Cild 20 № 4 2020

UOT 517.947

İKİNCİ TƏRTİB XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ ELLİPTİK TİP OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN NEYMAN MƏSƏLƏSİNİN KORREKT HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

HƏTƏMOVA RÖYA FİKRƏT qızı
Sumqayıt Dövlət Universiteti, assistent
hetemova-roya@mail.ru

***Açar sözlər**: operator-diferensial tənlik, Neyman məsələsi, elliptik tip tənlik, Furye çevirməsi, Banax teoremi, öz-özünə qoşma operator, müsbət-müəyyən operator, korrekt həll olunma, Hilbert fəzası, norma, skalyar hasil.*

Təqdim edilmiş işdə xüsusi törəməli elliptik tip ikinci tərtib operator-diferensial tənlik üçün Neyman məsələsinin Hilbert fəzasında korrekt həll olunması məsələsi tədqiq edilmişdir. Qoyulmuş məsələnin həll edilməsi üçün klassik Furye çevirməsi üsulundan istifadə olunmuşdur. Məsələnin həlli verilmiş tənliyə uyğun qurulmuş Sobolev tipli fəzalarda aparılmışdır.

Operator-tənliklər nəzəriyyəsi keçən əsrin ortalarından başlayaraq inkişaf etməyə başlamışdır. Bu nəzəriyyənin əsasları görkəmli riyaziyyatçılar: E.Hille, K.İosida, T.Kato, S.Agmon, P.Laks, Z.İ.Xəlilov və başqaları tərəfindən işlənmişdir. Həmin alimlərin əsərlərində qeyri-məhdud operator əmsallı diferensial tənliklərin Hilbert və Banax fəzalarında həllinin varlığı, yeganəliyi və həllin asimptotik xassələri öyrənilmişdir. Operator-diferensial tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli ilə əlaqəli elmi araşdırmalar S.Q.Kreyn [1], A.A.Dezin [2], V.İ.Qorbaçuk, M.L.Qorbaçuk [3], S.Y.Yakubov [4] və digər alimlərin monoqrafiyalarında şərh olunmuşdur.

Bu istiqamətdə M.G.Qasımov [5], B.Q.Mazya və P.A.Plamenevski [6], Y.A.Dubinski [7], S.S.Mirzəyev [8], A.A.Şkalikov [9], N.İ.Yurçuk [10], H.İ.Aslanov [11], A.R.Əliyev [12] və başqalarının əsərlərini qeyd edə bilərik.

Tutaq ki, $H-$ separabel Hilbert fəzasıdır, $C-$ isə bu fəzada $D(C)$ təyin oblastına malik olan öz-özünə qoşma müsbət müəyyən operatordur. $C^p\,(p\ge 0)$ operatorunun təyinolunma oblastı $(x,y)_{H_p}=\left(C^p x, C^p y\right),\ x,y\in D\left(C^p\right)$ skalyar hasilinə nəzərən Hilbert fəzası təşkil edir. $p=0$ olduqda $H_0=H, (x,y)_{H_0}=(x,y)_H$ olduğunu qəbul edirik.

$R_+^n\{x : x=(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n), x_i\in(-\infty,\infty), i=1,2\ldots n-1, x_n\in R_+=(0,\infty)\}$ işarə edək.

$L_2\left(R_+^n;H\right)$ ilə sanki bütün $x\in R_+^n$ üçün qiymətləri H fəzasına daxil olan bütün $f(x)=f\left(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n\right)$ vektor-funksiyalardan ibarət olan Hilbert fəzasını işarə edək. Bu fəzada elementin norması

$$\|f\|_{L_2\left(R_+^n;H\right)}=\left(\int_{R_+^n}\|f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\|^2 dx_1dx_2\ldots dx_n\right)^{1/2}$$

kimi təyin olunur.

