УДК 519.95

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВОИЧНЫХ ЛИНЕЙНЫХ МОДУЛЯРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

[1]ФЕЙЗИЕВ ФИКРАТ ГЮЛЬАЛИ оглу
[2]ГАСАНЛЫ НИДЖАТ ИСМАЙЫЛ оглу
Сумгаитский государственный университет, 1- профессор, 2- ассистент
FeyziyevFG@mail.ru

Ключевые слова: *двоичные линейные модулярные динамические системы, терминальные оптимальные управления, задача Больца, булевые и псевдобулевые функции, необходимое условие оптимальности управлений.*

Рассматривается задача терминального оптимального управления и задача Больца для одного класса двоичных линейных модулярных динамических систем. Используя понятие производной и дифференциала булевых и псевдобулевых функций, находится необходимое условие оптимальности управления.

Введение. Модулярные динамические системы (МДС) относятся к классу дискретных управляюших динамических систем [1-4]. Они широко применяются в компьютерной технике, системах диагностики, кодировании и декодировании дискретных сообщений, в криптографии, моделировании, управлении объектов и т.д. [1, 3–11]. В некоторых применениях МДС сталкиваются нахождения оптимальных процессов. К таким задачам относится задача оптимального синтеза, задача оптимального управления и т.д. Задача оптимального синтеза имеет теоретический и прикладной характер и к настоящему времени различные аспекты этой задачи для некоторых классов двоичных МДС, заданных в виде двухзначного аналога полинома Волтерра, исследованы достаточно [12-23]. А задача оптимального управления для МДС исследована недостаточно. В данной работе, используя понятия производных булевых и псевдобулевых функций, получены необходимые условия оптимальности для некоторого класса задач оптимального управления двоичных МДС.

Рассмотрим функцию $f(x_1,...,x_n)$, где $x_\alpha \in B$, $\alpha = \overline{1,n}$ и $B = \{0,1\}$, т.е. множество есть бинарное множество. Если для всех $(x_1,...,x_n) \in B^n = B \times ... \times B$ удовлетворяется $f(x_1,...,x_n) \in B$, тогда функция $f(x_1,...,x_n)$ называется булевой функцией. Ясно, что во множестве B^n существуют 2^n $n-$мерных наборов.

Производная булевых функций $f(x_1,...,x_n)$ по переменной x_i понимается в следующим смысле [24]:

$$\frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_i} = f(x_1,...,x_{i-1},1,x_{i+1},x_n) \oplus f(x_1,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n).$$

Для дифференциала $\delta f(x_1,\dots,x_n)$ булевой функции $f(x_1,...,x_n)$ справедливо [6]

$$\delta f(x_1,...,x_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{1\le j_1<...<j_\alpha\le n} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_{j_1}...\partial x_{j_\alpha}} \delta x_{j_1}...\delta x_{j_\alpha}, \quad GF(2), \tag{1}$$

где $\delta x_{j_k} \in \{0,1\}$, $k = \overline{1,\alpha}$. Ясно, что если функция $f(x_1,...,x_n)$ есть линейная функция, тогда в формуле (1) смешанные производные отсутствуют и поэтому формула (1) имеет следующий вид:

$$\delta f(x_1,...,x_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha.} \delta x_\alpha, \ GF(2).$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x_1,...,x_n)$ где $x_\alpha \in B$, $\alpha = \overline{1,n}$. Если для всех $(x_1,...,x_n) \in B^n$ удовлетворяется $f(x_1,...,x_n) \in R$, тогда функция $g(x_1,...,x_n)$ называется псевдобулевой функцией, где R есть множество вещественных чисел.

Производные псевдобулевых функций $\varphi : B^n \to R$ понимаются в следующем смысле [25]:

$$\frac{\partial \varphi(x_1,...,x_n)}{\partial x_\alpha} = \varphi(x_1,...,x_{\alpha-1},1,x_{\alpha+1},x_n) - \varphi(x_1,...,x_{\alpha-1},0,x_{\alpha+1},...,x_n).$$

Всякая псевдобулевая функция линейна по каждому аргументу. Следовательно, для дифференциала псевдобулевой функции справедливо

$$\delta\varphi(x_1,...,x_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{1 \le j_1 < ... < j_\alpha \le n} \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_\alpha}} \delta x_{j_1} ... \delta x_{j_\alpha}, \tag{2}$$

где $\delta x_{j_\alpha} \in \{0,1\}$, если $x_{j_\alpha} = 0$; $\delta x_{j_\alpha} \in \{0,-1\}$, если $x_{j_\alpha} = 1$. Очевидно, что $\delta x_i = sign\delta x_i \cdot |\delta x_i| = -x_i \cdot |\delta x_i|$. Поэтому в дальнейшем в (2) будем предполагать, что $\delta x_i \in \{0,1\}$ и $\frac{\partial \varphi(\cdot)}{\partial x_i} = -x_i[\varphi(x_1,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n) - \varphi(x_1,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n)]$.

