УДК 539.374

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕДАХ ПРИ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ

[1]КУРБАНОВ НАБИ ТАПДЫГ оглу
[2]БАБАДЖАНОВА ВУСАЛЯ ГАМЗА гызы
[3]АЛИЕВА УЛЬВИЯ САНГАН гызы
Сумгаитский государственный университет, 1-профессор,2-доцент, 3-ст.преподаватель
vusala11@gmail.com

Ключевые слова: *напряжение, плотность, релаксация, преобразование Лапласа, изображение, коэффициент Пуассона, упругость, неоднородность, вязкоупругость.*

В статье исследуется задача о распространении нестационарных динамических волн в неоднородном реологическом слое, когда плотность и функция релаксации материала слоя зависят от координат. Задача решена с помощью интегрального преобразования Лапласа для произвольных наследственных функций при малой вязкости. При вычислении оригинала предположено, что коэффициент Пуассона является постоянным. Решение получено в виде ряда, первый член которого соответствует фундаментальным решениям теории упругости, остальные члены ряда возникают за счет вязкоупругости материала. Показано, что волны затухают по экспоненциальному закону с течением времени.

Многие задачи природы, связанные с решением проблем сейсмологии сейсмостойкости технических систем приводятся к исследованию волновых процессов с учетом неоднородности и реологических свойств среды [1,6]. Однако, исследование этой задачи приводит к значительным сложностям математического характера. Аналогичная задача для упругого полупространства решена в работах [1,5], а в работах [2,3] исследована, когда плотность зависит от координаты, а функция релаксации не зависит от координат.

В данной работе исследуется задача о распространении нестационарных динамических волн в вязкоупругом слое, когда функция релаксации и плотность материала зависят от координат, направленных в глубь материала [1].

Пусть к поверхности неоднородного слоя $y \geq 0$, находящегося в покое, в момент $t = 0$ прикладывается нагрузка

$$\sigma = f(t) \tag{1}$$

Тогда исследование напряженно-деформационного состояния слоя в последующие моменты времени математически сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial \sigma(y,t)}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial t^2} \tag{2}$$

$$u(y,t) = 0 \quad при \quad y = h \tag{3}$$

начальные условия нулевые

$$u(y,t) = \frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = 0 \quad при \quad t = 0 \tag{4}$$

Определяющие соотношения и неоднородность среды принимаем в следующем виде:

$$\sigma(y,t) = \int_0^t \left[R_1(t-\tau, y) + \frac{2}{3} R_2(t-\tau, y) \right] d\left[\frac{\partial u(y,t)}{\partial y} \right] \tag{5}$$

$$R_1(y,t)=R_1(t)(1+ay)^k\ , R_2(y,t)=R_2(t)(1+ay)^k\ \rho(y)=\rho_0(1+ay)^k\ .$$

где σ - напряжение, ρ_0 -плотность, $u(y,t)$– перемещение, h– толщина слоя, a и $к$ постоянные, $R_1(y,t)$и $R_2(y,t)$ - функции объемной и сдвиговой релаксации, $f(t)$ - заданная функция, характеризующая внешнюю нагрузку.

Применяя интегральное преобразование Лапласа по времени *t* к уравнению (2) с учетом (4) и (5) получаем:

$$\frac{d^2u(z,p)}{dz^2}+\frac{k}{z}\frac{du(z,p)}{dz}-\frac{\beta^2}{a^2}\tilde{u}(z,p)=0 \tag{6}$$

Здесь введено обозначение

$$z=1+ay,\ \ \tilde{\beta}^2(p)=\frac{p^2}{\tilde{c}^2(p)},\ \ \tilde{c}^2(p)=\frac{p\bar{R}_1(p)+\frac{2}{3}p\tilde{R}_1(p)}{\rho_0}$$

p - параметр преобразования Лапласа, $\tilde{u}(z,p)$-изображение функции $u(y,t),\bar{R}_1(p)$ и $\bar{R}_2(p)$ изображение по Лапласу функций $R_1(t)\ и\ R_2(t)$соответственно.

