0)=0 \qquad (2)$$

sərhəd şərtləri ilə təyin edilən L operatorunun $G(x,\eta,\mu)$ Qrin funksiyasının $\mu\to\infty$ şərtində asimptotik qiymətləndirməsi tədqiq olunmuşdur. Yuxarıda qeyd edilmiş(1) diferensial ifadəsinin baş hissəsinin əmsalları $"\,\xi"$ nöqtəsində “dondurulduğu” halda, yəni

$$l_1(y)=(-1)^n\left(P(\xi)y^{(n)}\right)^{(n)}+Q(\xi)y+\mu y \qquad (3)$$

diferensial ifadəsi və (2) sərhəd şərtlərinin doğurduğu L_1 operatorunun Qrin funksiyasını öyrənmək olar. Bu halda Qrin funksiyası aşağıdakı düstur vasitəsilə təyin edilir. Həmin ifadə aşağıdakı kimidir:

$$G_1(x,\eta,\xi,\mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{2ni}P^{-\frac{1}{2}}(\xi)\omega_\xi^{1-2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k e^{i\varepsilon_k(x-\eta)}\left[E-e^{2i\varepsilon_k\omega_\xi\eta}\right]P^{-\frac{1}{2}}(\xi), & x\ge\eta\\[2ex] \dfrac{1}{2ni}P^{-\frac{1}{2}}(\xi)\omega_\xi^{1-2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k e^{i\varepsilon_k(\eta-x)}\left[E-e^{2i\varepsilon_k\omega_\xi x}\right]P^{-\frac{1}{2}}(\xi), & x\le\eta\end{cases}$$

$\mathrm{Re}(2i\varepsilon_k\omega_\xi\eta)<0,\ \ \mathrm{Re}(2i\varepsilon_k\omega_\xi x)<0$ olduğu üçün $\mu\to\infty$ şərtində $\left\|e^{i\varepsilon_k\omega_\xi\eta}\right\|\to 0,\ \ \left\|e^{i\varepsilon_k\omega_\xi x}\right\|\to 0$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\begin{aligned}G_1(x,\eta,\xi,\mu)&=\frac{1}{2ni}P^{-\frac{1}{2}}(\xi)\omega_\xi^{1-2n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k e^{i\varepsilon_k\omega_\xi|x-\eta|}P^{-\frac{1}{2}}(\xi)\left[E-r(x,\eta,\xi,\mu)\right]=\\&=g(x,\eta,\xi,\mu)\left[E-r(x,\eta,\xi,\mu)\right]\end{aligned} \qquad (4)$$

olar.

Burada $\mu\to\infty$ şərtində (x,η) dəyişənlərinə nəzərən müntəzəm şəkildə $\left\|r(x,\eta,\mu)\right\|_H=0(1)$ qiymətləndirməsi ödənilir və

$$g(x,\eta,\xi,\mu)=\frac{1}{2ni}P^{-\frac{1}{2}}(\xi)\omega_\xi^{1-2n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k e^{i\varepsilon_k\omega_\xi|x-\eta|}P^{-\frac{1}{2}}(\xi) \qquad (5)$$

funksiyası (3) diferensial ifadəsi ilə düzəlmiş L_1 operatorunun bütün həqiqi oxda Qrin funksiyasıdır.

Levi metodundan istifadə edərək məqalədə L operatorunun baş hissəsinə uyğun

$$l_0(y)=(-1)^n\left(P(x)y^{(n)}\right)^{(n)}+Q(x)y+\mu y \qquad (6)$$

diferensial ifadəsi və (2) sərhəd şərtləri ilə təyin edilən L_0 operatorunun $G(x,\eta,\mu)$ Qrin funksiyası üçün inteqral tənliyi alınmışdır. Bu inteqral tənlik B.M.Levitan tərəfindən daxil edilmiş Banax fəzalarında araşdırılmış, həmin fəzalarda bu tənliyin yeganə həllinin varlığı isbat edilmiş, tənliyin iterasiya üsulu ilə həll oluna bilməsi şərtləri müəyyən edilmişdir. İsbat olunmuş teoremə görə tənliyin həlli üçün $\mu\to\infty$ şərtində (x,η)-ya nəzərən müntəzəm

$$G_0(x,\eta,\mu)=G_1(x,\eta,\mu)[E+\theta(x,\eta,\mu)] \tag{7}$$

asimptotik bərabərliyi alınmışdır. Burada $\mu\to\infty$ şərtində $\|\theta(x,\eta,\mu)\|=0(1)$ ödənilir.

(4) və (7) asimptotik bərabərliklərindən

$$G_0(x,\eta,\mu)=g(x,\eta,\mu)[E+\alpha(x,\eta,\mu)] \tag{8}$$

alınır, belə ki, $\mu\to\infty$ şərtində $\|\alpha(x,\eta,\mu)\|=0(1)$.

İndi isə (1) diferensial ifadəsi və (2) sərhəd şərtləri ilə təyin edilən L operatorunun Qrin funksiyasını tədqiq edək.