Задача терминального управления. Рассмотрим следующую МДС

$$x[n+1] = f(x[n],u[n]), \ x[0] = a, \ 0 \le n < N, \ \ GF(2), \tag{3}$$

где $x[n] \in GF^m(2)$ - вектор состояния, $u[n] \in GF^r(2)$ - вектор входной последовательности или управления. $N > 1$– заданное натуральное число, a– m–мерный заданный вектор над поле $GF(2)$, $f(\cdot)$– заданная линейная функция.

Задача оптимального управления МДС (3) заключается в определении такого $u[n] \in GF^r(2)$, которое с учетом (3) минимизирует заданный псевдобулевый функционал

$$I = \Phi(x[N]). \tag{4}$$

Задача (3),(4) есть задача терминального управления. Пусть $f(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ таковы, что их смешанные производные равны нулю. Пусть

$$\frac{\partial f(x[n],u[n])}{\partial x[n]} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x[n],u[n])}{\partial x_1[n]},...,\frac{\partial f_1(x[n],u[n])}{\partial x_m[n]} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_{m1}(x[n],u[n])}{\partial x_1[n]},...,\frac{\partial f_m(x[n],u[n])}{\partial x_m[n]} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial f(x[n],u[n])}{\partial u[n]} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x[n],u[n])}{\partial u_1[n]},...,\frac{\partial f_1(x[n],u[n])}{\partial u_r[n]} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_m(x[n],u[n])}{\partial u_1[n]},...,\frac{\partial f_m(x[n],u[n])}{\partial u_r[n]} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi(x[n])}{\partial x[n]} = \left(\frac{\partial \Phi(x[n])}{\partial x_1[n]},...,\frac{\partial \Phi(x[n])}{\partial x_m[n]} \right),$$

Пусть $u^* = \{u^*[0],...,u^*[N-1]\}$ есть оптимальная последовательность, $x^* = \{x^*[0],...,x^*[N]\}$ - соответствующая ей последовательность состояний и $\tilde{u}$ - некоторая измененная входная последовательность, такая что

$$\tilde{u}[k] = u^*[k],\ k \neq n,\ 0 \leq k \leq N-1;\ \tilde{u}[n] = u^*[n] \oplus \delta u^*[n],$$

где $\delta u^*[n] = (\delta u_1^*[n],...,\delta u_r^*[n])$. Тогда $\tilde{x} = \{x^*[0],...,x^*[n],\ \tilde{x}[n+1],...,\tilde{x}[N]\}$.

В силу условий, налагаемых на $f(\cdot)$ справедливо:

$$\tilde{x}[n+1] \oplus x^*[n+1] = \delta x^*[n+1] = \frac{\partial f(x^*[n],u^*[n])}{\partial u[n]} \cdot \delta u^*[n],\ GF(2).$$

Здесь операция умножения по mod 2 заменена обычной операцией умножения. В силу условий, налагаемых на $\Phi(\cdot)$ справедливо

$$\Phi(\tilde{x}[N]) - \Phi(x^*[N]) = \frac{\partial \Phi(x^*[N])}{\partial x[N]} \delta x^*[N] \geq 0\ , \tag{5}$$

$$\tilde{x}[k] \oplus x^*[k] = \delta x^*[k] = \frac{\partial f(x^*[k-1],u^*[k-1])}{\partial x[k-1]} \cdot \delta x^*[k-1],\ GF(2),\ k = n+2,...,N.$$