Решение уравнения (6) в общем виде имеет вид:

$$\tilde{u}(z,p)=\left[AK_\nu\left(\frac{\beta z}{a}\right)+BI_\nu\left(\frac{\beta z}{a}\right)\right]z^\nu \tag{7}$$

Здесь $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ модифицированные функции Бесселя. $\nu=\frac{1-k}{2}$; *A и B* постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий. Из условия (3) определяем:

$$\tilde{u}(z,p)=z^\nu\left[AK_\nu\left(\frac{\beta z}{a}\right)+BI_\nu\left(\frac{\beta z}{a}\right)\right]=0 \text{ при } y=h$$

$$AK_\nu\left(\frac{\beta z_0}{a}\right)+BI_\nu\left(\frac{\beta z_0}{a}\right)=0\Rightarrow B=-A\frac{K_\nu\left(\frac{\beta z_0}{a}\right)}{I_\nu\left(\frac{\beta z_0}{a}\right)}$$

где $z_0=1+ah.$ Тогда решение (7) принимает вид:

$$\tilde{u}(z,p)=Az^\nu\left[K\left(\frac{\beta z}{a}\right)-\frac{K_\nu\left(\frac{\beta z_0}{a}\right)}{I_\nu\left(\frac{\beta z_0}{a}\right)}I_\nu\left(\frac{\beta z}{a}\right)\right] \tag{8}$$

Из условия (1) получаем:

$$\tilde{\sigma}=\left(p\bar{R}_1+\frac{2}{3}\rho R_2\right)\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}=f(p)$$

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}=\frac{\bar{f}(p)}{\left(p\bar{R}_1+\frac{2}{3}p\bar{R}_2\right)}$$

Из этого уравнения находим неизвестный коэффициент *A;* тогда решение принимает вид:

$$\tilde{u}(z,p)=\frac{\bar{f}(p)Z^{\nu-\frac{1}{2}}}{\bar{c}_1(p)\beta}\cdot\frac{K_\nu\left(\frac{\beta z}{a}\right)I_\nu\left(\frac{\beta z_0}{a}\right)-K_\nu\left(\frac{\beta z_0}{a}\right)I_\nu\left(\frac{\beta z}{a}\right)}{K_{\nu-1}\left(\frac{\beta}{a}\right)I_\nu\left(\frac{\beta z_0}{a}\right)-I_{\nu-1}\left(\frac{\beta}{a}\right)K_\nu\left(\frac{\beta z_0}{a}\right)} \tag{9}$$

где $\bar{c}_1(p)=p\bar{R}_1+\frac{2}{3}p\bar{R}_2$.

С помощью асимптотических выражений цилиндрических функций

$$K_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}$$

$$I_\nu(z)=\sqrt{\frac{1}{2\pi z}}e^{z}$$

определяем перемещение в следующем виде:

$$\tilde{u}(z,p)=\frac{\bar{f}(p)}{\bar{c}_1(p)\beta}\cdot\frac{e^{-\frac{\beta}{a}(z-z_0)}-e^{-\frac{\beta}{a}(z_0-z)}}{e^{-\frac{\beta}{a}(z_0-1_0)}-e^{-\frac{\beta}{a}(1-z_0)}}$$

или

$$\tilde{u}(z,p)=\frac{\bar{f}(p)}{\bar{c}_1(p)\beta}\cdot\frac{e^{-\bar{\beta}(y-h)}-e^{-\beta(h-y)}}{e^{-\beta h}-e^{\beta h}}$$

Разлагая знаменатель в ряд, получаем:

$$\tilde{u}(z,p)=\frac{\bar{f}(p)Z^{\nu-\frac{1}{2}}}{\bar{c}_1(p)\beta}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left\{e^{-\beta(2nh+y)}-e^{-\beta(2(n+1)h-y)}\right\}$$

Здесь

$$\frac{1}{\bar{c}_1(p)\beta}=\frac{1}{\left(pR_1+\frac{2}{3}pR_2\right)\cdot\frac{p}{\frac{\sqrt{pR_1+\frac{2}{3}pR_2}}{\sqrt{\rho_0}}}}=\frac{1}{\sqrt{\rho_0}\,p\sqrt{p\tilde{R}_1+\frac{2}{3}p\tilde{R}_2}}$$

