OXUCULARIN NƏZƏRİNƏ:

Elektron resursda olan qüsurlar kitabın orijinal variantında olduğu kimidir.

Л. Ш. АБДУЛКӘРИМОВ, Ј. Р. БАХШӘЛИЈЕВ, Р. Ә. ЕЈЈУБОВ,
Һ. А. ӘКБӘРОВА, Ф. Һ. ӘФӘНДИЈЕВ, Ш. С. АБДУЛЛАЈЕВ

ЧӘБР ВӘ ӘДӘДЛӘР НӘЗӘРИЈЈӘСИ

(IV ҺИССӘ)

ДӘРС ВӘСАИТИ

БАКЫ—1995

Ә.Ш.АБДУЛКӘРИМОВ, Ј.Р.БАХШӘЛИЈЕВ, Р.С.ЕЈЈУБОВ,
Һ.А.ӘКБӘРОВА, Ф.Һ.ӘФӘНДИЈЕВ, Ш.С.АБДУЛЛАЈЕВ

ҸӘБР ВӘ ӘДӘДЛӘР НӘЗӘРИЈӘСИ

(IV һиссә)

ДӘРС ВӘСАИТИ

Б А К Ы ---------1995

Азәрбајҹан республикасы ЕА-нын мүхбир үзвү, әмәкдар елм хадими, Гаис Һәбиб оғлу Чавадовун әзиз хатирәсинә һәср олунур.

УДК 512

Ә.Ш.Абдулкәримов, Ј.Р.Бахшәлијев, Р.Ә.Ејјубов, Һ.А.Әкбәрова,
Ф.Һ.Әфендијев, Ә.С.Абдуллајев

"Чәбр вә әдәдләр нәзәријјәси"
(IV һиссә)

Бу дәрс вәсаити 1989, 1990 вә 1992-ҹи илләрдә дәрч олунмуш "Чәбр вә әдәдләр нәзәријјәси" (I, II, III һиссәләр) китабларынын давамы олуб үч фәсилдән ибарәтдир. "Евклид фәзалары"; "Хәтти операторлар", "Групплар". Дәрс вәсаити әсасән Республика Педагожи Университетинин вә институтларынын ријазијјат, физика факултәләринин тәләбәләри үчүн нәзәрдә тутулмушдур. Бу вәсаитдән һәмчинин ријазијјат мүәллимләри дә истифадә едә биләрләр.

Елми редактору: дос. Һ.Һашымов

Рә'јчиләр:
1. АДПУ-нун ријазијјат факултәсинин деканы, дос. Ч.Н.Сүлејманов.
2. Һесаблама ријазијјаты вә еһтимал нәзәријјәси кафедрасынын үзвү, дос. В.М.Чаббарзадә.

Темплан 1994 № 56

КИРИШ.

Бу дәрс вәсаити Азәрбајҹан Дөвләт Педагожи Университетинин ријазијјат факултәсиндә тәдрис олунан чәбр вә әдәдләр нәзәријјәси фәнни програмы әсасында тәртиб олунан 4-чү китабдыр. Китаб үч фәсилдән ибарәтдир:

VIII фәсил ---Евклид фәзалары,
IX фәсил ---Хәтти операторлар,
X фәсил ----Групплар.

VIII фәсилдә Евклид фәзасынын тә'рифи, она аид мисаллар, скалјар һасилин садә хассәләри верилдикдән сонра, сонлу өлчүлү фәзанын Евклид фәзасына чеврилмәјин мүмкүнлүјү көстәрилмишдир. Сонра ортогонал векторлар системи, онун хассәләри, ортогонал базис, алтфәзанын ортогонал тамамлајычысы, ортогонал ҹәм кими ајрылышлар вә онлара аид хассәләр, Евклид фәзасында векторун нормасы вә онун хассәләри, нормаја аид бәрабәрсизликләр, ортонормал векторлар системи, ортогонал базис вә онун варлығы, базисин ортонормал олмасы шәрти, Бессел бәрабәрсизлији, Парсевал бәрабәрлији, Евклид фәзаларынын изоморфизми шәрһ олунмушдур.

Хәтти операторлар адланан IX фәсилдә хәтти операторларын әсас хассәләри, хәтти операторлар фәзасы, хәтти операторлар чәбри, хәтти операторун матриси, онун хассәләри, хәтти операторлар чәбри илә n-тәртибли квадрат матрисләр чәбринин изоморфизми, операторун мүхтәлиф базисләрә нәзәрән матрисләри арасында әлагә, тәрс оператор, онун хассәләри, хәтти операторун нүвәси вә образы, хәтти операторун мәхсуси әдәди вә мәхсуси вектору анлајышларына аид хассәләр, садә структурлу хәтти операторлара аид хассәләр шәрһ олунмушдур.

X фәсил јарымгруп вә моноид анлајышына аид хассәләрлә башлајыр, сонра групун тә'рифи, она аид мисаллар көстәрилир вә садә хассәләри исбат олунур. Даһа сонра групларын изоморфизми, алтгруп, Кели теореми, тсиклик груп, онун хассәләри, дөври алтгруплар, алтгрупа нәзәрән ајрылыш, Лагранж теореми, групун нормал бөләни, групларын һомоморфизми, онун хассәләринә аид дәрс програмында нәзәрдә тутулан материаллар әтрафлы шәкилдә верилмишдир.

VII фəсил.

Евклид фəзалары.

Векторлар фəзасы, үзəриндə топлама вə скалјара вурма əмəллəри тə"јин олунмуш чохлуг кими тə"риф олунмушду. Бу əмəллəрин көмəји илə дүз хəтт, мүстəви, параллел дүз хəтлəр, фəзанын өлчүсү вə с. кими анлајышлары вермəк мүмкүндүр. Бунунла белə, бу анлајышларын көмəји илə евклид һəндəсəсинə аид олан бүтүн фактларын мəчмусуну тəмин етмəк мүмкүн дејил. Векторун узунлуғу, векторлар арасындакы бучаг, векторларын скалјар һасили вə с. кими анлајышлары вə онларын хассəлəрини вермəк үчүн Евклид фəзасы анлајышы дахил едилмəлидир.

§ 1. Евклид фəзасынын тə"рифи.

Фəрз едəк ки, $\mathcal{P}$ əдəди мејданы үзəриндə n-өлчүлү $\mathcal{L}$ хəтти фəзасы верилмишдир. Һəр бир $x,y\in\mathcal{L}$ векторлары үчүн $\mathcal{P}$ мејданындан (x,y) кими ишарə олунмуш бир əдəд гаршы гојан ујғунлуг ашағыдакы шəртлəри өдəјəрсə, онда $\mathcal{L}$ фəзасында тə"јин олунмуш скалјар һасил дејилир.

I. $\forall\, x,y\in\mathcal{L}$ үчүн $(x,y)=\overline{(y,x)}$.

II. $\forall\, x,y\in\mathcal{L}$ үчүн $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$.

III. $\forall\, x,y\in\mathcal{L}$ вə $\forall\alpha\in\mathcal{P}$ үчүн $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$.

IV. $\forall\, x\in\mathcal{L}$ үчүн $(x,x)\geq 0$ вə $(x,x)=0$ гијмəти анчаг $x=\theta$ олдугда алыныр.

Бурада $\overline{(y,x)}$ илə (y,x)-ин гошмасы ишарə едилмишдир.

Тутаг ки, $\mathcal{P}$ əдəди мејданы үзəриндə скалјар һасил тə"јин олунмуш n-өлчүлү $\mathcal{L}$ хəтти фəзасы верилиб. Əгəр $\mathcal{P}$ – һəгиги əдəдлəр мејданы оларса, $\mathcal{L}$-ə n-өлчүлү һəгиги евклид фəзасы, комплекс əдəдлəр мејданы оларса $\mathcal{L}$-ə n-өлчүлү комплекс евклид фəзасы дејилир.

Биз n-өлчүлү һəгиги вə ја комплекс евклид фəзасыны E_n илə ишарə едəчəјик. Бу фəзаларын һəр икисинə мəхсус хассəлəри өјрəнəркəн E_n-и садəчə оларағ евклид фəзасы адландырачағыг.

Əгəр $\mathcal{P}$ – һəгиги əдəдлəр мејданы оларса, $(x,y)=\overline{(x,y)}$ олдуғундан, һəгиги евклид фəзасында скалјар һасилин өдəдији биринчи шəрт $(x,y)=(y,x)$ шəклинə дүшүр.

Мисал 1: Һəгиги əдəдлəр мејданы үзəриндə n-өлчүлү һесаби векторлар фəзасында ихтијари ики

$$x=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \quad \text{вə} \quad y=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$$

векторларынын скалјар һасилини

$$(x,y)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\dots+\alpha_n\beta_n \tag{1}$$

шəклиндə тə"јин етсəк, скалјар һасилин тə"рифиндəки бүтүн шəртлəрин өдəндијини асанлыгла јохламаг олар. Доғрудан да

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\alpha_i=(y,x)$$

олдуғундан I-шəрт өдəнилир.