Правую часть соотношения (5) можно переписать в следующем виде

$$\frac{\partial \Phi(x^*[N])}{\partial x[N]} \left\{ \frac{\partial f(x^*[N-1],u^*[N-1])}{\partial x[N-1]} \cdot \delta x^*[n-1] \right\} =$$

$$= \frac{\partial \Phi(x^*[N])}{\partial x[N]} \left\{ \frac{\partial f(x^*[N-1],u^*[N-1])}{\partial x[N-1]} \cdot \frac{\partial f(x^*[N-2],u^*[N-2])}{\partial x[N-2]} \cdot \delta x^*[n-2] \right\} =$$

$$= \frac{\partial \Phi(x^*[N])}{\partial x[N]} \left\{ \frac{\partial f(x^*[N-1],u^*[N-1])}{\partial x[N-1]} \cdot \frac{\partial f(x^*[N-2],u^*[N-2])}{\partial x[N-2]} \cdot \delta x^*[n-2] \cdot ... \right.$$

$$\left. ... \cdot \frac{\partial f(x^*[n+1],u^*[n+1])}{\partial x[n+1]} \cdot \delta x^*[n+1] \right\} =$$

$$= \frac{\partial \Phi(x^*[N])}{\partial x[N]} \left\{ \frac{\partial f(x^*[N-1],u^*[N-1])}{\partial x[N-1]} \cdot ... \cdot \frac{\partial f(x^*[n+1],u^*[n+1])}{\partial x[n+1]} \cdot \frac{\partial f(x^*[n],u^*[n])}{\partial u[n]} \cdot \delta u[n] \right\}. \tag{6}$$

Здесь операция умножения по mod 2 заменена обычной операцией умножения. Введем следующую сопряженную систему

$$p[N] = \frac{\partial \Phi(x[N])}{\partial x[N]},\quad p[n] = p[n+1]\frac{\partial f(x[n],u[n])}{\partial x[n]},\quad n = N-2, N-3,...,1,0, \tag{7}$$

где $p = (p_1,...,p_m)$ - m-мерный вектор над $GF(2)$. Тогда (6) запишется в виде

$$p^*[n+1]\frac{\partial f(x^*[n],u^*[n])}{\partial u[n]} \delta u^*[n] \geq 0. \tag{8}$$

Введем дискретную функцию Гамильтона [26]

$$H(p^*[n+1],x^*[n],u[n]) = \sum_{i=1}^{m} p_i^*[n+1] \cdot f_i(x^*[n],u[n]). \tag{9}$$

Из (9) видно, что (8) можно записать в виде

$$\frac{\partial H(p^*[n+1],x^*[n],u^*[n])}{\partial u[n]} \delta u^*[n] \geq 0. \tag{10}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $f(x)$ и $\Phi(x[N])$ такие, что их смешанные частные производные равны нулю; $u^* = \{u^*[0],...,u^*[N-1]\}$ - оптимальная входная последовательность задачи (3), (4), а $x^* = \{x^*[0],...,x^*[N]\}$ соответствующая ей последовательность состояния; $p^* = \{p^*[N],...,p^*[0]\}$ - оптимальное решение сопряженного уравнения (7). Тогда для всех $n = 0,...,N-1$ справедливо соотношение (10).

Ясно что, если функция $f(x)$ линейна, а функционал $\Phi(\cdot)$ сепарабельный функционал, тогда их смешанные частные производные равны нулю.

3. Задача оптимального управления Больца. Пусть теперь МДС задана уравнением (3), а функционал качества есть следующий функционал

$$I = \Phi(x[N]) + \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x[k]), \tag{11}$$

где Φ и f_0 - есть сепарабельные псевдобулевые функционалы.

Задача оптимального управления (3),(11), есть задача Больца. Для нахождения необходимого условия оптимальности управления задачи (3),(11), приведем ее к задаче терминального управления. Для этого введем обозначения

$$x_0[n+1] = f_0(x[n], u[n]), \; x[0] = 0, \; GF(2). \tag{12}$$

Ясно, что,

$$x_0[N] = \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x[k], u[k]). \tag{13}$$

На основе (12),(13) введем следующие векторы:

$$\bar{x}[k] = (x_0[k], x_1[k],..., x_m[k]),$$

$$\bar{f}(\bar{x}[k], u[k]) = (f_0(x[k], u[k]), f_1(x[k], u[k]),..., f_m(x[k], u[k])).$$

Пусть,

$$\overline{\Phi}(\bar{x}[N]) = \Phi(x[N]) + x_0[N], \tag{14}$$

$$\bar{x}[n+1] = \bar{f}(\bar{x}[n], u[n]), \;\; GF(2), \tag{15}$$

$$\bar{x}[0] = (0, a_1, a_2,..., a_m) \in GF^{m+1}(2). \tag{16}$$

Таким образом, задача Больца (3),(11) приводится к задаче терминального управления (15),(16),(14).

