UOT 517.97

NAZİK LÖVHƏNİN RƏQSLƏRİ TƏNLİYİ ÜÇÜN BİR İDARƏOLUNMA MƏSƏLƏSİ

SEYFULLAYEVA XƏYALƏ İDRİS qızı
Sumqayıt Dövlət Universiteti, r.f.d., baş müəllim
xeyaleseyfullayeva82@gmail.com

Açar sözlər: *nazik lövhə, ümumiləşmiş həll, idarəolunma, müşahidəolunma.*

Giriş. Xüsusi törəməli tənliklərlə təsvir olunan proseslərdə sağ tərəflərin, əmsalların, sərhəd funksiyalarının, başlanğıc funksiyaların tapılması məsələləri tərs məsələlərdir. Məlumdur ki, xüsusi törəməli tənliklər üçün tərs məsələlər, ümumiyyətlə, korrekt olmayan məsələlərdir. Bu tipli məsələlər elmin və texnikanın müxtəlif sahələrində meydana gəlir [1], [2]. Belə məsələləri həll etmək üçün müxtəlif həll üsulları mövcuddur. Bu həll üsullarından biri də idarəetmə nəzəriyyəsini tətbiq etməklə baxılan məsələlərin tədqiqindən ibarətdir.

Praktikada bir sıra real proseslər nazik lövhənin rəqsləri tənlikləri ilə təsvir olunur [3], [4]. Ona görə də nazik lövhənin rəqsləri tənliyi üçün idarəolunma və optimal idarəetmə məsələlərinin öyrənilməsi aktualdır [5]. Qeyd edək ki, son dövrlərdə nazik lövhənin rəqsləri tənliyi üçün idarəolunma məsələləri intensiv şəkildə tədqiq edilir [6], [7].

Baxılan işdə nazik lövhənin rəqsləri tənliyi üçün bir idarəolunma məsələsi tədqiq olunur.

Tutaq ki, idarə olunan proses nazik lövhənin

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\Delta(D\Delta u)+(1-\nu)\left(2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\upsilon(x,y,t), \quad (x,y,t)\in Q \tag{1}$$

rəqsləri tənliyi [1], [2],

$$u(x,y,0)=u_0(x,y),\ \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=u_1(x,y),\ (x,y)\in\Omega \tag{2}$$

başlanğıc şərtləri və

$$\begin{gathered}u(0,y,t)=0,\frac{\partial u(0,y,t)}{\partial x}=0,u(a,y,t)=0,\frac{\partial u(a,y,t)}{\partial x}=0,\ (y,t)\in(0,b)\times(0,T),\\ u(x,0,t)=0,\frac{\partial u(x,0,t)}{\partial y}=0,\ u(x,b,t)=0,\ \frac{\partial u(x,b,t)}{\partial y}=0,\ (x,t)\in(0,a)\times(0,T)\end{gathered} \tag{3}$$

sərhəd şərtləri ilə təsvir olunur. Burada $Q=\Omega\times(0,T)$, $\Omega=(0,a)\times(0,b)$, a, b, $T>0$ müsbət ədədlər, $u_0(x,y)$, $u_1(x,y)$ -verilmiş funksiyalardır, belə ki, $u_0\in \overset{o}{W}{}_2^2(\Omega)$, $u_1\in L_2(\Omega)$, $u(x,y,t)$ -lövhənin yerdəyişməsi, $\upsilon(x,y,t)$-idarəedici funksiya, $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$-lövhənin əyilmə möhkəmliyi, $h(x,y)$-lövhənin qalınlığıdır, $0<\mu_1\le h(x,y)\le\mu_2$, μ_1, μ_2 -verilmiş ədədlərdir və $h(x,y)$ -in Ω -da iki tərtibə qədər kəsilməz törəmələri var. E ($E>0$)-Yunq modulu, ν $\left(0<\nu<\dfrac{1}{2}\right)$-Puasson əmsalıdır, Δ-(x,y)-ə görə Laplas operatorudur, $\rho(x,y)$ -lövhənin kütlə sıxlığıdır, o, $\overline{\Omega}$ -da kəsilməzdir və $\rho(x,y)\ge\gamma>0$, γ -verilmiş ədəddir, $\upsilon(x,y,t)$ idarəedicidir.