Тутаг ки, $x\neq\theta$, бу о демəкдир ки, $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ координатларындан һеч олмаса бири сыфырдан фəрглидир. Онда $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ əдəдлəринин һəгиги əдəдлəр олдуғуну нəзəрə алсаг,

$$(x,x)=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\dots+\alpha_n^2>0$$

олдуғуну јаза билəрик. Бурадан чыхыр ки, IV шəрт өдəнилир. Асанлыгла II вə III шəртлəрин өдəндијини дə јохламаг олур. Демəли һəгиги əдəдлəр мејданы үзəриндə n-өлчүлү һесаби векторлар фəзасында скалјар һасил (1) бəрабəрлији илə тə"јин едилдикдə бу фəза һəгиги евклид фəзасына чеврилир.

Мисал 2: Комплекс əдəдлəр мејданы үзəриндə n-өлчүлү һесаби векторлар фəзасында ихтијари ики

$$x=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \quad \text{вə} \quad y=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$$

векторлары үчүн скалјар һасили

$$(x,y)=\alpha_1\overline{\beta}_1+\alpha_2\overline{\beta}_2+\dots+\alpha_n\overline{\beta}_n \tag{2}$$

шəклиндə тə"јин етсəк, бу фəзанын n-өлчүлү комплекс евклид фəзасы олдуғуну асанлыгла јохламаг олар.

Гејд едəк ки, комплекс əдəдлəр мејданы үзəриндə n-өлчүлү һесаби векторлар фəзасында скалјар һасил (1) бəрабəрлији илə тə"јин едилə билмəз. Доғрудан да хүсуси һалда $n=3$

$$x=(i,0,i)$$

көтүрсәк ашкардыр ки, $x \neq \theta$ вә

$$(x,x) = i^2 + 0 + i^2 = -2 < 0$$ олур.

Јә'ни скалјар һасилин тә'рифиндәки IY шәрти өдәнилмир.

Теорем: Һәгиги (комплекс) әдәдләр мејданы үзәриндә верилмиш ихтијари n-өлчүлү $\mathcal{L}$ хәтти фәзасында скалјар һасил тә'јин етмәк мүмкүндүр. Јә'ни белә фәзаны һәмишә евклид фәзасына чевирмәк мүмкүндүр.

Исбаты: $\mathcal{L}$ фәзасында һәр һансы $a_1, a_2, \dots, a_n$ базиси көтүрәк. Онда $\forall x, y \in \mathcal{L}$ үчүн

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n,$$

$$y = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$$

ајрылышларыны јаза биләрик.

Әҝәр $\mathcal{L}$ һәгиги әдәдләр мејданы үзәриндә вериләрсә, скалјар һасили

$$(x,y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n \tag{3}$$

шәклиндә, $\mathcal{L}$ комплекс әдәдләр мејданы үзәриндә вериләрсә

$$(x,y) = \alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2} + \dots + \alpha_n\overline{\beta_n} \tag{4}$$

шәклиндә тә'јин етсәк, асанлыгла јохламаг олар ки, скалјар һасилин тә'рифиндәки бүтүн шәртләр өдәнилир. Демәли (3) бәрабәрлији илә верилән скалјар һасил n-өлчүлү һәгиги $\mathcal{L}$ хәтти фәзасыны n-өлчүлү һәгиги евклид фәзасына, (4) бәрабәрлији илә верилән скалјар һасил исә, n-өлчүлү комплекс $\mathcal{L}$ хәтти фәзасыны n-өлчүлү комплекс евклид фәзасына чевирир.

Мә'лумдур ки, фәзада базис мүхтәлиф үсулларла сечилә биләр. Јухарыдакы теоремин исбатында скалјар һасилин верилмәси гајдасындан ајдын олур ки, ејни бир хәтти фәзада мүхтәлиф скалјар һасилләр тә'јин етмәк мүмкүндүр. Демәли ејни бир хәтти фәзада мүхтәлиф скалјар һасилләр тә'јин етмәклә мүхтәлиф евклид фәзалары гурмаг мүмкүндүр.

§ 2. ОРТОГОНАЛ ВЕКТОРЛАР СИСТЕМИ.

Тутаг ки, истәнилән n-өлчүлү E_n евклид фәзасы верилмишдир. Әҝәр $x, y \in E_n$ векторлары үчүн $(x,y)=0$ оларса, x вә y векторларына ортогонал векторлар дејилир. Башга сөзлә скалјар һасили сыфра бәрабәр олан векторлар ортогонал векторлар адланыр.

Скалјар һасилин III шәртиндә $\alpha = 0$ көтүрсәк, $(\theta, y) = 0$ аларыг. Јә'ни сыфыр вектор фәзанын истәнилән векторуна ортогоналдыр. Анҹаг сыфырдан фәргли ортогонал векторларда вардыр. Мәсәлән, n-өлчүлү һесаби векторлар фәзасында скалјар һасил (I) бәрабәрлији илә тә'јин едилдикдә,

$$x = (1, 0, \dots, 0) \text{ вә } y = (0, 0, \dots, 1)$$

векторларына бахсаг $(x,y) = 0$ олдуғуну ҝөрәрик.

$x_1, x_2, \dots, x_s$ векторлар системиндә $(x_i, x_j) = 0$ $(i \neq j;\ i,j = \overline{1,s})$ оларса, белә векторлар системинә ортогонал векторлар системи дејилир.

Теорем: Һәр бир вектору сыфырдан фәргли олан истәнилән ортогонал векторлар системи хәтти асылы дејил.

Исбаты: Тутаг ки, E_n евклид фәзасында ортогонал $x_1, x_2, \dots, x_s$ векторлары системи верилмишдир, белә ки, $x_i \neq \theta$, $i = 1, 2, \dots, s$.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_s x_s = \theta$$

бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфини x_i $(1 \le i \le s)$ векторуна скалјар вурсаг аларыг.

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_s x_s,\ x_i) = (\theta, x_i)$$

Бурадан

$$\alpha_1(x_1, x_i) + \dots + \alpha_i(x_i, x_i) + \dots + \alpha_s(x_s, x_i) = 0$$

олдуғу алыныр. Системин ортогоналлығыны нәзәрә алсаг, сонунҹу бәрабәрликдән аларыг ки,

$$\alpha_i(x_i, x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Шерте кере $x_i \neq \theta$ $(i=\overline{1,s})$ олдуғундан чыхыр ки,

$$\alpha_i = 0, \quad i=1,2,\ldots,s.$$

Jе"ни $x_1, x_2, \ldots, x_s$ система хетти асылы дејил. Индики авандакы меселеје бахаг. Тутаг ки, E_n евклид фезасынын k сајда хетти асылы олмајан

$$x_1, x_2, \ldots, x_k \tag{5}$$

векторлары системи верилмишдир. E_n фезасында һер бир векторы сыфырдан фергли олан k сајда еле

$$y_1, y_2, \ldots, y_k \tag{6}$$

системи гурмалы ки, бу систем ортогонал систем олсун. Биз ашағыда (5) системине есасен (6) системинин гурулмасынын бир методуну кестереҹејик. Гејд едек ки, (5) системине есасен (6) системинин гурулмасы ортогоналлашдырма просеси адланыр. Ајдындыр ки, јени гурулан (6) системи хетти асылы олмајан векторлар системи олаҹаг.

$$y_1 = x_1 \text{ габул едек, } \quad y_2 = \alpha_1 y_1 + x_2$$

шеклинде ахтараг. $y_1 = x_1$ олдуғундан ве x_1, x_2 системи хетти асылы олмадығындан чыхыр ки, истенилен α_1 ededi үчүн $y_2 \neq \theta$ олаҹаг.

Инди α_1 ededини еле сечек ки, y_2 вектору y_1-е ортогонал олсун.

$$0 = (y_2, y_1) = (\alpha_1 y_1 + x_2, y_1) = \alpha_1 (y_1, y_1) + (x_2, y_1).$$

Бурадан $(y_1, y_1) > 0$ олдуғундан

$$\alpha_1 = -\frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)}$$

тапырыг.

Демели һер бири сыфырдан фергли y_1, y_2 ортогонал системини гурдуг.

Инди тутаг ки, һер бири сыфырдан фергли, ортогонал

$$y_1, y_2, \ldots, y_m$$

векторлары системи артыг гурулмушдур. Бундан е аве ферз едек ки, һер бир i үчүн y_i $(1 \le i \le m)$ вектору, $x_1, x_2, \ldots, x_i$ векторларынын хетти комбинасијасындан

ибаретдир.

Екер y_{m+1} вектору

$$y_{m+1} = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots + \beta_m y_m + x_{m+1}$$

шеклинде сечилмерсе, бу ферзијје y_{m+1} вектору үчүн де өденер. Бу заман y_{m+1} сыфырдан фергли вектор олаҹаг, чүнки (5) системи хетти асылы дејил ве x_{m+1} вектору $y_1, y_2, \ldots, y_m$ векторларынын јаралышына дахил дејил. β_i $(i=1,2,\ldots,m)$ емсалларыны еле сечек ки, јени гурулан y_{m+1} вектору $y_1, y_2, \ldots, y_m$ векторларынын һер бирине ортогонал олсун.

$$0 = (y_{m+1}, y_i) = (\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m + x_{m+1}, y_i)$$

Бурада, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ векторларынын чүт-чүт ортогонал олдуғуну незере алсаг, аларыг

$$\beta_i (y_i, y_i) + (x_{m+1}, y_i) = 0$$

jе"ни

$$\beta_i = -\frac{(x_{m+1}, y_i)}{(y_i, y_i)},$$

$$i = 1,2,\ldots,m.$$

Беләликле просеси давам етдиререк һер бири сыфырдан фергли ортогонал $y_1, y_2, \ldots, y_k$ системини гурурug.