Пусть, $u^* = \{u^*[0],...,u^*[N-1]\}$ - последовательность оптимального управления, $\bar{x}^* = \{\bar{x}^*[0],...,\bar{x}^*[N]\}$ - соответствующая им последовательность состояния, а $\tilde{u}$ - некоторая измененная входная последовательность и

$$\tilde{u}[k] = u^*[k], \quad \tilde{u}[n] = u^*[n] \oplus \delta u^*[n],$$

где, $\delta u^*[n] = (\delta u_1^*[n],...,\delta u_r^*[n])$. Тогда $\tilde{x} = \{\bar{x}^*[0],...,\bar{x}^*[n], \tilde{x}'[n+1],...,\tilde{x}'[N]\}$.

В силу условий, налагаемых на $f(\cdot)$ справедливо:

$$\tilde{x}[n+1] \oplus x^*[n+1] = \delta x^*[n+1] = \frac{\partial \bar{f}(\bar{x}^*[n], u^*[n])}{\partial u[n]} \cdot \delta u^*[n], \; GF(2),$$

$$\tilde{x}'[k] \oplus \bar{x}^*[k] = \delta x^*[k] = \frac{\partial f(\bar{x}^*[k-1], u^*[k-1])}{\partial \bar{x}[k-1]} \cdot \delta \bar{x}^*[k-1], \; Gf(2),$$

$$k = n+2,..., N.$$

Здесь операция умножения по mod 2 заменена обычной операцией умножения. В силу условий, налагаемых на $\overline{\Phi}(\cdot)$ справедливо

$$\overline{\Phi}(\tilde{x}'[N])-\overline{\Phi}(\overline{x}^*[N])=\frac{\partial\overline{\Phi}(\overline{x}^*[N])}{\partial\overline{x}[N]}\delta\overline{x}^*[N]\geq 0\ . \tag{17}$$

Правую часть соотношения (17) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial\overline{\Phi}(\overline{x}^*[N])}{\partial\overline{x}[N]}\left\{\frac{\partial\bar{f}(\overline{x}^*[N-1],u^*[N-1])}{\partial\overline{x}[N-1]}\cdot\ldots\cdot\frac{\partial\bar{f}(\overline{x}^*[n+1],u^*[n+1])}{\partial\overline{x}[n+1]}\times\right. \tag{18}$$

$$\left.\times\frac{\partial\bar{f}(\overline{x}^*[n],u^*[n])}{\partial u[n]}\cdot\delta u[n]\right\}.$$

Здесь операция умножения по mod 2 заменена обычной операцией умножения. Введем следующую сопряженную систему:

$$\overline{p}[N]=\left(\frac{\partial\overline{\Phi}(\overline{x}[N])}{\partial\overline{x}[N]}\right)^T,\ \overline{p}[n]^T=\overline{p}[n+1]^T\frac{\partial\bar{f}(\overline{x}[n],u[n])}{\partial\overline{x}[n]},\quad n=N-1,N-2,\ldots,1,0, \tag{19}$$

где, вектор $\overline{p}=(p_0,p_1,\ldots,p_m)^T$ над $GF(2)$ есть $(m+1)$-мерный вектор.

Ясно, что второе равенство формулы (19) можно записать в виде:

$$\overline{p}_i[n]=\sum_{j=0}^{m}\overline{p}_j[n+1]\frac{\partial\bar{f}_j(\overline{x}[n],u[n])}{\partial\overline{x}_i[n]},\ i=0,1,\ldots,m.$$

Тогда формулы (18) можно записать в следующим виде:

$$\overline{p}^*[n+1]^T\frac{\partial\bar{f}(\overline{x}^*[n],u^*[n])}{\partial u[n]}\delta u^*[n]\geq 0\,. \tag{20}$$

Введем дискретную функцию Гамильтона:

$$\overline{H}(\overline{p}^*[n+1],\overline{x}^*[n],u[n])=\sum_{i=0}^{m}\overline{p}_i^*[n+1]\cdot\bar{f}_i(\overline{x}^*[n],u[n])\,. \tag{21}$$

Из формулы (21) видно, что формулы (20) можно записать в виде:

$$\frac{\partial\overline{H}(\overline{p}^*[n+1],\overline{x}^*[n],u^*[n])}{\partial u[n]}\delta u^*[n]\geq 0\,,$$