Burada biz (1)-(3) sisteminin idarəolunma məsələsinə baxacağıq. Bu halda mümkün $\upsilon(x,y,t)$ idarəedicilər sinfi olaraq $L_2(Q)$, müşahidə olaraq $u(\upsilon)$ funksiyasını götürək.

Tərif. Əgər $\upsilon(x,y,t)$ idarəedicisini $L_2(Q)$ fəzasında dəyişdikdə, $u(\upsilon)$ müşahidəsi $L_2(Q)$ fəzasında müəyyən sıx alt fəzanı doldurursa, onda deyirlər ki, (1)-(3) sistemi idarəolunandır.

Teorem. (1)-(3) məsələsinin verilənləri üzərinə yuxarıda qoyulmuş şərtlər daxilində bu sistem idarəolunandır.

İsbatı. Fərz edək ki, $\psi(x,y,t)$ funksiyası $u(\upsilon)$ müşahidəsinin dəyişdiyi alt fəzaya ortoqonaldır, yəni

$$\int_Q \psi(x,y,t)u(\upsilon)dxdydt = 0, \ \forall \upsilon \in L_2(Q).$$

Əgər bu münasibətdən alsaq ki, $\psi(x,y,t)$ funksiyası Q-də sıfıra bərabərdir, onda (1)-(3) sistemi idarəolunandır.

Hər bir $\upsilon(x,y,t)$ mümkün idarəedici üçün (1)-(3) məsələsinin ümumiləşmiş həllinə baxılır. (1)-(3) məsələsinin ümumiləşmiş həlli dedikdə elə $u(x,y,t) \in W_2^{2,1}(Q)$ funksiyası başa düşülür ki, o, ixtiyari $\eta(x,y,t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $\eta(x,y,T) = 0$,

$$\eta(0,y,t) = 0, \frac{\partial \eta(0,y,t)}{\partial x} = 0, \eta(x,0,t) = 0, \frac{\partial \eta(x,0,t)}{\partial y} = 0,$$

$$\eta(a,y,t) = 0, \frac{\partial \eta(a,y,t)}{\partial x} = 0, \eta(x,b,t) = 0, \frac{\partial \eta(x,b,t)}{\partial y} = 0$$

funksiyası üçün

$$\int_Q \left[-\rho \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + D\Delta u \Delta \eta + (1-\nu)\left(2\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)\eta \right] dxdydt - \tag{4}$$
$$- \int_\Omega \rho u_1(x,y)\eta(x,y,0)dxdy = \int_Q \upsilon(x,y,t)\eta(x,y,t)dxdydt$$

inteqral eyniliyini və $u(x,y,0) = u_0(x,y)$ şərtini ödəsin.

Göstərək ki, (1)-(3) sistemi idarə olunandır. Bunun üçün fərz edək ki, $\xi(x,y,t) \in W_2^{2,1}(Q)$ funksiyası aşağıdakı məsələnin ümumiləşmiş həllidir:

$$\rho\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \Delta(D\Delta\xi) + (1-\nu)\left(2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\xi\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}\right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\xi\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\xi\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right)\right) = \tag{5}$$
$$= \psi(x,y,t), \ (x,y,t) \in Q,$$

$$\xi(x,y,T) = 0, \ \frac{\partial \xi(x,y,T)}{\partial t} = 0, \ (x,y) \in \Omega, \tag{6}$$

$$\xi(0,y,t) = 0, \frac{\partial \xi(0,y,t)}{\partial x} = 0, \xi(a,y,t) = 0, \frac{\partial \xi(a,y,t)}{\partial x} = 0, \ (y,t) \in (0,b)\times(0,T),$$
$$\xi(x,0,t) = 0, \frac{\partial \xi(x,0,t)}{\partial y} = 0, \xi(x,b,t) = 0, \frac{\partial \xi(x,b,t)}{\partial y} = 0, \ (x,t) \in (0,a)\times(0,T). \tag{7}$$

Hər bir $\upsilon(x,y,t)$ mümkün idarəedicisi üçün (5)-(7) məsələsinin $W_2^{2,1}(Q)$ fəzasından olan ümumiləşmiş həllinə baxılır.