Теорем: Истенилен евклид фезасынын ортогонал базиси вар, беле ки, бу фезанын сыфырдан фергли истенилен вектору мүејјен ортогонал базисин теркибине дахилдир.

Исбаты: Билирик ки, хетти фезанын сыфырдан фергли истенилен вектору онун мүејјен базисинин теркибине дахилдир. E_n евклид фезасында верилмиш ихтијари сыфырдан фергли векторун дахил олдуғу базислерден бирини кетүрек ве бу вектору һемин базисде биринҹи јерде јазаг. Сонра исе јухарыда кестерилен ортогоналлашдырма просесини тетбиг едек. Онда биринҹи һер бири сыфырдан фергли n сајда ортогонал векторлар системи аларыг. Билдијимиз кими бу систем хетти асылы дејил. Онларын сајы исе n олдуғундан бу систем E_n-ин базисини, һем де ортогонал базисини тешкил едир.

§ 3. АЛТФӘЗАНЫН ОРТОГОНАЛ ТАМАМЛАЈЫҸЫСЫ.

Евклид фәзасынын $\mathcal{U}$ алтчохлуғунун истәнилән вектору $\mathcal{V}$ алтчохлуғунун истәнилән векторуна ортогонал оларса, дејирләр ки, $\mathcal{U}$ чохлуғу $\mathcal{V}$ чохлуғуна ортогоналдыр. Хүсуси һалда a вектору $\mathcal{V}$ чохлуғунун истәнилән векторуна ортогонал оларса дејирләр ки, a вектору $\mathcal{V}$ чохлуғуна ортогоналдыр. $\mathcal{U}$ чохлуғунун $\mathcal{V}$ чохлуғуна ортогоналлығы $\mathcal{U}\perp\mathcal{V}$ кими ишарә едилир.

Теорем 1: $\mathcal{U}$ вә $\mathcal{V}$ алтчохлуглары ортогонал олдуғда онларын кәсишмәсинә сыфырдан фәргли һеч бир вектор дахил дејил.

Доғрудан да, $\theta \neq a$ вектору һәм $\mathcal{U}$ һәм дә $\mathcal{V}$ чохлугларына дахилдирсә, онда $(a,a)=0$ мүнасибәти доғру олар. Бурадан да $a=\theta$ алынар ки, бу да шәртә зиддир.

$\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_m$ алтфәзалары бири-биринә ортогонал олдуғда $\mathcal{U}=\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2+\dots+\mathcal{U}_m$ ҹәми ортогонал ҹәм адланыр.

Теорем 2: Алтфәзаларын ортогонал ҹәми дүз ҹәмдир.

Исбаты: Әҝәр ҹәм ики топланандан ибарәтдирсә, онда ҹәмин дүз ҹәм олмасы критеријасына әсасән теорем I-дән бу ҹәмин дүз ҹәм олмасы чыхыр.

Фәрз едәк ки, $\mathcal{U}=\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2+\dots+\mathcal{U}_s$ ҹәми үчүн теоремин һөкмү доғрудур. Онда $\mathcal{U}+\mathcal{U}_{s+1}$ ҹәми дә ики алтфәзанын ортогонал ҹәми кими дүз ҹәмдир. Демәли теоремин һөкмү $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2+\dots+\mathcal{U}_s+\mathcal{U}_{s+1}$ ҹәми үчүн дә доғрудур.

Фәрз едәк ки, Евклид фәзасынын $\mathcal{U}$ алтфәзасы верилмишдир. $\mathcal{U}$-ја ортогонал олан бүтүн векторлар чохлуғу $\mathcal{U}$ чохлуғунда ортогонал тамамлајыҹысы адланыр вә $\mathcal{U}^{\perp}$ кими ишарә олунур.

Теорем 3: Бош олмајан истәнилән $\mathcal{U}$ чохлуғунун ортогонал тамамлајыҹысы хәтти алтфәзадыр.

Исбаты: Ихтијари $a, b \in \mathcal{U}^{\perp}$ ҝөтүрәк. Онда ихтијари $c \in \mathcal{U}$ вектору α вә β әдәдләри үчүн

$$(\alpha a+\beta b, c)=\alpha(a,c)+\beta(b,c)=0$$

Демәли, $\alpha a+\beta b \in \mathcal{U}^{\perp}$. Бу исә ҝөстәрир ки, $\mathcal{U}^{\perp}$ алтфәзадыр.

Теорем 4: E евклид фәзасы ихтијари $\mathcal{U}$ алтфәзасы илә онун ортогонал тамамлајыҹысынын дүз ҹәминә бәрабәрдир.

Исбаты: Фәрз едәк ки, $e_1, e_2, \dots, e_m$ векторлар системи $\mathcal{U}$-нун, $e_{m+1}, \dots, e_s$ исә $\mathcal{U}^{\perp}$-нын

ортогонал базисләридир. Ҝөстәрәк ки, $e_1, e_2, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_s$ системи E-нин базисидир. Әксини фәрз едәк. Онда $e_1, e_2, \dots, e_s$ системини ортогонал базисә тамамламаг олар. Фәрз едәк ки, e вектору ортогонал базисә тамамлајан векторлардан бирдир. e вектору $e_1, e_2, \dots, e_m$ векторларынын һәр биринә ортогонал олдуғуна ҝөрә бу вектор ихтијари $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ әдәдләри үчүн $\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\dots+\alpha_m e_m$ векторуна да ортогоналдыр. Одур ки, e вектору $\mathcal{U}=\{\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\dots+\alpha_m e_m\}$ алтфәзасына да ортогоналдыр. Демәли, e вектору $\mathcal{U}^{\perp}$-а дахилдир. Онда $e_{m+1}, \dots, e_s, e$ ортогонал векторлар системи хәтти асылы олмајан систем олар. Бу исә $e_{m+1}, \dots, e_s$ системинин $\mathcal{U}^{\perp}$-нин базиси олмасы шәртинә зиддир. Бу теоремин нәтиҹәси кими әввәлки теореми дә сөјләмәк олар.

Теорем 5: $\mathcal{U}$ алтфәза олдуғда $\mathcal{U}^{\perp\perp}=\mathcal{U}$.

Исбаты: $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}^{\perp\perp}$ олдуғу ајдындыр. Фәрз едәк ки, $x \in \mathcal{U}^{\perp\perp}$. Онда x бүтүн фәзанын вектору кими $x=a+b$, $a \in \mathcal{U}$, $b \in \mathcal{U}^{\perp}$ шәклиндә ҝөстәрилә биләр. Бу бәрабәрлији b-јә скалјар вурсаг

$$(x,b)=(a,b)+(b,b).$$

$(x,b)=(a,b)=0$ олдуғу үчүн $(b,b)=0$, она ҝөрә дә $x=a \in \mathcal{U}$ алынар.

§ 4. ВЕКТОРУН НОРМАСЫ.

(x,x) әдәдинин мәнфи олмајан квадрат көкүнә x векторунун нормасы вә ја узунлуғу дејилир. x векторунун нормасы $\|x\|$ шәклиндә ишарә едилир. Демәли тә"рифә көрә $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.
Бу тә"рифдән ашкардыр ки, сыфыр векторун нормасы сыфра бәрабәрдир, јә"ни $\|\theta\| = 0$.

Көстәрәк ки, истәнилән комплекс α әдәди үчүн

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\cdot\|x\| \qquad \text{(I)}$$

бәрабәрлији өдәнилир. Доғрудан да

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}(x,x)} = \sqrt{|\alpha|^2(x,x)} = |\alpha|\,\|x\|$$

Гејд едәк ки, α һәгиги әдәд оларса (I) бәрабәрлијинин өдәниләҹәји ашкардыр. Лакин бу һалда $|\alpha|$ јазылышы α әдәдинин мүтләг гијмәтини көстәрир.

Тә"риф: Нормасы ваһидә бәрабәр олан вектора ваһид вектор вә ја нормаланмыш вектор дејилир.

Ашкардыр ки, сыфырдан фәргли ихтијари $x \in E_n$ векторуну өз узунлуғунун тәрсинә вурмагла нормаланмыш вектора чевирмәк олар.

Доғрудан да

$$\left\|\frac{1}{\|x\|}x\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\|x\|}x, \frac{1}{\|x\|}x\right)} = \frac{1}{\|x\|}\sqrt{(x,x)} = \frac{1}{\|x\|}\|x\| = 1$$

Теорем: E_n евклид фәзасынын ихтијари x вә y векторлары үчүн

$$|(x,y)| \le \|x\|\,\|y\| \qquad (2)$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

Исбаты:

Әввәлҹә ашағыдакы хүсуси һаллара бахаг. Әкәр $y=\theta$ оларса (2) бәрабәрсизлијинин һәр ики тәрәфи сыфра чеврилир. Әкәр x, y векторлары хәтти асылы оларса онда $x=\alpha y$ јаза биләрик. Бу заман

$$|(x,y)| = |(\alpha y, y)| = |\alpha|(y,y) = \|x\|\,\|y\| \qquad (3)$$

олдуғуну алырыг. Демәли x вә y векторларындан һеч олмаса бири сыфыр вектор олдугда вә ја бу векторлар хәтти асылы олдугда (2) бәрабәрсизлији доғрудур. Инди фәрз едәк ки, x, y векторлары хәтти асылы дејил. Онда $x \neq \theta$, $y \neq \theta$ вә ихтијари λ комплекс әдәди үчүн $x - \lambda y \neq \theta$ олар.