Поэтому решение принимает вид:

$$\tilde{u}(z,p)=\frac{\bar{f}(p)Z^{\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\rho_0}\,p}\cdot\frac{1}{\sqrt{pR_1+\frac{2}{3}pR_2}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{-\frac{p}{\sqrt{c(p)}}(2nh+y)}-e^{-\frac{p}{\sqrt{\bar{c}(p)}}[2(n+1)h-y]}\right]\right\} \tag{10}$$

Решение поставленной задачи фактически получено в изображении Лапласа.

Для вычисления оригинала сначала рассмотрим следующие случаи. Предположим, что коэффициент Пуассона ν - является постоянным. Тогда реологические функции будут пропорциональными, т.е. $R_1(t)=\eta R(t)$, где $\eta=\frac{1+\nu}{3(1-2\nu)}$

Поэтому

$$\sqrt{\frac{\rho_0}{p\tilde{R}_1(p)+\frac{2}{3}p\tilde{R}_2(p)}}=\sqrt{\frac{\rho_0}{\eta+\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{p\tilde{R}(p)}}=\sqrt{\frac{\rho_0}{\frac{1+\nu}{3(1-2\nu)}+\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{p\tilde{R}(p)}}$$

Учитывая, что

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad G = \frac{1}{2(1+\nu)}$$

Получаем

$$\sqrt{\frac{\rho_0}{p\tilde{R}_1(p) + \frac{2}{3}p\tilde{R}_2(p)}} = \sqrt{\frac{\rho_0}{K + \frac{2}{3}2G} \cdot \frac{2G}{p\bar{R}(p)}} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{R(0)}{p\tilde{R}(p)}}$$

где

$$c = \sqrt{\frac{R_1(0) + \frac{2}{3}R(0)}{\rho_0}}; \quad K = R_1(0); \quad 2G = R_2(0)$$

После этого для изображения решения получаем:

$$\tilde{u}(z,p) = \frac{c\bar{f}(p)Z^{\nu-\frac{1}{2}}}{\rho_0 p}\sqrt{\frac{R(0)}{p\tilde{R}(p)}}\left\{e^{-\frac{py}{c}\sqrt{\frac{R(0)}{p\tilde{R}(p)}}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\frac{p}{c}(2nh+y)\sqrt{\frac{R(0)}{p\tilde{R}(p)}}} - e^{-\frac{p}{c}(2nh-y)\sqrt{\frac{R(0)}{p\tilde{R}(p)}}}\right]\right\} \tag{11}$$

Отсюда видно, что окончательное решения поставленной задачи сводится к вычислению оригиналов функций:

$$\tilde{\varphi}_i(y,p) = \frac{f(p)}{p}\sqrt{\frac{R(0)}{p\tilde{R}(p)}}e^{-\frac{p\gamma_i}{c}\sqrt{\frac{R(0)}{p\tilde{R}(0)}}}$$

где $\gamma_1 = y;\ \gamma_2 = 2nh + y;\ \gamma_3 = 2nh - y;$

Сначала предположим что, $\sigma = f(t) = \sigma_0 H(t)$ где $\sigma_0 = const,\ H(t)$ - функция Хевисайда. Тогда $\tilde{\sigma} = \tilde{f}(p) = \frac{\sigma_0}{p}$ и при этом для $\tilde{\varphi}_i(y,p)$ получаем:

$$\tilde{\varphi}_i(\gamma_i,p) = \frac{\sigma_0}{p^2}\sqrt{\frac{R(0)}{p\tilde{R}(p)}}e^{-\frac{p\gamma_i}{c}\sqrt{\frac{R(0)}{p\tilde{R}(p)}}} \tag{12}$$