где

$$\frac{\partial\overline{H}(\overline{p}^*[n+1],\overline{x}^*[n],u^*[n])}{\partial u[n]}=\left(\frac{\partial\overline{H}(\overline{p}^*[n+1],\overline{x}^*[n],u^*[n])}{\partial u_1[n]},\ldots,\frac{\partial\overline{H}(\overline{p}^*[n+1],\overline{x}^*[n],u^*[n])}{\partial u_r[n]}\right).$$

Ясно, что

$$\frac{\partial\overline{\Phi}(\overline{x}[N])}{\partial\overline{x}[N]}=\left(\frac{\Phi(x[N])+x_0[N]}{\partial x_0[N]},\frac{\Phi(x[N])+x_0[N]}{\partial x_1[N]},\ldots,\frac{\Phi(x[N])+x_0[N]}{\partial x_1[N]}\right)=$$

$$=\left(1,\frac{\Phi(x[N])}{\partial x_1[N]},\ldots,\frac{\Phi(x[N])}{\partial x_1[N]}\right)=\left(1,\frac{\Phi(x[N])}{\partial x[N]}\right).$$

Поэтому

$$\overline{p}[N]=\begin{pmatrix}1\\ p_1[N]\\ \vdots\\ p_m[N]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ p[N]\end{pmatrix}.$$

Поскольку $\overline{p}[N]=\left(\frac{\partial\overline{\Phi}(\overline{x}[N])}{\partial\overline{x}[N]}\right)^T$ получим, что $p[N]=\left(\frac{\partial\Phi(x^*[N])}{\partial x[N]}\right)^T$.

Запишем выражения $\dfrac{\partial\bar f(\bar x[n],u[n])}{\partial\bar x[n]}$ в открытым виде:

$$\frac{\partial\bar f(\bar x[n],u[n])}{\partial\bar x[n]}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_0(x[n],u[n])}{\partial x_0[n]} & \dfrac{\partial f_0(x[n],u[n])}{\partial x_1[n]} & \cdots & \dfrac{\partial f_0(x[n],u[n])}{\partial x_m[n]}\\ \dfrac{\partial f_1(x[n],u[n])}{\partial x_0[n]} & \dfrac{\partial f_1(x[n],u[n])}{\partial x_1[n]} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x[n],u[n])}{\partial x_m[n]}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial f_m(x[n],u[n])}{\partial x_0[n]} & \dfrac{\partial f_m(x[n],u[n])}{\partial x_1[n]} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x[n],u[n])}{\partial x_m[n]}\end{pmatrix}.$$

Ясно, что

$$\frac{\partial f_0(x[n],u[n])}{\partial x_0[n]}=1,\quad \frac{\partial f_1(x[n],u[n])}{\partial x_0[n]}=0,\dots,\frac{\partial f_m(x[n],u[n])}{\partial x_0[n]}=0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial\bar f(\bar x[n],u[n])}{\partial\bar x[n]}=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{\partial f_0(x[n],u[n])}{\partial x_1[n]} & \cdots & \dfrac{\partial f_0(x[n],u[n])}{\partial x_m[n]}\\ 0 & \dfrac{\partial f_1(x[n],u[n])}{\partial x_1[n]} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x[n],u[n])}{\partial x_m[n]}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \dfrac{\partial f_m(x[n],u[n])}{\partial x_1[n]} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x[n],u[n])}{\partial x_m[n]}\end{pmatrix}.$$

При $n=N-1,N-2,\dots,1,0$ находим выражения $\bar p[n]$:

$$\bar p[N-1]^T=\bar p[N]^T\frac{\partial\bar f(\bar x[N-1],u[N-1])}{\partial\bar x[N-1]}=$$

$$=(1,p_1[N],\dots,p_m[N])\begin{pmatrix}1 & \dfrac{\partial f_0(x[N-1],u[N-1])}{\partial x_1[N-1]} & \cdots & \dfrac{\partial f_0(x[N-1],u[N-1])}{\partial x_m[N-1]}\\ 0 & \dfrac{\partial f_1(x[N-1],u[N-1])}{\partial x_1[N-1]} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x[N-1],u[N-1])}{\partial x_m[N-1]}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \dfrac{\partial f_m(x[N-1],u[N-1])}{\partial x_1[N-1]} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x[N-1],u[N-1])}{\partial x_m[N-1]}\end{pmatrix}=$$

$$=\left(1,\sum_{i=0}^{m}p_i[N]\frac{\partial f_i(x[N-1],u[N-1])}{\partial x_1[N-1]},\dots,\sum_{i=0}^{m}p_i[N]\frac{\partial f_i(x[N-1],u[N-1])}{\partial x_m[N-1]}\right).$$