$D\left(R_+^n;H\right)$ ilə R_+^n fəzasında sonsuz diferensiallanan və kompakt daşıyıcıya malik, qiymətləri H_2 fəzasına daxil olan xətti çoxluğu işarə edək. $W_2^2\left(R_+^n;H\right)$ ilə $D\left(R_+^n;H\right)$ çoxluğunun

$$\|u\|_{W_2^2\left(R_n^4;H\right)}=\left(\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k}\right\|^2_{L_2\left(R_+^n;H\right)}+\left\|C^2u\right\|^2_{L_2\left(R_+^n;H\right)}\right)^{1/2}$$

normasına nəzərən tamamlanmasını işarə edək. Analoji üsulla

$$W_{2,\xi}^2\left(R_+^n;H\right)=\left\{v(\xi,x_n):\left(\sum_{k=1}^n|\xi_k|^2+C^n\right)v(\xi,x_n)\in L_2\left(R_+^n;H\right),\frac{\partial^2 v(\xi)}{\partial x_n^2}\in L_2\left(R_+^n;H\right)\right\}$$

Hilbert fəzasını təyin edək. Bu fəzada elementin normasını aşağıdakı qayda ilə təyin edirik:

$$\|v\|_{W_{2,\xi}^2\left(R_+^n;H\right)}=\left\{\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}\right\|_{L_2\left(R_+^n;H\right)}+\sum_{k=1}^{n-1}\left\|\xi_k^2 v(\xi,x_n)\right\|^2_{L_2\left(R_+^n;H\right)}+\left\|C^2 v(\xi,x_n)\right\|^2_{L_2\left(R_+^n;H\right)}\right\}$$

$$\overset{0}{W}{}_{2,\xi}^2\left(R_+^n;H\right)=\left\{v(\xi,x_n):v(\xi,x_n)\in W_{2,\xi}^2\left(R_+^n;H\right),\left.\frac{\partial v(\xi,x_n)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0}=0\right\}$$

Məsələnin qoyuluşu. H fəzasında aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=-\sum_{k=1}^n a_k\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k^2}+C^2u(x)=f(x),\ x\in R_+^n \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0}=0 \tag{2}$$

Burada $(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})\in R^{n-1}$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n)\in R_+^n$, $f(x),u(x)-R_+^n$ – də sanki hər yerdə təyin olunmuş, qiymətləri H fəzasına daxil olan vektor-funksiyalardır, $a_k>0, k=1,2,\dots,n.$

Tərif 1. Əgər $f(x)\in L_2\left(R_+^n;H\right)$ üçün elə $u(x)\in W_2^2\left(R_+^n;H\right)$ varsa ki, (1) tənliyini R_+^n – də sanki hər yerdə ödəsin, onda $u(x)$ tənliyin requlyar həlli adlanır.

Tərif 2. Əgər istənilən $f(x)\in L_2\left(R_+^n;H\right)$ (1) tənliyinin requlyar həlli varsa, bu həll (2) sərhəd şərtini $\lim\limits_{x_n\to+0}\left\|\frac{\partial u(x_1,x_2,\dots x_n)}{\partial x_n}\right\|_{H_{1/2}}=0$ mənada ödəyirsə və

$$\|u\|_{W_2^2\left(R_+^n;H\right)}\le const\cdot\|f\|_{L_2\left(R_+^n;H\right)}$$

qiymətləndirməsi doğru olarsa, onda (1), (2) sərhəd məsələsi korrekt həll olunan adlanır.

Verilmiş (1), (2) sərhəd məsələsini aşağıdakı formada yazaq:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=-a_n\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}+\left(-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}+C^2u\right)=f(x) \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u(x_1,x_2,\dots x_n)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0}=0 \tag{4}$$

$f(x_1,\dots x_{n-1},x_n)$ vektor-funksiyanın $x_1,x_2,\dots x_{n-1}$ dəyişənlərinə görə Furye çevirməsini $\hat f(\xi,\dots\xi_{n-1},x_n)$ kimi işarə edək:

$$\hat f(\xi,\dots\xi_{n-1},x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_{R^{n-1}}f(x_1,\dots x_{n-1},x_n)e^{-i(x_1\xi_1+\dots+x_{n-1},\xi_{n-1})}dx_1\dots dx_{n-1}$$