(5)-(7) məsələsinin ümumiləşmiş həlli dedikdə elə $\xi(x,y,t) \in W_2^{2,1}(Q)$ funksiyası başa düşülür ki, o ixtiyari $g(x,y,t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$, $g(x,y,0) = 0$,

$$g(0,y,t) = 0, \frac{\partial g(0,y,t)}{\partial x} = 0, g(x,0,t) = 0, \frac{\partial g(x,0,t)}{\partial y} = 0,$$

$$g(a,y,t) = 0, \frac{\partial g(a,y,t)}{\partial x} = 0, g(x,b,t) = 0, \frac{\partial g(x,b,t)}{\partial y} = 0$$

funksiyası üçün

$$\int_Q \left[-\rho \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} + D\Delta\xi\Delta g + (1-\nu)\left(2\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) g \right] dxdydt = \tag{8}$$
$$= \int_Q \psi(x,y,t)g(x,y,t)dxdydt$$

inteqral eyniliyini ödəsin.

(4)-də $\eta = \xi$, (8)-də $g = u$ götürüb onları tərəf-tərəfə çıxsaq alarıq ki,

$$\int_Q \upsilon(x,y,t)\xi(x,y,t)dxdydt = 0.$$

Burada $\upsilon(x,y,t)$ ixtiyari olduğundan Laqranj lemmasına əsasən $\xi(x,y,t) = 0$ olar. Buradan isə $\psi(x,y,t) \equiv 0$ olduğu alınır. Deməli, sistem idarə olunandır. Bunu da göstərmək tələb olunurdu. Teorem isbat olundu.

ƏDƏBİYYAT

1. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, 2009, 457 с.
2. Эфенди С.Н. О корректной разрешимости некоторых новых классов задач типа Коши для гиперболического уравнения четвертого порядка // Сумгаитский государственный университет. Научные известия. Серия: Естественные и технические науки. т.19, № 4. Сумгаит: СГУ, 2019, с. 9-13; https://elibrary.ru/item.asp?id=43167221
3. Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975, 158 с.
4. Арман Ж.-Л.П. Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. М.: Мир, 1977, 144 с.
5. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 416 с.
6. Isabel Narra Figueiredo, Enrique Zuazua. Exact controllability and asymptotic limit for thin plates // Asymtotic Analysis. Vol.12, April 1996, pp. 213-252
7. Bouchitte G., Fragala I. Optimality conditions for mass design problems and applications ti thin plates // Archive Rational Machanics and Analysis. Vol. 184, 2007, pp.257-284

РЕЗЮМЕ

ОДНА ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ

Сейфуллаева Х.И.

Ключевые слова: *тонкая пластина, обобщенное решение, управляемость, наблюдаемость.*

В представленной работе рассматривается краевая задача с распределенным управлением в правой части уравнения колебаний тонкой пластины. Известно, что многие практические задачи описываются уравнением колебаний тонкой пластины, но проблемы управляемости этим уравнением практически никогда не изучались. Один из таких вопросов исследован в рассматриваемой работе. После определения управляемости, с помощью введения вспомогательной краевой задачи и с использованием результатов теоремы Хана-Банаха доказана управляемость рассматриваемой системы.

SUMMARY

ONE CONTROL PROBLEM FOR EQUATION OF THIN PLATE OSCILLATIONS

Seyfullaeva Kh.I.

Key words: *thin plate, generalized solution, controllability, observability.*

In this paper, we consider a boundary-value problem with distributed control in the right-hand side of the thin-plate oscillation equation. It is known that many practical problems are described by the equation of oscillation of a thin plate, but the controllability problems with this equation have almost never been studied. One of these questions is investigated in the present work. After determination the controllability, by introducing an auxiliary boundary value problem and using the result of the Han-Banach theorem, the controllability of the system under consideration is proved.

Daxilolma tarixi:	İlkin variant	19.03.2021
	Son variant	09.04.2021