Диҝәр тәрәфдән скалјар һасилин II хассәсинә көрә $(x-\lambda y, x-\lambda y) > 0$ бәрабәрсизлијини јаза биләрик. Бурадан алырыг ки,

$$(x,x) - \bar{\lambda}(x,y) - \lambda(y,x) + \lambda\bar{\lambda}(y,y) > 0 \qquad (4)$$

(4) бәрабәрсизлији ихтијари λ комплекс әдәди үчүн доғру олдуғундан, $y \neq \theta$ шәртини нәзәрә алмагла, хүсуси һалда $\lambda = \frac{(x,y)}{(y,y)}$ көтүрсәк, ашағыдакы доғру бәрабәрсизлији алырыг.

$$(x,x)(y,y) - \overline{(x,y)}(x,y) - (x,y)\overline{(x,y)} + (x,y)\overline{(x,y)} > 0$$

вә ја

$$\overline{(x,y)}(x,y) < (x,x)(y,y)$$

$$|(x,y)| < \|x\|\,\|y\| \qquad (5)$$

Әкәр јухарыда исбат етдијимиз хүсуси һаллары вә (5) бәрабәрсизлијини нәзәрә алсаг алырыг ки, теорем ихтијари x вә y векторлары үчүн доғрудур.

(2) бәрабәрсизлијинә Коши-Бунјаковски бәрабәрсизлији дејилир.

Теорем: E_n евклид фәзасынын ихтијари x, y векторлары үчүн

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \qquad (6)$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

Исбаты: Векторун нормасынын тә"рифинә вә скалјар һасилин хассәләринә әсасән

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,y) + (x,x) + (y,x) + (y,y) =$$
$$= (x,x) + (x,y) + \overline{(x,y)} + (y,y) =$$
$$= (x,x) + 2\,\mathrm{Re}(x,y) + (y,y)$$

мә"худ

бәрабәрлијини јаза биләрик. Бурада $\mathrm{Re}(x,y)$ илә (x,y) комплекс әдәдинин һәгиги һиссәси ишарә едилмишдир. Әкәр $\mathrm{Re}(x,y) \le |(x,y)| \le \|x\|\,\|y\|$ олдуғуну јухарыдакы бәрабәрликдә нәзәрә алсаг аларыг

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

бурадан да $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ бәрабәрсизлији алыныр. Теорем исбат едилди.

§ 5. ОРТОНОРМАЛ ВЕКТОРЛАР СИСТЕМИ.

E_n евклид фәзасынын ортогонал векторлары системиндә һәр бир векторун узунлуғу ваһидә бәрабәр оларса, беле системә ортонормал векторлар системи дејилир.

Башга сөзлә әҝәр $e_1, e_2, \ldots, e_m$ векторлар системи үчүн

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & \text{әҝәр } i \neq j \text{ оларса}, \\ 1, & \text{әҝәр } i = j \text{ оларса} \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, m)$$

шәрти өдәнилирсә бу системә ортонормал векторлар системи дејилир.

Айдындыр ки, E_n евклид фәзасынын һәр бири сыфырдан фәргли олан истәнилән ортогонал векторлары системиндә, һәр бир вектору өз узунлуғунун тәрсинә вурсаг, нәтичәдә бу фәзанын мүәјјән бир ортонормал векторлары системини аларыг.

<u>Теорем:</u> Истәнилән E_n евклид фәзасынын ортонормал базиси вар.

<u>Исбаты:</u>

Доғрудан да E_n фәзасынын һәр һансы ортогонал базисиндәки векторларын һәр бирини өз узунлуғунун тәрсинә вурсаг бу фәзанын ортонормал базиси алынар.

Биз билирик ки, һәр бири сыфырдан фәргли истәнилән ортогонал векторлар системини фәзанын ортогонал базисинә тамамламаг олур. Бурадан вә јухарыдакы теоремдән айдындыр ки, евклид фәзасынын һәр бир ортонормал векторлары системини бу фәзанын ортонормал базисинә тамамламаг олар. E_n евклид фәзасында ортонормал координат системләринин өзүнә мәхсус хассәләри вардыр. Бунлардан бә'зиләрини нәзәрдән кечирәк.

Тутаг ки, E_n евклид фәзасында

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \tag{7}$$

ортонормал координат системи верилмишдир. $\forall x \in E_n$ үчүн

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \tag{8}$$

ајрылмасы јазаг. Онда $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ әдәдләри (7) координат системиндә x векторунун координатлары олар. Әҝәр (8) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфини e_i ($i=1,2,\ldots,n$) векторуна скалјар вурсаг вә (7)-ин ортонормал систем олдуғуну нәзәрә алсаг

$$\alpha_i = (x, e_i) \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{9}$$

олдуғуну аларыг. Беләликлә ашағыдакы хассәни исбат етмиш олуруг.

Хассә I: E_n евклид фәзасынын ортонормал координат системиндә, ихтијари векторун координатлары, бу векторла координат системи векторларынын скалјар һасилинә бәрабәрдир.

Тутаг ки, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (I0) E_n фәзасынын һәр һансы базисидир.

$\forall x, y \in E_n$ векторларынын бу базисә нәзәрән ајрылышлары

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n, \tag{I1}$$

$$y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n \tag{I2}$$

олсун.

Хассә 2: (I0) базисинин ортонормал олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт

$$(x,y) = \alpha_1\bar\beta_1 + \alpha_2\bar\beta_2 + \cdots + \alpha_n\bar\beta_n \tag{I3}$$

бәрабәрлијинин өдәнмәсидир.

Исбаты: Тутаг ки, (I0) ортонормал базисдир. Онда

$$(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\bar\beta_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar\beta_i$$

Јә'ни (I3) бәрабәрлији өдәнилир. Тәрсинә әҝәр (I3) бәрабәрлији өдәниләрсә,

$$\begin{aligned} e_1 &= 1\cdot e_1 + 0 e_2 + \cdots + 0\cdot e_n \\ e_2 &= 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + \cdots + 0 e_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + \cdots + 1\cdot e_n \end{aligned}$$

олдуғундан аларыг ки,

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & \text{әҝәр } i \neq j \text{ оларса,} \\ 1, & \text{әҝәр } i = j \text{ оларса} \end{cases}$$

Демәли (I0) ортонормал базисдир.

Хассә исбат олунду.

Нәтиҹә: Һәгиги вә ја комплекс әдәдләр мејданы үзәриндә n-өлчүлү $\mathcal{L}$ хәтти фәзасында ихтијари сечилмиш базис верилдикдә, скалјар һасили елә тә'јин етмәк олар ки, алынан евклид фәзасында һәмин базис ортонормал базисләрдән бири олар.

Нәтиҹәнин доғрулуғу хассә 2/дән ашкардыр.

Хассә 3: Тутаг ки, $e_1, e_2, \ldots, e_m$ векторлар системи E_n евклид фәзасынын ихтијари ортонормал векторлары системидир. x-исә бу фәзанын һәр һансы векторудур. Онда

$$(x, e_i) = \alpha_i \qquad (i=1,2,\ldots,m) \tag{14}$$

оларса

$$(x,x) \geq |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_m|^2$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

Исбаты: $e_1, e_2, \ldots, e_m$ системини E_n фәзасынын ортонормал базисинә тамамлајаг. Тутаг ки, бу базис

$$e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$$

системиндән ибарәтдир.

Бу базисдә x векторунун ајрылышы

$$x = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \cdots + \gamma_m e_m + \gamma_{m+1} e_{m+1} + \cdots + \gamma_n e_n$$

оларса, хассә I-ә ҝөрә

$$\gamma_i = (x, e_i) = \alpha_i, \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

олар. Онда хассә 2-јә ҝөрә

$$(x,x) = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_m|^2 + |\gamma_{m+1}|^2 + \cdots + |\gamma_n|^2$$

олдуғундан $(x,x) \geq |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_m|^2$ аларыг.

Хассә исбат олду.

(14) бәрабәрсизлији Бессел бәрабәрсизлији адланыр. Јухарыдакы хассәдә хүсуси һалда $m=n$ оларса, јә"ни $e_1, e_2, \dots, e_n$ ортонормал базис оларса $(x,x)=|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\dots+|\alpha_n|^2$ алырыг. Бу бәрабәрлијә Парсевал бәрабәрлији дејилир.

§ 6. ЕВКЛИД ФӘЗАЛАРЫНЫН ИЗОМОРФИЗМИ.

Тутаг ки, $\mathcal{P}$ һәгиги вә ја комплекс әдәдләр мејданыдыр. E вә E' исә $\mathcal{P}$ мејданы үзәриндә сонлу өлчүлү евклид фәзаларыдыр.