Onda (3), (4) məsələsinə Furye çevirməsini tətbiq etsək, nəticədə alarıq:

$$\hat L\hat u(\xi,x_n)=-a_n\frac{\partial^2\hat u}{\partial x_n^2}+\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_k^2\xi_k E+C^2\right)\hat u(\xi,x_n)=\hat f(\xi,x_n) \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial\hat u(\xi\dots\xi_{n-1},x_n)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0}=0 \tag{6}$$

Burada $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})\in R^{n-1}, x_n\in R_+=(0,\infty)$,

$$\hat{u}(\xi,x_n)=\hat{u}(\xi_1,\dots,\xi_{n-1},x_n)=\frac{1}{(2\pi)\frac{n-1}{2}}\int_{R^{n-1}}u(x_1,\dots x_{n-1},x_n)e^{-i(x_1\xi_1+\dots+x_{n-1},\xi_{n-1})}dx_1\dots dx_{n-1} \quad (7)$$

$B(\xi)=\sum_{k=1}^{n-1}a_k\xi_k^2E+C^2$ işarə edək.

İstənilən $\xi\in R^{n-1}$ üçün $B(\xi)$ öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operatordur, belə ki, $B(\xi)\ge\mu_0E$. Burada μ_0- C operatorunun spektrinin aşağı sərhəddidir. Öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operatorların kvadrat kökü olduğundan $B^{1/2}(\xi)$ operatoru vardır və $D\left(B^{1/2}(\xi)\right)=D(C)$.

Əvvəlcə aşağıdakı lemmanı isbat edək.

Lemma. İstənilən $\varphi(\xi)\in H_{3/2}$, $\xi\subset(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})\in R^{n-1}$ üçün

$$\left\|B(\xi)e^{-a_n^{\frac{1}{2}}B^{1/2}(\xi)x_n}\varphi(\xi)\right\|_{L_2(R_+^n;H)}\le\frac{\sqrt[2]{a_n}}{\sqrt{2}}\left\|B^{\frac{3}{4}}(\xi)\varphi(\xi)\right\|_H \quad (8)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı. Əgər $\varphi(\xi)\in H_{3/2}$ olarsa, onda aydırndır ki, $B^{\frac{3}{4}}(\xi)\varphi(\xi)=y(\xi)\in H$.

C operatorunun spektral ayrılışından istifadə etsək, alarıq

$$\left\|B(\xi)e^{-a_n^{-\frac{1}{2}}B^{1/2}(\xi)x_n}\varphi(\xi)2\right\|^2_{L_2(R_+;H)}=\left\|B^{\frac{1}{4}}(\xi)e^{-a_n^{-\frac{1}{2}}B^{1/2}(\xi)x_n}y(\xi)\right\|^2_{L_2(R_+;H)}=$$

$$=\left\|B^{\frac{1}{2}}(\xi)e^{-2a_n^{-\frac{1}{2}}B^{1/2}(\xi)x_n}y(\xi),y(\xi)\right\|_{L_2(R_+;H)}=\int_{\mu_0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_k\xi_k^2+\mu^2\right)^{1/2}\times$$

$$\left.=\int_0^\infty e^{-2a_n^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_k\xi^2+\mu^2\right)^{1/2}x_n}dx_n\right)d\left(E_\mu y(\xi),y(\xi)\right)=$$

$$=\int_{\mu_0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_k\xi^2+\mu^2\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{2a_n^{-1/2}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_k\xi^2+\mu^2\right)^{1/2}d\left(E_\mu y(\xi),y(\xi)\right)=$$

$$=\frac{a_n^{\frac{1}{2}}}{2}\int_{\mu_0}^{\infty}d\left(E_\mu y(\xi),y(\xi)\right)=\frac{a_n^{\frac{1}{2}}}{2}\|y(\xi)\|_H^2=\frac{a_n^{\frac{1}{2}}}{2}\cdot\left\|B^{3/4}(\xi)\varphi(\xi)\right\|_H^2$$

Buradan

$$\left\|B(\xi)e^{-a_n^{-\frac{1}{2}}B(\xi)x_n}\varphi(\xi)\right\|_{L_2(R_+;H)}\le\frac{a_n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}\left\|B^{\frac{3}{4}}(\xi)\varphi(\xi)\right\|_H$$

olduğunu alırıq. Lemma isbat olundu.