Представляя экспоненциальную функцию в виде интеграла Фурье, с учетом $p\tilde{R}(p) = E(1-\varepsilon\tilde{\Gamma}(p))$ получаем:

$$\tilde{\varphi}_i(\gamma_i,p) = \frac{2\sigma_0}{\pi E p}\int_0^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\lambda\gamma_i}{c}\right)d\lambda}{p^2 + \lambda^2 - \varepsilon\lambda^2\tilde{\Gamma}(p)}$$

где $\Gamma(t)$-ядро релаксации, $\varepsilon > 0$ некоторый малый параметр (иногда $\varepsilon = \frac{R_0 - R_\infty}{R_0}$), R_∞- релаксированное, R_0-нерелаксированное значение функции $R(t)$. Разлагая знаменатель в ряд, получаем:

$$\tilde{\varphi}_i(\gamma_i,p) = \frac{2\sigma_0}{\pi E p}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{p^2+\lambda^2} + \frac{\varepsilon\lambda^2\tilde{\Gamma}(p)}{(p^2+\lambda^2)^2} + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon^m\lambda^{2m}\tilde{\Gamma}^{(m)}(p)}{(p^2+\lambda^2)^m} \cdot \frac{1}{\left(p + \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_S\lambda\right)^2 + \lambda^2\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right)^2}\right]\cos\left(\frac{\lambda\gamma_i}{c}\right)d\lambda$$

где $\Gamma_S = \int\limits_0^\infty \Gamma(\tau) \sin \lambda\tau d\tau$; $\Gamma_c = \int\limits_0^\infty \Gamma(\tau) \cos \lambda\tau d\tau$.

Отсюда после интегрирования находим:

$$\tilde{\varphi}_i(\gamma_i, p) = \frac{2\sigma_0}{\pi E p}\left\{\frac{\pi}{2}\exp\left(-\frac{p\gamma_i}{c}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\varepsilon\tilde{\Gamma}(p)\right)^n + \sqrt{\pi}\left(\frac{\gamma_i}{2cp}\right)^{3/2} \times\right.$$

$$\times K_{3/2}\left(\frac{p\gamma_i}{c}\right)\left(-p^2\right)\sum_{n=1}^{m} n\left(\varepsilon\tilde{\Gamma}(p)\right)^n + \ldots + \sqrt{\pi}\left(\frac{\gamma_i}{2cp}\right)^{5/2} K_{5/2}\left(\frac{p\gamma_i}{c}\right)\times$$

$$\times\left(-p^2\right)^2\sum_{n=2}^{m}\frac{n!}{2!(n-2)!}\left(\varepsilon\tilde{\Gamma}(p)\right)^n + \ldots +$$

$$+\varepsilon^{n+1}\int\limits_0^\infty \frac{\lambda^{2(m+1)}\left(\tilde{\Gamma}(p)\right)^{m+1}}{\left(p^2+\lambda^2\right)^{m+1}} \cdot \frac{os\left(\frac{\lambda\gamma_i}{c}\right)d\lambda}{\left(p+\frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_S\lambda\right)^2 + \lambda^2\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right)^2}$$

Здесь, переходя к обратному преобразованию Лапласа, находим:

$$\varphi_i(z,t) = \frac{c\sigma_0 Z^{\nu-\frac{1}{2}}}{E}\left\{H\left(t-\frac{\gamma_i}{c}\right)\left(t-\frac{\gamma_i}{c}\right) * \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^m\Gamma_n(t) + \frac{(-1)}{2^2}\left(t^2-\frac{\gamma_i^2}{c^2}\right)H\left(t-\frac{\gamma_i}{c}\right) * \delta_1(t) *\right.$$

$$* \sum_{n=1}^{m} n\varepsilon^n\Gamma_n(t) + \frac{(-1)^2}{2^6}\left(t^2-\frac{\gamma_i^2}{c^2}\right)^2 H\left(t-\frac{\gamma_i}{c}\right) * \delta_3(t) * \sum_{n=2}^{m}\frac{n!}{2!(n-2)!}\varepsilon^n\Gamma_n(t) + \ldots +$$

$$+\varepsilon^{m+1}\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_0^t \theta_{m+1}(\tau)d\tau * \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_S\lambda t\right)\times\sin\lambda\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right)t\right]\frac{\cos\left(\frac{\lambda\gamma_i}{c}\right)}{\lambda\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right)}d\lambda$$