<u>Тә"риф:</u> Әҝәр E вә E' евклид фәзаларынын векторлары арасында елә гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг варса ки, бу ујғунлугда

$$\forall x, y \in E \quad \text{вә} \quad \forall \lambda \in \mathcal{P}$$

үчүн
$$x \longleftrightarrow x', \quad y \longleftrightarrow y' \quad (x', y' \in E')$$
олдугда
$$x+y \longleftrightarrow x'+y'$$
$$\lambda x \longleftrightarrow \lambda x'$$
$$(x,y) = (x',y')$$

оларса, онда дејирләр ки, бу фәзалар изоморфдур.
E вә E' фәзаларынын изоморф олмасыны $E \cong E'$ шәклиндә јазырлар. Бу тә"рифдән ҝөрүндүјү кими евклид фәзаларынын изоморфизми, онларын хәтти фәзалар кими елә изоморфизмидир ки, бу изоморфизмдә $(x,y)=(x',y')$ бәрабәрлији өдәнилир.
Бурадан ашкардыр ки, әҝәр $E \cong E'$ оларса онда $\dim E = \dim E'$ олур. Бу тәклифин тәрсинин дә доғру олдуғуну ҝөстәрәк.

<u>Теорем:</u> Өлчүләри бәрабәр олан ихтијари ики E вә E' фәзалары изоморфдур.

<u>Исбаты:</u> E вә E' фәзаларында ујғун олараг $e_1, e_2, \dots, e_n$ (1) вә $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ (2) ортонормал базисләрини сечәк. Һәр бир

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n \in E$$

векторуна гаршы

$$x' = \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \dots + \alpha_n e'_n \in E' \quad \text{векторуну}$$

гаршы гојаг. Онда бизә мә"лумдур ки, бу ујғунлуг E вә E' арасында гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг олмагла, һәм дә онларын хәтти фәзалар кими изоморф ујғунлуғудур.
Тутаг ки, $\forall y \in E$ үчүн

$$y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n,$$

онда $y \longleftrightarrow y'$ оларса

$$y' = \beta_1 e'_1 + \beta_2 e'_2 + \dots + \beta_n e'_n. \qquad \text{олар.}$$

Ҝөстәрәк ки, $(x,y) = (x',y')$
өдәнилир. Доғрудан да, (1) вә (2) базисләринин ортонормал олдуғуну нәзәрә алсаг

$$(x,y) = \alpha_1 \bar{\beta}_1 + \alpha_2 \bar{\beta}_2 + \dots + \alpha_n \bar{\beta}_n,$$

$$(x',y') = \alpha_1 \bar{\beta}_1 + \alpha_2 \bar{\beta}_2 + \dots + \alpha_n \bar{\beta}_n$$

бәрабәрликләрини јаза биләрик, бурадан да $(x,y) = (x',y')$ олдуғу ашкардыр. Демәли $E \cong E'$.

Теорем исбат олунду.

IX ФӘСИЛ.

ХӘТТИ ОПЕРАТОРЛАР.

§ I. ХӘТТИ ОПЕРАТОР АНЛАЈЫШЫ. ӘСАС ХАССӘЛӘР.

Тутаг ки, $\mathcal{L}_1$ вә $\mathcal{L}_2$ ејни $\mathcal{P}$ мејданы үзәриндә сонлу өлчүлү хәтти фәзалардыр. Бу фәзаларын өлчүләрини ујғун олараг n вә m әдәдләри илә ишарә едәк. $\mathcal{L}_1$ фәзасынын һәр бир x векторуна $\mathcal{L}_2$ фәзасындан мүәјјән y елементини гаршы гојан $\mathcal{A}: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ ин'икасына $\mathcal{L}_1$ фәзасындан $\mathcal{L}_2$ фәзасына тә'сир едән оператор дејилир.

$x \in \mathcal{L}_1$ векторунун $y \in \mathcal{L}_2$ векторуна $\mathcal{A}$ оператору васитәсилә гојулмасыны $y=\mathcal{A}(x)$ вә ја $y=\mathcal{A}x$ шәклиндә јазырлар. Бурада y-ә x векторунун образы, x-ә исә y векторунун прообразы дејилир.

Тә'риф: $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{L}_1$ вә $\forall \lambda \in \mathcal{P}$ үчүн $\mathcal{A}$ оператору ашағыдакы ики шәрти өдәдикдә $\mathcal{A}$-ја хәтти оператор дејилир.

1. $\mathcal{A}(x_1+x_2)=\mathcal{A}x_1+\mathcal{A}x_2$ (операторун аддитивлик хассәси).
2. $\mathcal{A}(\lambda x_1)=\lambda \mathcal{A}x_1$ (операторун бирҹинслилик хассәси).

Әкәр $\mathcal{L}_1$ фәзасы $\mathcal{L}_2$ фәзасы илә үст-үстә дүшәрсә, онда $\mathcal{L}_1$-дән $\mathcal{L}_1$-ә тә'сир едән хәтти оператора бә'зән $\mathcal{L}_1$ фәзасынын хәтти чевирмәси дә дејилир. Хәтти операторун тә'рифиндән асанлыгла алынан ашағыдакы хассәләри гејд едәк.

Хассә 1: Истәнилән $\mathcal{A}: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ хәтти оператору $\mathcal{L}_1$ фәзасынын сыфыр векторуну фәзасынын сыфыр векторуна ин'икас етдирир.

Исбаты: Әкәр хәтти операторун тә'рифиндәки икинҹи шәртдә $\lambda=0$ көтүрсәк, $\mathcal{A}(0x)=0\mathcal{A}x$ вә ја $\mathcal{A}(\theta_1)=\theta_2$ олдуғуну аларыг.

Бурада θ_1 илә $\mathcal{L}_1$ фәзасынын, θ_2 илә исә $\mathcal{L}_2$ фәзасынын сыфыр векторлары ишарә едилмишдир. Бununla да хассә исбат едилди.

Хассә 2: Әкәр $\mathcal{A}$ хәтти оператордурса, онда $\forall x_1, x_2, \dots, x_s \in \mathcal{L}_1$ векторлары вә $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \mathcal{P}$ әдәдләри үчүн

$$\mathcal{A}(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\dots+\lambda_s x_s)=\lambda_1\mathcal{A}x_1+\lambda_2\mathcal{A}x_2+\dots+\lambda_s\mathcal{A}x_s \quad (1)$$

бәрабәрлији доғрудур.

Исбаты: Хассәнин доғрулуғуну s-ә нәзәрән там ријази индуксија методу илә көстәрәк. $s=1$ олдугда (1) бәрабәрлијинин доғрулуғу хәтти операторун тә'рифиндәки 2-чи шәртдән ашкардыр.
Фәрз едәк ки, (1) бәрабәрлији $s-1$ сајда топлананлар үчүн доғрудур. Онда

$$\mathcal{A}(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\dots+\lambda_s x_s)=\mathcal{A}(\lambda_1 x_1+(\lambda_2 x_2+\dots+\lambda_s x_s))=$$
$$=\mathcal{A}(\lambda_1 x_1)+\mathcal{A}(\lambda_2 x_2+\dots+\lambda_s x_s)=\lambda_1\mathcal{A}x_1+\lambda_2\mathcal{A}x_2+\dots+\lambda_s\mathcal{A}x_s$$

јаза биләрик. Бурадан да там ријази индуксија методуна әсасән чыхыр ки, (1) бәрабәрлији истәнилән s сајда топлананлар үчүн доғрудур.

Хассә исбат олунду.

Хассә 3: $\mathcal{A}: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ операторунун хәтти оператор олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{L}_1$ вә $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{P}$ олдугда

$$\mathcal{A}(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha\mathcal{A}x_1+\beta\mathcal{A}x_2 \quad (2)$$

бәрабәрлијинин өдәнмәсидир.

Исбаты: Доғрудан да, әкәр $\mathcal{A}$ хәтти оператор оларса, хассә 2-дән ашкардыр ки, (2) бәрабәрлији өдәниләчәк.
Тәрсинә, әкәр $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{L}_1$ вә $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{P}$ үчүн (2) бәрабәрлији өдәниләрсә, онда хүсуси һалда $\alpha=\beta=1$ көтүрсәк, $\mathcal{A}(x_1+x_2)=\mathcal{A}x_1+\mathcal{A}x_2$ шәрти, $\beta=0$ көтүрсәк $\mathcal{A}(\alpha x_1)=\alpha\mathcal{A}x_1$ шәрти өдәниләр. Јә'ни $\mathcal{A}$ — хәтти оператордур.

Хассә исбат олунду.

Бу хассәдән ајдындыр ки, верилмиш операторун хәтти оператор олдуғуну јохламаг үчүн, хәтти операторун тә'рифиндәки ики шәрти јохламаг әвәзинә (2) бәрабәрлијинин өдәнилдијини көстәрмәк дә кифајәт едир.

§2. Хәтти операторлар фәзасы.

$\mathcal{L}_1$ хәтти фәзасыны $\mathcal{L}_2$ хәтти фәзасына ин'икас етдирән бүтүн хәтти операторлар чохлуғуну $L(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ илә ишарә едәк. Бу чохлуғда ики операторун бәрабәрлијини ашағыдакы кими тә'јин едәк.