Əsas nəticə. Məqalədə alınmış əsas nəticə aşağıdakı teoremdən ibarətdir.

Teorem. $\hat{L}_0$ operatoru $\overset{0}{W}{}^2_{2,\xi}(R_+^n;H)$ fəzasını $L_2(R_+^n;H)$ fəzasına izomorf inikas etdirir.

İsbatı. Əvvəlcə $Ker\hat{L}_0=\{0\}$ olduğunu göstərək.

$-a_n\frac{\partial^2\hat{u}(\xi,x_n)}{\partial x_n^2}+B(\xi)\hat{u}(\xi,x_n)=0$ tənliyinin $W^2_{2,\xi}(R_+^n;H)$ fəzasında həlli

$$u_0(\xi, x_n) = e^{-a_n^{1/2}B^{1/2}(\xi)x_n}\varphi(\xi),\ \varphi(\xi) \in H_{3/2}$$

şəklindədir. Sərhəd şərtinə görə $\frac{\partial \hat{u}_0(\xi, x_n)}{\partial x_n} = 0$ olmalıdır. Buradan $-a_n^{-\frac{1}{2}}B^{1/2}(\xi)\varphi(\xi) = 0$ alırıq.

$-a_n^{-\frac{1}{2}}B^{1/2}(\xi)$ operatorunun bütün $\xi \in R^{n-1}$ qiymətlərində məhdud tərs operatoru olduğundan $\varphi(\xi) = 0$ və $u_0(\xi, x_n) = 0$ alırıq, yəni $Ker\hat{L}_0 = \{0\}$.

İndi isə $Jm\hat{L}_0 = L_2(R_+^n; H)$ olduğunu göstərək.

Qeyd olunmuş bütün $\xi \in R^{n-1}$ üçün

$$f_1(\xi, x_n) = \begin{cases} \hat{f}(\xi, x_n), & \xi \in R^{n-1}, x_n > 0, \\ 0, & \xi \in R^{n-1}, x_n < 0 \end{cases}$$

vektor-funksiyasını götürək. Aydındır ki, $f_1(\xi, x_n) \in L_2(R_+^n; H)$ belə ki,

$$\|f_1(\xi, x_n)\|_{L_2(R_+^n;H)} = \|\hat{f}(\xi, x_n)\|_{L_2(R_+^n;H)}.$$

Aşağıdakı tənliyə baxaq:

$$-a_n \frac{\partial^2 \hat{u}(\xi, x_n)}{\partial x_n^2} + B(\xi)\hat{u}(\xi, x_n) = \hat{f}(\xi, x_n), \xi \in R^{n-1}, x_n \in R_+. \tag{9}$$

Əgər (9) tənliyinə $x_n \in R$ dəyişəninə görə Furye çevirməsi tətbiq etsək, tənliyin həllini aşağıdakı şəkildə ala bilərik:

$$V(\xi, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \left(a_n \xi_n^2 + B(\xi)\right)\hat{f}_1(\xi, x_n) dx_n \tag{10}$$

Burada $\hat{f}_1(\xi, x_n)$, $f_1(\xi, x_n)$ vektor-funksiyasının x_n dəyişəninə nəzərən Furye çevirməsidir.

İstənilən $\xi \in R^{n-1}$ üçün $V(\xi, x_n)$ vektor-funksiyası (9) tənliyini R_+ oblastında sanki hər yerdə ödəyir.