L operatorunun $G(x,\eta,\mu)$ Qrin funksiyasını

$$G(x,\eta,\mu)=G_0(x,\eta,\mu)+\int_0^\infty G_0(x,\xi,\mu)\rho(\xi,\eta)d\xi \tag{9}$$

şəklində axtaraq. Burada $G_0(x,\eta,\mu)$ (6) diferensial ifadəsi və (2) sərhəd şərtləri ilə təyin edilən L_0 operatorunun Qrin funksiyasıdır.

$G(x,\eta,\mu)$ funksiyasının (9) ifadəsini

$$(-1)^n\left(P(x)y^{(n)}\right)^{(n)}+\sum_{j=1}^{2n}Q_jy^{(2n-j)}+\mu y=0$$

tənliyində yerinə yazsaq və $G_0(x,\eta,\mu)$ funksiyasının xassələrindən istifadə etsək $\rho(x,\eta)$ funksiyası üçün aşağıdakı tənliyi alınır:

$$\begin{gathered}\rho(x,\eta)+\sum_{j=2}^{2n}Q_j(x)\frac{\partial^{2n-j}G_0(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^{2n-j}}-\\-\sum_{j=2}^{2n-1}Q_j(x)\frac{\partial^{2n-j}G_0(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^{2n-j}}\rho(\xi,\eta)d\xi=0\end{gathered} \tag{10}$$

Bu tənliyin həllini $X_3^{(2)}$ fəzasında araşdıracağıq. Göstərək ki, (10) tənliyinin bu fəzada yeganə həlli vardır və bu həlli iterasiya üsulu ilə almaq olar.

$$F(x,\eta,\mu)=-\sum_{j=2}^{2n-1}Q_j(x)\frac{\partial^{2n-j}G_0(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^{2n-j}}$$

işarə edək. Onda (10) tənliyini

$$\rho(x,\eta)=F(x,\eta,\mu)-\int_0^\infty F(x,\xi,\mu)\rho(\xi,\eta)d\xi \tag{11}$$

Tənlikdən göründüyü kimi, əgər $F(x,\eta,\mu)$ funksiyasında göstərilən $X_1,X_2,X_3^{(P)},X_2^{(S)},X_4^{(S)},X_5$ operator qiymətli funksiyalardan ibarət Banax fəzalarından hər hansı birinə daxil olarsa, onda tənliyin həlli də həmin fəzaya daxil olar.

$\mu\to\infty$ şərtində aşağıdakı asimptotik bərabərliyi almaq olar.

$$\begin{gathered}\frac{\partial^{2n-j}G_0(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^{2n-j}}=\frac{1}{2ni}P^{-\frac{1}{2}}(x)\omega^{1-j}-\sum_{k=1}^{n}(i\varepsilon_k)^{2n-j}e^{i\varepsilon_k\omega|x-\eta|}\cdot P^{-\frac{1}{2}}(x)\times\\\times sign(x-\eta)\cdot(E+\beta(x,\eta,\mu)),\end{gathered} \tag{12}$$

Burada $\|\beta(x,\eta,\mu)\|=0(1)$, $\mu\to\infty$.

(12) bərabərliklərindən istifadə etməklə $\|F(x,\eta,\mu)\|_H$ normasını qiymətləndirək:

$$\|F(x,\eta,\mu)\|_H \le (1+0(1))\left\|\sum_{j=2}^{2n-1} Q_j(x)P^{-\frac{1}{2}}(x)\left[K(x)+\mu P^{-1}(x)\right]^{\frac{1-j}{2n}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=1}^{n}(i\varepsilon_k)^{2n-j}\varepsilon_k e^{i\varepsilon_k\left[K(x)+\mu P^{-1}(x)\right]^{\frac{1}{2n}}}\cdot|x-\eta|\right\| \le (1+0(1))\times$$

$$\times\left\|\sum_{j=2}^{2n-1} Q_j(x)P^{-\frac{1}{2}}(x)\left[K(x)+\mu P^{-1}(x)\right]^{\frac{1-j}{2n}+\varepsilon}\cdot\left[K(x)+\mu P^{-1}(x)\right]^{\varepsilon}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=1}^{n}(i\varepsilon_k)^{2n-j}\varepsilon_k e^{i\varepsilon_k\left[K(x)+\mu P^{-1}(x)\right]^{\frac{1}{2n}}}\cdot|x-\eta|\right\| \le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{n}\left\|\int_1^{\infty}(\lambda+\mu)^{-\varepsilon}\cdot e^{i\varepsilon_k(\lambda+\mu)^{\frac{1}{2n}}|x-\eta|}dE_\lambda(x)\right\| \le C\mu^{-\varepsilon}\cdot e^{-Jm\varepsilon_1|x-\eta|\sqrt[2n]{\mu}}.$$

Buradan $\|F(x,\eta,\mu)\|_H \le C\cdot\mu^{-\varepsilon}\cdot e^{-Jm\varepsilon_1|x-\eta|\sqrt[2n]{\mu}}$

$$\sup_{0<x<\infty}\int_0^{\infty}\|F(x,\eta,\mu)\|_H^2 \le C\cdot\mu^{-2\varepsilon} \tag{13}$$

olduğunu alınır. (13) onu göstərir ki, $F(x,\eta,\mu)$ operator-funksiyası $X_3^{(2)}$ fəzasına daxildir və $\mu\to\infty$ şərtində bu fəzanın normasına görə sıfra yığılır. Ona görə də (11) tənliyinin $X_3^{(2)}$ fəzasında həlli vardır və bu həll yeganədir.