Отсюда получим, что

$$p_0[N-1]=1,$$

$$p_1[N-1]=\sum_{i=0}^{m}p_i[N]\frac{\partial f_i(x[N-1],u[N-1])}{\partial x_1[N-1]}=p_0[N]\frac{\partial f_0(x[N-1],u[N-1])}{\partial x_1[N-1]}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m} p_i[N]\frac{\partial f_i(x[N-1],u[N-1])}{\partial x_1[N-1]}=\frac{\partial f_0(x[N-1],u[N-1])}{\partial x_1[N-1]}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m} p_i[N]\frac{\partial f_i(x[N-1],u[N-1])}{\partial x_1[N-1]},$$

....

$$p_m[N-1]=\sum_{i=0}^{m} p_i[N]\frac{\partial f_i(x[N-1],u[N-1])}{\partial x_m[N-1]}=p_0[N]\frac{\partial f_0(x[N-1],u[N-1])}{\partial x_m[N-1]}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m} p_i[N]\frac{\partial f_i(x[N-1],u[N-1])}{\partial x_m[N-1]}=\frac{\partial f_0(x[N-1],u[N-1])}{\partial x_m[N-1]}+\sum_{i=1}^{m} p_i[N]\frac{\partial f_i(x[N-1],u[N-1])}{\partial x_m[N-1]}$$

или

$$p[N-1]^T=\frac{\partial f_0(x^*[N-1],u^*[N-1])}{\partial x[N-1]}+p[N]^T\,\frac{\partial f(x^*[N-1],u^*[N-1])}{\partial x[N-1]}\ .$$

Продолжая, таким образом, для $k=N-2,N-3,\ldots,0$ получим, что:

$$p_0[k]=1,$$

$$p_1[k]=\sum_{i=0}^{m} p_i[k+1]\frac{\partial f_i(x[k],u[k])}{\partial x_1[k]}=p_0[k+1]\frac{\partial f_0(x[k],u[k])}{\partial x_1[k]}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m} p_i[k+1]\frac{\partial f_i(x[k],u[k])}{\partial x_1[k]}=\frac{\partial f_0(x[k],u[k])}{\partial x_1[k]}+\sum_{i=1}^{m} p_i[k+1]\frac{\partial f_i(x[k],u[k])}{\partial x_1[k]},$$

....

$$p_m[k]=\sum_{i=0}^{m} p_i[k+1]\frac{\partial f_i(x[k],u[k])}{\partial x_m[k]}=p_0[k+1]\frac{\partial f_0(x[k],u[k])}{\partial x_m[k]}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m} p_i[k+1]\frac{\partial f_i(x[k],u[k])}{\partial x_m[k]}=\frac{\partial f_0(x[k],u[k])}{\partial x_m[k]}+\sum_{i=1}^{m} p_i[k+1]\frac{\partial f_i(x[k],u[k])}{\partial x_m[k]}$$

или получим, что

$$p[k]^T=\frac{\partial f_0(x^*[k],u^*[k])}{\partial x[k]}+p[k+1]^T\,\frac{\partial f(x^*[k],u^*[k])}{\partial x[k]}\ .$$

Из вышеизложенного видно, что для любых $k=N,N-1,\ldots,0$ есть

$$\overline{p}[k]=\begin{pmatrix}1\\ p_1[k]\\ \vdots\\ p_m[k]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ p[k]\end{pmatrix}.$$

По соотношению (21) можно получить следующее:

$$\overline{H}(\overline{p}^*[n+1],\overline{x}^*[n],u[n])=\sum_{i=0}^{m}\overline{p}_i^*[n+1]\cdot\overline{f}_i(\overline{x}^*[n],u[n])=\overline{p}_0^*[n+1]\cdot\overline{f}_0(\overline{x}^*[n],u[n])+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\overline{p}_i^*[n+1]\cdot\overline{f}_i(\overline{x}^*[n],u[n])=p_0^*[n+1]\cdot f_0(\overline{x}^*[n],u[n])+\sum_{i=1}^{m}p_i^*[n+1]\cdot f_i(\overline{x}^*[n],u[n])=$$