İndi göstərək ki, $\frac{\partial^2 V(\xi, x_n)}{\partial x_n^2} \in L_2(R_+^n; H)$, $B(\xi)V(\xi, x_n) \in L_2(R_+^n; H)$ Plançerel teoreminə görə alarıq:

$$\left\|\frac{\partial^2 V(\xi, x_n)}{\partial x_n^2}\right\|^2_{L_2(R_+^n;H)} + \|B(\xi)V(\xi, x_n)\|^2_{L_2(R_+^n;H)} = \left\|\xi_n^2\left(a_n\xi_n^2 + B(\xi)\right)^{-1}\hat{f}_1(\xi, x_n)\right\|^2 +$$

$$+\left\|B(\xi)\left(a_n\xi^2 + B(\xi)\right)^{-1}\hat{f}_1(\xi, x_n)\right\|^2 \le \sup_{\xi_n}\left\|\xi_n^2\left(a_n^2\xi_n^2 + B(\xi)\right)^{-1}\right\|^2 \cdot \left\|\hat{f}(\xi, x_n)\right\|^2_{L_2(R_+^n;H)} +$$

$$+\sup_{\xi_n}\left\|B(\xi)\left(a_n\xi_n^2 + B(\xi)\right)^{-1}\right\|^2 \cdot \left\|\hat{f}(\xi, x_n)\right\|^2_{L_2(R_+^n;H)}. \tag{11}$$

C operatorunun spektral ayrılışından istifadə edərək istənilən ξ_n və $\xi \in R^{n-1}$ üçün alırıq:

$$\le \sup_{\mu \in \tau(c)}\left|\xi_n^2\left(a_n\xi_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k\xi_k^2 + \mu^2\right)^{-1}\right| \le \sup_{\mu \in \tau(c)} \frac{1}{a_n}\left|a_n\xi_n^2\left(a_n\xi_n^2 + \mu^2\right)^{-1}\right| \le \frac{1}{a^n}.$$

Eləcə də

$$\left\|B(\xi)\left(a_n\xi_n^2 + B(\xi)\right)^{-1}\right\| = \sup_{\mu \in \tau(c)}\left|\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\xi_k^2 + \mu^2\right)\left(a_n\xi_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k\xi_k^2 + \mu^2\right)^{-1}\right| < 1$$

olduğundan (11) bərabərsizliyindən alırıq:

$$\left\| \frac{\partial^2 V(\xi, x_n)}{\partial x_n^2} \right\|_{L_2(R_+^n;H)} + \left\| B(\xi) V(\xi, x_n) \right\|_{L_2(R_+^n;H)}^2 \le \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \left\| \hat{f}_1(\xi, x_n) \right\|_{L_2(R_+^n;H)}^2 \le$$

$$\le \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \left\| f_1(\xi, x_n) \right\|_{L_2(R_+^n;H)}^2 .$$

Buradan $\frac{\partial^2 V(\xi, x_n)}{\partial x_n^2} \in L_2(R_+^n; H), B(\xi) V(\xi, x_n) \in L_2(R_+^n; H)$ olduğunu alırıq. Əgər

$$V_1(\xi, x_n) = \begin{cases} V(\xi, x_n), & \xi \in R^{n-1}, x_n > 0, \\ 0, & \xi \in R^{n-1}, x_n < 0 \end{cases}$$

funksiyasına baxsaq, onda bu funksiyanın da istənilən $\xi \in R^{n-1}$ üçün $\frac{\partial^2 V_1(\xi, x_n)}{\partial x_n^2} \in L_2(R_+^n; H), B(\xi) V_1(\xi, x_n) \in L_2(R_+^n; H)$ olduğunu görərik. Onda iz haqqında teoremə görə [1] alarıq:

$$\left\| B(\xi) \frac{\partial V_1(\xi, x_n)}{\partial x_n} \Big|_{x_n=0} \right\|_H \le const \left(\left\| \frac{\partial^2 V_1(\xi, x_n)}{\partial x_n^2} \right\|_{L_2(R_+^n;H)}^2 + \left\| B(\xi) V_1(\xi, x_n) \right\|_{L_2(R_+^n;H)}^2 \right) \le$$

$$\le const \left(\left\| \frac{\partial^2 V(\xi, x_n)}{\partial x_n^2} \right\|_{L_2(R_+^n;H)}^2 + \left\| B(\xi) V(\xi, x_n) \right\|_{L_2(R_+^n;H)}^2 \right) \le$$

$$\le const \left\| f_1(\xi, x_n) \right\|_{L_2(R_+^n;H)} = const \left\| \hat{f}(\xi, x_n) \right\|_{L_2(R_+^n;H)} .$$