где $\delta(t)$ - дельта функция Дирака; $K_\nu(z)$ - функция Макдональда. Здесь введены следующие обозначения:

$$\theta_0(t) = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^t \Gamma(\tau)\sin\lambda(t-\tau)d\tau$$

$$\theta_1(t) = \lambda\int\limits_0^t \theta_0(\tau)\sin\lambda(t-\tau)d\tau$$

…………………………………………

$$\theta_m(t) = \lambda\int\limits_0^t \theta_m(\tau)\sin\lambda(t-\tau)d\tau$$

Из решений видно, что волна затухает по экспоненциальному закону и первый член сумм соответствует фундаментальным решениям теории упругости, а остальные члены ряда возникают за счет вязкости материала среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаджанова В. Г., Алиева У. С. Исследование волновых процессов в толстостенной трубе под действием внутреннего давления // Сумгаитский государственный университет. Научные известия. Серия: Естественные и технические науки. т.19, № 4. Сумгаит: СГУ, 2019,с. 14-18; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43167222

2. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977, 384 с .
3. Ильясов М.Х. Нестационарные вязкоупругие волны. Баку, 2011, 329 с.
4. Курбанов Н.Т., Бабаджанова В.Г. Исследование нестационарных волн сдвига в неоднородном вязкоупругом полупространстве // Естественные и технические науки. №3. М., 2009.
5. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974, 340 с.
6. Огурцов Л.И., Пушкарев И.К. Распространение упругих и упругопластических волн. Алма-Ата: Наука, 1973, с.277-281

XÜLASƏ

ÖZLÜLÜK KİÇİK OLDUQDA QƏRARLAŞMAYAN DALĞALARIN QEYRİ-BİRCİNS REOLOJİ MÜHİTDƏ TƏDQİQİ

Qurbanov N.T., Babacanova V.H., Əliyeva Ü.S.

Açar sözlər: *gərginlik, sıxlıq, relaksasiya, Laplas çevirməsi, təsvir, Puasson əmsalı, elastiklik, qeyri – bircins, özlüelastiklik.*

Məqalədə mühitin sıxlığı və relaksasiya funksiyası koordinatlardan asılı olduqda qeyri-stasionar dinamik dalğaların özlüelastik layda yayılması məsələsi araşdırılır. Məsələ ixtiyari reolojı funksiyalar üçün Laplasın inteqral çevirməsinin köməyi ilə həll olunmuşdur. Orijinalın hesablanmasında nəzərə alınır ki, Puasson əmsalı sabitdir. Məsələnin həlli sıra şəklində alınır, belə ki, sıranın birinci həddi elastiklik nəzəriyyəsinin fundamental həllinə uyğun, digər hədləri isə materialın özlüelastikliyinə əsasən yaranır. Zamanla dalğaların eksponensial qanununa görə sönməsi göstərilir.

SUMMARY

STUDY OF NON-STASIONARY WAVES IN INHOMOGENEOUS RHEOLOGICAL MEDIA WITH LOW VISCOSITY

Gurbanov N.T., Babajanova V.H., Aliyeva U.S.

Key words: *tension, density, relaxation, Laplace's transformation, image, Poisson's coefficient, elasticity, heterogeneity, viscoelasticity.*

The article studies the problem of propagation of non-stationary dynamic waves in an inhomogeneous rheological layer, when the density and relaxation function of the layer material depend on the coordinates. The problem is solved using the integral Laplace transform for arbitrary hereditary functions at low viscosity. When calculating the original, it is assumed that the Poisson's ratio is constant. The solution is obtained in the form of a series, the first term of which corresponds to the fundamental solutions of the theory of elasticity, the remaining terms of the series arise due to the viscoelasticity of the material. It is shown that the waves decay exponentially over time.

Daxilolma tarixi:	İlkin variant	31.05.2021
	Son variant	21.06.2021