$$=f_0(x^*[n],u[n])+\sum_{i=1}^{m}p_i^*[n+1]\cdot f_i(x^*[n],u[n])=H(p^*[n+1],x^*[n],u[n]).$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 2. Пусть булевая функция $f(x)$ линейная, а псевдобулевые функции $\Phi(x[N])$ и $f_0(\cdot)$ сеперабельные; $u^* = \{u^*[0],...,u^*[N-1]\}$ - оптимальная входная последовательность задачи (3),(11), а $x^* = \{x^*[0],\ldots,x^*[N]\}$ соответствующая ей последовательность состояния; $p^* = \{p^*[N],..., p^*[1]\}$ - оптимальное решение следующего сопряженного уравнения

$$p[k]^T = \frac{\partial f_0(x^*[k],u^*[k])}{\partial x[k]} + p[k+1]^T \frac{\partial f(x^*[k],u^*[k])}{\partial x[k]},\ k = N-1,...,1,0,$$

$$p[N] = \left(\frac{\partial \Phi(x^*[N])}{\partial x[N]}\right)^T.$$

Тогда для всех $n = 0,\ldots,N-1$ справедливо соотношение

$$\frac{\partial H(p^*[n+1],x^*[n],u^*[n])}{\partial u[n]}\delta u^*[n] \ge 0,$$

где $H(p^*[n+1],x^*[n],u[n]) = f_0(x^*[n],u[n]) + \sum_{k=1}^{m} p_k^*[n+1]\cdot f_k(x^*[n],u[n])$.

4. Заключение. В работе, получены необходимые условия оптимальности управления, которые являются двухзначным аналогом принципа Понтрягина. Эти необходимые условия оптимальности могут быть обобщены и для других классов МДС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фараджев Р.Г. Линейные последовательностные машины. М.: Советское радио, 1975, 248 с.
2. Блюмин С.Л., Фараджев Р.Г. Анализ и синтез конечных линейных последовательностно-клеточных машин// Автоматика и телемеханика. №6. М.: Наука, 1981, с. 57-66
3. Фараджев Р.Г., Фейзиев Ф.Г. Методы и алгоритмы решения задачи квадратичной оптимизации для двоичных последовательностных машин. Баку: Элм, 1996, 180 с.
4. Фейзиев Ф.Г., Фараджева М.Р. Модулярные последовательностные машины: основные результаты по теории и приложению. Баку: Элм, 2006, 234 с.
5. Скобелев В.В. Автоматы на алгебраических структурах (обзор) // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 2. с. 58-66
6. Фейзиев Ф.Г. Основы построения и применения конечно-последовательностных моделей. Баку: Элм, 1999, 126 с.
7. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки. М.: Мир, 1986. 576 с.
8. Латыпов Р.Х., Нуруддинов Ш.Р., Столов Е.Л., Фараджев Р.Г. Применение теории линейных последовательностных машин в системах диагностирования // Автоматика и телемеханика. №8. М.: Наука, 1988, с. 3-27
9. Nagiyev A.T., Feyziyev F.G. The sequential cellular-machining model of the continuous objects with distributing parameters // Seminarberichte, Fachbereich Mathematic. 2001. Bd.71. pp.31-43
10. Фейзиев Ф.Г. Конечно-последовательностная модель некоторого класса объектов с распределенными параметрами // Электронное моделирование. Т.24, №4. 2002, с.99-112
11. Фейзиев Ф.Г., Бабаванд А.М. Описание декодирование циклических кодов в классе последовательностных машин, основанного на теореме Меггитта // Автоматика и вычислительная техника. т. 46, №4. 2012, с.26-33