Beləliklə, alırıq ki, (9) tənliyinin $W_{2,\xi}^2(R_+^n; H)$ fəzasında ümumi həlli

$$\hat{u}(\xi, x_n) = V_1(\xi, x_n) + e^{-a_n^{-\frac{1}{2}} B^{1/2}(\xi) x_n} \varphi(\xi), \ \varphi(\xi) \in H_{3/2}$$

şəklindədir. $\frac{\partial \hat{u}(\xi, x_n)}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0} = 0$ şərtindən alırıq ki, $\frac{\partial V_1(\xi, x_n)}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0} = -a_n^{-\frac{1}{2}} B^{1/2}(\xi) \varphi(\xi)$.

$D\left(B^{1/2}(\xi)\right) = D(C)$ olduğundan $B^{1/2}(\xi) \varphi(\xi) \in H_{1/2}$.

Nəticədə, $\varphi(\xi) = a_n^{1/2} \cdot B^{-\frac{1}{2}}(\xi) \frac{\partial V_1(\xi, 0)}{\partial x_n}$ alırıq.

Bunu nəzərə alsaq, $\hat{u}(\xi, x_n) = V_1(\xi, x_n) + e^{-a_n B^{1/2}(\xi) x_n} \left(a_n^{1/2} B^{-\frac{1}{2}}(\xi) \frac{\partial V_1(\xi, 0)}{\partial x_n} \right)$ olduğunu alarıq. $B^{-1/2}(\xi) \frac{\partial V_1(\xi, 0)}{\partial x_n} \in H_{3/2}$ olduğundan aşağıdakı münasibətləri yaza bilərik:

$$\left\| B(\xi) e^{-a_n^{-1/2} B^{-1/2}(\xi) x_n} \varphi(\xi) \right\|_{L_2(R_+^n;H)} \le \left\| B^{3/4}(\xi) \varphi(\xi) \right\|_{H_0} =$$

$$= const \left\| B^{3/4}(\xi) B^{-\frac{1}{2}}(\xi) \frac{\partial V_1(\xi, 0)}{\partial x_n} \right\|_{H_0} = const \left\| B^{1/2}(\xi) \frac{\partial V_1(\xi, 0)}{\partial x_n} \right\|_{H_0} \le$$

$$\le const \left\| \frac{\partial^2 \hat{u}(\xi, x_n)}{\partial x_n^2} \right\|_{L_2(R_+^n;H)}^2 + \left\| B(\xi) \hat{u}(\xi, x_n) \right\|_{L_2(R_+^n;H)}^2 \le const \left\| \hat{f}(\xi, x_n) \right\|_{L_2(R_+^n;H)} .$$

Beləliklə, $Jm\hat{L}_0 = L_2(R_+^n; H)$ olduğunu alırıq. Digər tərəfdən

$$\left\| \frac{\partial^2 \hat{u}(\xi, x_n)}{\partial x_n^2} \right\|_{L_2(R_+^n; H)} + \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k^2 E + C^2 \right) \right) \hat{u}(\xi, x_n) \right\|_{L_2(R_+^n; H)} \le const \left\| \hat{f}(\xi, x_n) \right\|_{L_2(R_+^n; H)}^2$$

olduğunu nəzərə alsaq, nəticədə

$$\left\| \frac{\partial^2 \hat{u}(\xi, x_n)}{\partial x_n^2} \right\|_{L_2(R_+^n; H)} + \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k^2 \left\| \hat{u}(\xi, x_n) \right\|_{L_2(R_+^n; H)} \le const \left\| \hat{f}(\xi, x_n) \right\|_{L_2(R_+^n; H)}^2$$

alarıq. Sonuncu bərabərsizliyi ξ dəyişəninə görə R^{n-1} üzrə inteqrallasaq, sonda

$$\left\| \hat{u}(\xi, x_n) \right\|_{W_2(R_+^n; H)} \le const \left\| \hat{f}(\xi, x_n) \right\|_{L_2(R_+^n; H)}$$

olduğunu görərik.