Тә'риф: $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ операторлары онда вә јалныз онда бәрабәр һесаб едилир ки, $\forall x \in \mathcal{L}_1$ үчүн $\mathcal{A}x=\mathcal{B}x$ олсун.

Инди исә $L(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ чохлуғунда ашағыдакы гајда илә операторларын чәми вә операторун әдәдә һасилини тә'јин едәк.

Тутаг ки, $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ операторлары вә $\forall \lambda \in \mathcal{P}$ әдәди верилмишдир.

Тә'риф: $\mathcal{A}$ вә $\mathcal{B}$ операторларынын чәми $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ шәклиндә ишарә едилән елә оператора дејилир ки, $\forall x \in \mathcal{X}_1$ үчүн

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x \qquad (1)$$

бәрабәрлији өдәнилсин.

Тә'риф: $\mathcal{A}$ операторунун λ әдәдинә һасили $\lambda\mathcal{A}$ шәклиндә ишарә олунан елә оператора дејилир ки, $\forall x \in \mathcal{X}_1$ үчүн

$$(\lambda\mathcal{A})x = \lambda(\mathcal{A}x) \qquad (2)$$

бәрабәрлији өдәнилсин.

Бу тә'рифләрдән ашкардыр ки, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ олдугда

$$\mathcal{A}+\mathcal{B} \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \text{ вә } \lambda\mathcal{A} \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$$

олур.

Јә'ни $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ вә $\lambda\mathcal{A}$ операторлары хәтти операторлар олмагла $\mathcal{X}_1$ хәтти фәзасындан $\mathcal{X}_2$ хәтти фәзасына тә'сир едән операторлардыр. Доғрудан да $\forall x \in \mathcal{X}_1$ олдугда, $\mathcal{A}x, \mathcal{B}x \in \mathcal{X}_2$ вә $\mathcal{X}_2$-нин хәтти фәза олмасындан чыхыр ки, $\mathcal{A}x + \mathcal{B}x \in \mathcal{X}_2$.
Бу мүнасибәтдән вә (I) бәрабәрлијиндән алыныр ки, $(\mathcal{A}+\mathcal{B})x \in \mathcal{X}_2$. Демәли, $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ оператору $\mathcal{X}_1$-и $\mathcal{X}_2$-јә ин'икас етдирир. Дикәр тәрәфдән, $\forall u, v \in \mathcal{X}_1$ вә $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{P}$ үчүн

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\alpha u + \beta v) = \mathcal{A}(\alpha u + \beta v) + \mathcal{B}(\alpha u + \beta v) =$$
$$= (\alpha\mathcal{A}u + \beta\mathcal{A}v) + (\alpha\mathcal{B}u + \beta\mathcal{B}v) =$$
$$= \alpha(\mathcal{A}u + \mathcal{B}u) + \beta(\mathcal{A}v + \mathcal{B}v) =$$
$$= \alpha(\mathcal{A}+\mathcal{B})u + \beta(\mathcal{A}+\mathcal{B})v.$$

Бурадан әјдындыр ки, $\mathcal{A}+\mathcal{B} \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$.
Аналожи гајда илә $\lambda\mathcal{A} \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ олдуғу көстәрилир.

Демәли, ики хәтти операторун чәми вә хәтти операторун әдәдә һасили хәтти оператордур.

Тә'риф: $\mathcal{X}_1$ фәзасынын ихтијари векторуну $\mathcal{X}_2$ фәзасынын сыфыр векторуна ин'икас етдирән оператора сыфыр оператор дејилир. Сыфыр оператору $\mathcal{O}$ шәклиндә ишарә едәчәјик. Демәли, тә'рифә көрә

$$\forall x \in \mathcal{X}_1 \text{ үчүн } \mathcal{O}x = \theta_2 \qquad (3).$$

Бурада θ_2 вектору $\mathcal{X}_2$-нин сыфыр векторудур.
Көстәрәк ки, $\mathcal{O} \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$.

$\mathcal{O}$ операторунун $\mathcal{X}_1$-дән $\mathcal{X}_2$-јә тә'сир етдији тә'рифдән ашкардыр.
Дикәр тәрәфдән, $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{P}$ вә $u, v \in \mathcal{X}_1$ үчүн

$$\mathcal{O}(\alpha u + \beta v) = \theta_2 = \alpha\theta_2 + \beta\theta_2 = \alpha\mathcal{O}u + \beta\mathcal{O}v$$

олдуғундан чыхыр ки, сыфыр оператор хәтти оператордур. Јә'ни

$$\mathcal{O} \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2).$$

Тә'риф: Һәр бир $\mathcal{A} \in L(\cdot, \mathcal{X}_2)$ оператору үчүн $-\mathcal{A} = (-1)\mathcal{A}$ шәклиндә ишарә едилән вә (4) бәрабәрлији илә тә'јин олунан оператора бу операторун әкси дејилир.

Ашкардыр ки, $\mathcal{A}$ хәтти оператор олдугда $-\mathcal{A}$ оператору да хәтти оператор олачаг. Чүнки $\forall \mathcal{A} \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ вә $\forall \lambda \in \mathcal{P}$ үчүн $\lambda\mathcal{A} \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$.
Бурада хүсуси һалда $\lambda = -1$ көтүрсәк, алырыг ки, $-\mathcal{A} \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$.

Теорем: Сыфыр вә әкс оператор јухарыдакы гајда илә тә'јин олундугда, $L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ чохлуғу чохлугда тә'јин едилән операторларын топланмасы вә операторун әдәдә һасили әмәлләринә нәзәрән хәтти фәза тәшкил едир.

Исбаты:
Јухарыда көстәрдик ки, $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ вә $\forall \lambda \in \mathcal{P}$ олдугда $\mathcal{A}+\mathcal{B} \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ вә $\lambda\mathcal{A} \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ олур. Буна көрә дә теоремин исбаты үчүн кифајәтдир көстәрәк ки, $L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ чохлуғу бу чохлугда тә'јин едилән топлама вә әдәдә вурма әмәлләринә нәзәрән хәтти фәзанын бүтүн аксиомларыны өдәјир. $\forall x \in \mathcal{X}_1$ вә $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ олсун.

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x = \mathcal{B}x + \mathcal{A}x = (\mathcal{B}+\mathcal{A})x$$

олдуғундан чыхыр ки, $\mathcal{A}+\mathcal{B} = \mathcal{B}+\mathcal{A}$.
Јә'ни $L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$-дә тә'јин олунмуш топлама әмәли коммутативдир.
Аналожи гајда илә топлама әмәлинин ассосиативлији шәртиндәки аксиомун өдәнилдији көстәрилир.

$$(\mathscr{A}+\Theta)x=\mathscr{A}x+\Theta x=\mathscr{A}x+\theta_2=\mathscr{A}x$$

олдуғундан алырыг ки, $\mathscr{A}+\Theta=\mathscr{A}$.
Бурадан да топламанын коммутативлијинә әсасән

$$\mathscr{A}+\Theta=\Theta+\mathscr{A}=\mathscr{A}$$

алыр:
Бу бәрабәрлик көстәрир ки, Θ оператору $\mathscr{L}(\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2)$-дә сыфыр елементдир.
Аналожи гајда илә һәр бир $\mathscr{A}$ оператору үчүн $-\mathscr{A}=(-1)\mathscr{A}$ операторунун әкс елементи олдуғуну көстәрмәк олур.
Тутаг ки, $\forall\alpha,\beta\in\mathscr{P}$, $\forall\mathscr{A}\in L(\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2)$ вә $\forall x\in\mathscr{X}_1$, онда

$$(\alpha\beta)\mathscr{A}x=\alpha(\beta\mathscr{A}x)=\alpha(\beta(\mathscr{A}x))=$$
$$=\alpha((\beta\mathscr{A})x)=\alpha(\beta\mathscr{A})x$$

олдуғундан алырыг ки,

$$(\alpha\beta)\mathscr{A}=\alpha(\beta\mathscr{A})$$

Демәли, әдәдә вурмаја нәзәрән ассосиативлик аксиому да өдәнир.
Асанлыгла $\alpha(\mathscr{A}+\mathscr{B})=\alpha\mathscr{A}+\alpha\mathscr{B}$,

$$(\alpha+\beta)\mathscr{A}=\alpha\mathscr{A}+\beta\mathscr{A} \quad \text{вә} \quad 1\cdot\mathscr{A}=\mathscr{A}$$

аксиомларынын доғру олдуғуну көстәрмәк олур.
Беләликлә теорем исбат олунду.
$L(\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2)$ хәтти фәзасына хәтти операторлар фәзасы дејилир.

§ 3. ХӘТТИ ОПЕРАТОРЛАР ЧӘБРИ.