12. Фараджев Р.Г., Нагиев А.Т., Фейзиев Ф.Г. Аналитическое описание и квадратичная оптимизация двоичных многомерных нелинейных последовательностно-клеточных машин // Докл. РАН. 1998. т. 360. № 6. с. 750- 752
13. Фейзиев Ф.Г., Самедова З.А. Полиномиальное соотношение для представления полной реакции $3D$- нелинейных модулярных динамических систем // Электронное моделирование. т. 33. №2. 2011. с.33-50.
14. Фейзиев Ф.Г., Мехтиева М.Р., Гусейнова А.Дж. Двухзначный аналог полинома Вольтерры для описания полной реакции двоичных многомерных нелинейных модулярных динамических систем // Электронное моделирование. т. 39, № 3. 2017. с.3-15.
15. Фейзиев Ф.Г., Абаева Н.Б. Полиномиальное соотношение для представ-ления полной реакции одного класса двоичных 4D-модулярных динамических систем // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. Вып. 2(45). 2019. с.46-54
16. Фейзиев Ф.Г., Мехтиева М.Р. Аналитическое представление полной акции одного класса двоичных $3D$-многомерных нелинейных модулярных динамических систем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. № 49. 2019. с.82–91.
17. Фейзиев Ф.Г., Мехтиева М.Р., Байрамова А.А. Полиномиальное представление полной реакции одного класса двоичных модулярных динамических систем // Сумгаитский государственный университет. Научные известия. Серия: Естественные и технические науки. т.20, № 1. Сумгаит: СГУ, 2002, с. 72-74; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43177818
18. Байбатшаев М.Ш., Попков Ю.С. Об одной задаче квадратичной оптимизации двоичных нелинейных последовательностных машин // Автоматика и телемеханика. №12. 1978. с. 37-47
19. Фараджев Р.Г., Фейзиев Ф.Г. К задаче квадратичной оптимизации для двоичных многомерных нелинейных последовательностно-клеточных машин // Автоматика и телемеханика. №5. 1996. с.104-119
20. Фейзиев Ф.Г., Самедова З.А. Задача синтеза двоичных $3D$–нелинейных модулярных динамических систем // Известия НАН Азербайджана, сер. физ.-техн. и мат. наук: Информатика и проблемы управления, Т. XXIX, №6, 2009, с.126-133.
21. Фейзиев Ф.Г., Абаева Н.Б. Задача оптимального синтеза двоичных $4D$- нелинейных модулярных динамических систем// Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. № 53. 2020, с.102-109
22. Фейзиев Ф.Г., Самедова З.А. Условия ортогональности для входных последовательностей двоичных $3D$–нелинейных модулярных динамических систем // Известия НАН Азербайджана, сер. физ.-техн. и мат. наук: Информатика и проблемы управления, т.XXX, №3, 2010, с.115-124.
23. Фараджев Р.Г., Фейзиев Ф.Г. Алгоритм построения ортогональных тестовых последовательностей для двоичных многомерных нелинейных последовательностно-клеточных машин// А и Т, №6, 1996, с.114-124
24. Бохманн Д., Постхоф Х. Двоичные динамические системы. М.: Энергоиздат, 1986, 400 с.
25. Саати Т. Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы. М.: Мир, 1973, 304 с.
26. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973, 258 с.

XÜLASƏ

İKİLİK XƏTTİ MODULYAR DİNAMİK SİSTEMLƏRİN BƏZİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRİNDƏ İDARƏETMƏNİN ZƏRURİ OPTİMALLIQ ŞƏRTLƏRİ

Feyziyev F.G., Həsənli N.İ.

***Açar sözlər**: ikilik xətti modulyar dinamik sistemlər, terminal optimal idarəetmə, Bolsa məsələsi, bul və psevdobul funksiyalar, idarəetmənin zəruri optimallıq şərtləri*.

Bir sinif ikilik xətti modulyar dinamik sistemlər üçün terminal optimal idarə-etmə məsələsinə baxılır. Bul və psevdobul funksiyalarının törəmə və diferensialı anlayışlarından, diskret Hamilton funksiyasindan və qoşma sistemdən istifadə etməklə optimal idarəetmə məsələsində idarəetmənin zəruri optimallıq şərtləri tapılır. Sonra bir sinif ikilik xətti modulyar dinamik sistemlər üçün Bolsa məsələsinə baxılır. Xüsusi işarələmədən istifadə etməklə Bolsa məsələsi terminal optimal idarəetmə məsələsinə gətirilir və beləliklə, Bolsa məsələsində idarəetmənin zəruri optimallıq şərtləri tapılır.

SUMMARY

A NECESSARY CONDİTİONS FOR OPTİMALİTY CONTROLS İN SOME PROBLEMS OF OPTİMAL CONTROL PROBLEMS FOR BİNARY LİNEAR MODULAR DYNAMİC SYSTEMS

Feyziyev F.G., Hasanli N.I.

***Key words**: binary linear modular dynamic system, terminal optimal control; the Bolza problem, boolean and psevdoboolean functions, necessary conditions for the optimality of control*

The problem of terminal optimal control for one class of binary linear modular dynamical systems are considered. Using the concept of the derivative and differential of boolean and psevdoboolean functions, the discrete Hamilton function and the adjoint system, a necessary conditions for the optimality of control is find. Next, the Bolza problem for one class of binary linear modular dynamical systems are considered. Using the spesial notation, the Bolza problem is reduced to the problem of terminal control and in this way, the necessary conditions for the optimality for Bolza problem is find.

Daxilolma tarixi:	İlkin variant	20.06.2021
	Son variant	12.07.2021