Buradan eyni zamanda alırıq ki, (11) inteqral tənliyinin həlli $\mu\to\infty$ şərtində özünü $F(x,\eta,\mu)$ kimi aparır, yəni

$$\rho(x,\eta)\approx F(x,\eta,\mu),\quad \mu\to\infty.$$

Bu nəticədən eyni zamanda (9) bərabərliyinə daxil olan inteqral operatorun $\mu\to\infty$ şərtində normaya görə sıfra yığılmasını da alırıq.

Nəticədə,

$$G(x,\eta,\mu)=G_0(x,\eta,\mu)(E+\sigma(x,\eta,\mu)) \tag{14}$$

olduğunu alırıq. $\|\sigma(x,\eta,\mu)\|_H = 0(1)$, $\mu\to\infty$ olduqda.

Alınmış son (14) asimptotik düsturundan

$$G(x,\eta,\mu)=\frac{1}{2ni}P^{-\frac{1}{2}}(x)\left[K(x)+\mu P^{-1}(x)\right]^{\frac{1-2n}{2n}}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k e^{i\varepsilon_K\left[K(x)+\mu P^{-1}(x)\right]^{\frac{1}{2n}}|x-\eta|}\left[E+\sigma(x,\eta,\mu)\right]$$

alırıq. (14) asimptotik düsturundan və $G_0(x,\eta,\mu)$ funksiyasının X_2 fəzasına daxil olmasından alınır ki, nüvəsi $G(x,\eta,\mu)$ olan inteqral operator Hilbert-Şmidt tipli operatordur, yəni

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\|G_0(x,\eta,\mu)\|_H^2\,dxd\eta<\infty.$$

Əgər $G(x,\eta,\mu)$ operator-funksiyasının $R_\mu=(L+\mu E)^{-1}$ operatorunun nüvəsi olduğunu nəzərə alsaq, Loperatorunun spektrinin diskret olduğunu almış olarıq.

ƏDƏBİYYAT

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967, 464 с.
2. Курбанова Р.Д. Об асимптотике взвешенного следа оператора Шредингера с операторным коэффициентом // АН Азерб. ССР, Инст. мат. и мех. Деп. ВИНИТИ, №5382-84, Баку, 1984, 37 с.

3. Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздыва-ющим аргументом. М.: Наука, 1965, 354 с.
4. Якубов С.Я. Операторно-дифференциальные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985, 220 с.

РЕЗЮМЕ

АССИМПТОТИКА И ДИСКРЕТНОСТЬ СПЕКТРА ФУНКЦИИ ГРИНА ОПЕРАТОРА *L* ПРИ УСЛОВИИ $\mu \to \infty$

Байрамова Н.С.

Ключевые слова: *оператор L, Функция Грина, ассимптотическая оценка, пространство Банаха, оператор Гильберта-Шмидта*

В представленной работе исследуется функция Грина дифференциального оператора в Гильбертовом пространстве. Показано, что оператор L_1 является функцией Грина на всей числовой оси. Используя метод Леви, было получено интегральное уравнение для функции Грина оператора L_0, определяемого граничными условиями (2), а также дифференциальное выражение (6), соответствующее главной части оператора *L*. Полученное интегральное уравнение исследовано в пространстве Банаха и доказано существование единственного решения этого уравнения. Кроме того, найдены условия для возможности решения данного уравнения методом итераций.

SUMMARY

ASSYMPTOTICS AND DISCRETENESS OF THE SPECTRUM OF THE GREEN'S FUNCTION OF OPERATOR L UNDER CONDITIONS $\mu \to \infty$

Bayramova N.S.

Key words: *operator L, Green's function, asymptotic estimate, Banach space, Hilbert-Schmidt operator.*

In the presented work, the Green's function of a differential operator in the Hilbert space is investigated.It was shown that the operator L_1 is the Green's function on the entire number axis. Using the Levy method, an integral equation was obtained for the Green's function of the operator L_0, determined by the boundary conditions (2), as well as the differential expression (6), corresponding to the principal part of the operator L. The resulting integral equation was investigated in the Banach space and the existence of a unique solution to this equation was proved. In addition, conditions were found for the possibility of solving this equation by the iteration method.

Daxilolma tarixi:	İlkin variant	16.10.2020
	Son variant	09.11.2020