$L(\mathscr{X},\mathscr{X})$ хәтти операторлар фәзасында ихтијари ики $\mathscr{A},\mathscr{B}$ операторларынын һасилини ашағыдакы гајда илә тә'јин едәк.
Тә'риф: $\mathscr{A},\mathscr{B}\in L(\mathscr{X},\mathscr{X})$ хәтти операторларынын һасили $\mathscr{A}\mathscr{B}$ шәклиндә ишарә едилән елә оператора дејилир ки, $\forall x\in\mathscr{X}$ үчүн

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})x=\mathscr{A}(\mathscr{B}x) \qquad (1)$$

бәрабәрлији өдәнилсин.
Гејд едәк ки, $\mathscr{A}$ вә $\mathscr{B}$ хәтти оператор олдугда $\mathscr{A}\mathscr{B}$ һасили дә хәтти оператор олур. Доғрудан да $\forall x\in\mathscr{X}$ олдугда $\mathscr{B}x\in\mathscr{X}$ олдуғундан $\mathscr{A}(\mathscr{B}x)\in\mathscr{X}$ олур. Онда (1)-дән чыхыр ки,

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})x\in\mathscr{X}.$$

Демәли, $\mathscr{A}\mathscr{B}$ оператору $\mathscr{X}$-и $\mathscr{X}$-ә ин'икас етдирир. Әҝәр [illegible]

$\forall\alpha,\beta\in\mathscr{P}$ вә $\forall x,y\in\mathscr{X}$ үчүн јаза биләрик ки,

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})(\alpha x+\beta y)=\mathscr{A}(\mathscr{B}(\alpha x+\beta y)=$$
$$=\mathscr{A}(\alpha\mathscr{B}x+\beta\mathscr{B}y)=\alpha(\mathscr{A}(\mathscr{B}x))+\beta(\mathscr{A}(\mathscr{B}y))=$$
$$=\alpha(\mathscr{A}\mathscr{B})x+\beta(\mathscr{A}\mathscr{B})y.$$

Демәли, $(\mathscr{A}\mathscr{B})(\alpha x+\beta y)=\alpha(\mathscr{A}\mathscr{B})x+\beta(\mathscr{A}\mathscr{B})y$.
Бурадан чыхыр ки, $\mathscr{A}\mathscr{B}$ - хәтти оператордур. Башга сөзлә $\mathscr{A}\mathscr{B}\in L(\mathscr{X},\mathscr{X})$.
Тә'риф: $\forall x\in\mathscr{X}$ үчүн $\mathscr{E}x=x$ (2)
бәрабәрлијини өдәјән $\mathscr{E}$ операторуна ваһид вә ја ејнијјәт оператору дејилир.
Ашкардыр ки, $\mathscr{E}\in L(\mathscr{X},\mathscr{X})$, јә'ни $\mathscr{E}$ - хәтти оператордур.
Гејд едәк ки, хәтти операторларын һасили үчүн үмумијјәтлә десәк, коммутативлик гануну доғру дејил.
Теорем: $\forall\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}\in L(\mathscr{X},\mathscr{X})$ операторлары үчүн ашағыдакы хассәләр доғрудур.

1°. $\mathscr{A}(\mathscr{B}+\mathscr{C})=\mathscr{A}\mathscr{B}+\mathscr{A}\mathscr{C}$

2°. $(\mathscr{A}+\mathscr{B})\mathscr{C}=\mathscr{A}\mathscr{C}+\mathscr{B}\mathscr{C}$

3°. $\mathscr{A}(\mathscr{B}\mathscr{C})=(\mathscr{A}\mathscr{B})\mathscr{C}$

4°. $\lambda(\mathscr{A}\mathscr{B})=(\lambda\mathscr{A})\mathscr{B}=\mathscr{A}(\lambda\mathscr{B}),\ \forall\lambda\in\mathscr{P}$.

Исбаты: $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$ операторларынын хәтти олмасы шәртиндән вә хәтти операторлар үзәриндә әмәллердән истифадә едәрәк $\forall x\in\mathscr{X}$ вектору үчүн ашағыдакы бәрабәрлији јаза биләрик.

$$(\mathscr{A}(\mathscr{B}+\mathscr{C}))x=\mathscr{A}((\mathscr{B}+\mathscr{C})x)=\mathscr{A}(\mathscr{B}x+\mathscr{C}x)=$$
$$=\mathscr{A}(\mathscr{B}x)+\mathscr{A}(\mathscr{C}x)=(\mathscr{A}\mathscr{B})x+(\mathscr{A}\mathscr{C})x=(\mathscr{A}\mathscr{B}+\mathscr{A}\mathscr{C})x$$

Демәли, $\forall x\in\mathscr{X}$ үчүн $(\mathscr{A}(\mathscr{B}+\mathscr{C}))x=(\mathscr{A}\mathscr{B}+\mathscr{A}\mathscr{C})x$.
Бурадан операторларын бәрабәрлијинин тә'рифинә әсасән алырыг ки,

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C})=\mathcal{A}\mathcal{B}+\mathcal{A}\mathcal{C}.$$

Бунунла да 1° хассәси исбат олунду. Аналожи гајда илә 2° хассәси исбат едилир.

Ејни гајда илә $\forall x\in\mathcal{L}$ үчүн

$$(\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}))x=\mathcal{A}((\mathcal{B}\mathcal{C})x)=\mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathcal{C}x))=$$

$$=(\mathcal{A}\mathcal{B})(\mathcal{C}x)=((\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C})x.$$

Бурадан да чыхыр ки, $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C})=(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$.
Јә"ни, 3° хассәси дә доғрудур.

Аналожи гајда илә 4° хассәси дә исбат едилир. Бунунла да теорем исбат едилди.

Тә"риф: Әкәр $\mathcal{K}$ һалгасы мүәјјән $\mathcal{P}$ мејданы үзәриндә вектор-фәза тәшкил едәрсә вә $\forall\alpha\in\mathcal{P}$, $\forall a,b\in\mathcal{K}$ үчүн $(\alpha a)b=a(\alpha b)=\alpha(ab)$ шәрти өдәниләрсә, онда $\mathcal{K}$ һалгасына $\mathcal{P}$ мејданы үзәриндә ассосиатив чәбр дејилир.

Биз көстәрдик ки, $\mathcal{L}(\mathcal{L},\mathcal{L})$ хәтти операторлар чохлуғу хәтти фәза тәшкил едир. Хәтти операторларын топланмасы вә вурулмасы әмәлләринә нәзәрән $\mathcal{L}(\mathcal{L},\mathcal{L})$ чохлуғунун һалга тәшкил етдијини көрмәк чәтин дејил. Чүнки бу чохлугда тә"јин олунмуш топлама вә вурма әмәлләринә нәзәрән һалганын бүтүн аксиомларынын өдәнилдијини јухарыда исбат етдијимиз теоремләрдән ашкардыр. Нәһајәт, јухарыда исбат етдијимиз ахырынчы теоремә көрә $\forall\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(\mathcal{L},\mathcal{L})$, $\forall\alpha\in\mathcal{P}$ үчүн

$$(\alpha\mathcal{A})\mathcal{B}=\mathcal{A}(\alpha\mathcal{B})=\alpha(\mathcal{A}\mathcal{B})$$

шәрти дә өдәнилир. Бу дедикләримиздән чыхыр ки, $\mathcal{L}(\mathcal{L},\mathcal{L})$-чохлуғу бу чохлугда тә"јин едилән әмәлләрә нәзәрән $\mathcal{P}$ мејданы үзәриндә ассосиатив чәбр тәшкил едир. $\mathcal{L}(\mathcal{L},\mathcal{L})$ ассосиатив чәбринә хәтти операторлар чәбри дејилир.

§ 4. ХӘТТИ ОПЕРАТОРУН МАТРИСИ.

Тутаг ки, n-өлчүлү $\mathcal{L}_1$ хәтти фәзасындакы m-өлчүлү $\mathcal{L}_2$ хәтти фәзасына ин"икас етдирән $\mathcal{A}$ хәтти оператору верилмишдир.

$\mathcal{L}_1$ фәзасында һәр һансы $e_1,e_2,\dots,e_n$ (I) вә $\mathcal{L}_2$ фәзасында һәр һансы $g_1,g_2,\dots,g_m$ (2) координат системләри сечәк. Билдијимиз кими фәзада координат системи бу фәзанын һәр һансы базис векторлар системинин мүәјјән низамла көтүрүлмәсиндән ибарәтдир. $\mathcal{A}$ оператору $\mathcal{L}_1$ фәзасынын $e_1,e_2,\dots,e_n$ векторларыны ујғун олараг $\mathcal{L}_2$ фәзасынын $\mathcal{A}e_1,\mathcal{A}e_2,\dots,\mathcal{A}e_n$ (3) векторларына ин"икас етдирир. (2) системи $\mathcal{L}_2$ фәзасынын базиси олдуғундан (3) системинин һәр бир векторунун бу базисә нәзәрән ајрылышыны јаза биләрик. Бу заман ашағыдакы бәрабәрликләр алыныр.