Sonuncu bərabərsizlik $\hat{L}_0$ operatoru üçün tərs operatorun varlığı haqqında Banax teoreminin şərtləri ödənilir. Ona görə də $\hat{L}_0 : W_2^2(R_+^n; H) \to L_2(R_+^n; H)$ operatorunun izomorfizm olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki, Hilbert fəzasında bir sinif xüsusi törəməli ikinci tərtib operator-diferensial tənliklərin bütün fəzada həll olunması və korrekt həll olunan olması şərtləri müəllifin [13], [14] işlərində öyrənilmişdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967, 464 с.
2. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980, 207 с.
3. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев: Науково Думка, 1984, 284 с.
4. Якубов С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985, 220 с.
5. Гасымов М.Г. О разрешимости краевых задачах для одного класса операторно-дифференциальных уравнений // ДАН СССР, т. 235, №3, 1977, с. 505-508
6. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. Об асимптотике решений дифференциальных уранвений с операторными коэффициентами // ДАН СССР, 1971, т.196, №3, с.512-515
7. Дубинский Ю.А. О некоторых дифференциально-операторных уравнениях произвольного порядка. // Матем. сборник, т.90 (132), №1, 1973, с.3-22
8. Мирзоев С.С. Об одной краевой задаче для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка // Труды ИММ АН Азерб., т.7(16),1998, с. 154-161
9. Шкаликов А.А. Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними // Труды семинара им. И.Г.Петровского, № 14, 1989, с.140-224
10. Юрчук Н.И. Априорные оценки решений граничных задач для некоторых дифференциально-операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. т.12, №4, 1976, с.729-739
11. Асланов Г.И. О дифференциальных уравнениях с неограниченными операторными коэффициентами // ДАН России, т.337, №1, 1994, с. 329-331
12. Алиев А.Р. О разрешимости одного класса краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами, т.43, №10, 2007, с.1423-1426
13. Hətəmova R.F. Bir sinif ikinci tərtib xüsusi törəməli operator-diferensial tənliklərin bütün fəzada həll olunması haqqında // Journal of Baku Engineering Universityç Mathematics and Computer Science, v.2, №2, 2018, pp.85-91
14. Гатамова Р.Ф. Корректная разрешимость одного класса операторно-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в гильбертовом пространстве // Journal of Contemporary Applied Mathematics, v.9, №2, 2019, pp.25-31

РЕЗЮМЕ

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Гатамова Р.Ф.

Ключевые слова: *Операторно-дифференциальные уравнения, задача Неймана, уравнения эллиптического типа, преобразование Фурье, теорема Банаха, самосопряженный положительно-определенный оператор, корректная разрешимость, гильбертово пространство, норма, скалярное произведение.*

В работе исследованы вопросы корректной разрешимости задачи Неймана для эллиптического операторно-дифференциального уравнения с частными производными второго порядка. Для решения данной задачи применяется метод преобразовании Фурье. Решение задачи исследуется в специально построенном пространстве типа Соболева.

SUMMARY

CORRECT SOLVABILITY OF NEUMANN PROBLEM FOR SECOND ORDER PARTIAL OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION

Hatamova R.F.

***Key words*:** *operator-differential equation, Neumann problem, elliptic type equation, Fourier transformation, Banachs theorem, self-adjoint operator, positive operator, well-defined solvability, Hilbert space, norm, scalar product.*

In the paper, we study well-defined solvability of Neumann problem for elliptic partial operator-differential equation of second order. For solving the problem, the Fourier transformation method is used. The problem solution is studied in specially structured Sobolev type space.

Daxilolma tarixi: İlkin variant 04.06.2020

Son variant 15.09.2020