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{A}e_1&=\delta_{11}g_1+\delta_{21}g_2+\dots+\delta_{m1}g_m\\ \mathcal{A}e_2&=\delta_{12}g_1+\delta_{22}g_2+\dots+\delta_{m2}g_m\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ \mathcal{A}e_n&=\delta_{1n}g_1+\delta_{2n}g_2+\dots+\delta_{mn}g_m\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

(4) бәрабәрликләринин сағ тәрәфинин әмсалларындан ашағыдакы матриси дүзәлдәк.

$$A=\begin{pmatrix}\delta_{11}&\delta_{12}&\dots&\delta_{1n}\\ \delta_{21}&\delta_{22}&\dots&\delta_{2n}\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\ \delta_{m1}&\delta_{m2}&\dots&\delta_{mn}\end{pmatrix}.$$

Бу гајда илә дүзәлдилмиш A матрисинә $\mathcal{A}$ хәтти операторунун $g_1,g_2,\dots,g_m$ координат системиндә матриси дејилир. Көрүндүјү кими, бу матрисин k-ҹы сүтуну $\mathcal{A}e_k$ векторунун $g_1,g_2,\dots,g_m$ координат системиндәки координатларындан ибарәтдир. Фәрз едәк ки, $x\in\mathcal{L}_1$ векторуну $\mathcal{A}$ оператору $y\in\mathcal{L}_2$ векторуна ин"икас етдирир. Јә"ни, $y=\mathcal{A}x$. (5)
Белә бир мәсәләјә бахаг: $\mathcal{A}$ операторунун A матрисини вә x векторунун (I) координат системиндәки координатларыны биләрәк,

y векторунун (2) координат системиндә координатларыны тапмалы?

Тутаг ки, (I) координат системиндә x векторунун координат сүтуну

$$[x]=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

шәклиндәдир.

y векторунун (2) координат системиндә ахтарылан координат сүтуну

$$[y]=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$$

илә ишарә едәк.

Онда

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n \\ y &= \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \dots + \beta_m g_m \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

јаза биләрик.

(5) вә (6)-дан аларыг:

$$y=\beta_1 g_1+\beta_2 g_2+\dots+\beta_m g_m=\mathcal{A}(\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\dots+\alpha_n e_n)= \\ =\alpha_1\mathcal{A}e_1+\alpha_2\mathcal{A}e_2+\dots+\alpha_n\mathcal{A}e_n. \qquad (7)$$

(4)-дән $\mathcal{A}e_k=\delta_{1k}g_1+\delta_{2k}g_2+\dots+\delta_{mk}g_m$ $(k=1,2,\dots,n)$ олдуғуну (7)-дә нәзәрә алсаг аларыг.

$$\beta_1 g_1+\beta_2 g_2+\dots+\beta_m g_m=(\delta_{11}\alpha_1+\delta_{12}\alpha_2+\dots+\delta_{1n}\alpha_n)g_1+ \\ +(\delta_{21}\alpha_1+\delta_{22}\alpha_2+\dots+\delta_{2n}\alpha_n)g_2+\dots+(\delta_{m1}\alpha_1+\delta_{m2}\alpha_2+\dots+\delta_{mn}\alpha_n)g_m$$

Бурадан базиса нәзәрән ајрылманын јеканәлији хассәсинә әсасән аларыг.

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= \delta_{11}\alpha_1+\delta_{12}\alpha_2+\dots+\delta_{1n}\alpha_n \\ \beta_2 &= \delta_{21}\alpha_1+\delta_{22}\alpha_2+\dots+\delta_{2n}\alpha_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_m &= \delta_{m1}\alpha_1+\delta_{m2}\alpha_2+\dots+\delta_{mn}\alpha_n \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Әкәр (8) бәрабәрликләрини матрис јазылыш формасында јазсаг аларыг.

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \dots & \delta_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

вә ја

$$[y] = A[x]. \qquad (9)$$

(9)-дан ајдындыр ки, y координат сүтуну $\mathcal{A}$ операторунун матрисинин x векторунун координат сүтунуна һасилинә бәрабәрдир.

$y=\mathcal{A}x$ олдуғуну нәзәрә алсаг (9)-у $[\mathcal{A}x]=A[x]$ шәклиндә дә јазмаг олар.

Биз бундан сонра ән мүһүм хүсуси һаллардан бири олан $\mathcal{X}_1=\mathcal{X}_2=\mathcal{X}$ һалыны нәзәрдән кечирәчәјик. Јә"ни $L(\mathcal{X},\mathcal{X})$ хәтти операторлар фәзасына бахачарыг. Бу һалда ашкардыр ки, $n=m$ олур. Һәм дә $e_1,e_2,\dots,e_n$ базисини $g_1,g_2,\dots,g_n$ базиси илә ејни сечәчәјик, јә"ни $e_i=g_i$ $(i=\overline{1,n})$. Бу заман (4) бәрабәрликләри ашағыдакы шәклә дүшүр.

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}e_1 &= \delta_{11}e_1+\delta_{21}e_2+\dots+\delta_{n1}e_n \\ \mathcal{A}e_2 &= \delta_{12}e_1+\delta_{22}e_2+\dots+\delta_{n2}e_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{A}e_n &= \delta_{1n}e_1+\delta_{2n}e_2+\dots+\delta_{nn}e_n \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Ајдындыр ки, бу заман $\mathcal{A}$ операторунун матриси квадрат матрис олачаг [illegible] $e_1,e_2,\dots,e_n$ координат системинин сечилмәсиндән асылы[illegible].

(5) бәрабәрлији [illegible] ашағыдакы шәклдә олур.

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= \delta_{11}\alpha_1 + \delta_{12}\alpha_2 + \dots + \delta_{1n}\alpha_n \\ \beta_2 &= \delta_{21}\alpha_1 + \delta_{22}\alpha_2 + \dots + \delta_{2n}\alpha_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_n &= \delta_{n1}\alpha_1 + \delta_{n2}\alpha_2 + \dots + \delta_{nn}\alpha_n \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

вә јә матрис бәрабәрлик формасында

$[y]=A[x]$, бурада $[x]=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, $[y]=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$.

Беләликлә, һәр бир $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{X})$ хәтти операторуна n-өлчүлү $\mathcal{X}$ фәзасында сечилмиш координат системиндә мүәјјән бир n-тәртибли квадрат A матриси ујғун кәлир. Бу мәсәләнин тәрси дә доғрудур. Јә"ни сечилмиш координат системиндә истәнилән n-тәртибли квадрат A матрисинә мүәјјән хәтти оператор ујғундур.

Бу тәклифин доғрулуғуну көстәрмәк үчүн әввәлчә ашағыдакы теореми исбат едәк.

<u>Теорем:</u> Тутаг ки, $e_1,e_2,\dots,e_n$ векторлар системи $\mathcal{X}$ хәтти фәзасынын һәр һансы базисидир. $a_1,a_2,\dots,a_n$ векторлар системи исә бу фәзанын ихтијари векторларындан тәшкил олунмуш систем олсун. Онда $e_1,e_2,\dots,e_n$ векторларыны ујғун олараг $a_1,a_2,\dots,a_n$ векторларына ин"икас етдирән хәтти оператор вар вә јеканәдир.

<u>Исбаты:</u> $\forall x\in\mathcal{X}$ векторуна бахаг. Шәртә көрә $e_1,e_2,\dots,e_n$ системи $\mathcal{X}$-ин базиси олдуғундан x вектору бу базисә нәзәрән ашағыдакы шәкилдә јеканә ајрылыша малик олар.

$$x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\dots+\alpha_ne_n$$

бу ајрылышын әмсалларындан вә $a_1,a_2,\dots,a_n$ векторлар системиндән истифадә едәрәк

$$x'=\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\dots+\alpha_na_n \qquad (13)$$

векторуну дүзәлдәк. Ајдындыр ки, бу гајда илә $\mathcal{X}$ фәзасынын һәр бир x векторуна, $\mathcal{X}$ фәзасындан тамамилә мүәјјән јеканә x' векторуну гаршы гојулур. Беләликлә, биз $\mathcal{X}$ фәзасыны $\mathcal{X}$ фәзасына ин"икас етдирән мүәјјән бир оператор тә"јин етмиш олуруг. Һәмин оператору $\mathcal{A}$ илә ишарә етсәк $\mathcal{A}x=x'$ олур. Көстәрәк ки, $\mathcal{A}$ оператору теоремин һөкмүнү өдәјән операторудур. Әввәлчә $\mathcal{A}$ операторунун хәтти оператор олдуғуну исбат едәк.

$\forall\alpha,\beta\in\mathcal{P}$ вә $\forall x,y\in\mathcal{X}$ олсун.

Фәрз едәк ки, $y=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\dots+\beta_ne_n$,

онда $\mathcal{A}y=\beta_1a_1+\beta_2a_2+\dots+\beta_na_n$ олар. Дикәр тәрәфдән

$$\mathcal{A}(\alpha x+\beta y)=$$
$$=\mathcal{A}((\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)e_1+(\alpha\alpha_2+\beta\beta_2)e_2+\dots+(\alpha\alpha_n+\beta\beta_n)e_n)=$$
$$=(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)a_1+(\alpha\alpha_2+\beta\beta_2)a_2+\dots+(\alpha\alpha_n+\beta\beta_n)a_n=$$
$$=\alpha(\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\dots+\alpha_na_n)+\beta(\beta_1a_1+\beta_2a_2+\dots+\beta_na_n)=$$
$$=\alpha\mathcal{A}x+\beta\mathcal{A}y. \qquad (14)$$

(14) көстәрир ки, $\mathcal{A}$ хәтти операторудур.

$\mathcal{A}x=x'$ бәрабәрлијиндә $x=e_k$ $(k=1,2,\dots,n)$ көтүрсәк, (12) ајрылышы e_k вектору үчүн

$$e_k=0\cdot e_1+\dots+0\cdot e_{k-1}+1\cdot e_k+0\,e_{k+1}+\dots+0\,e_n \qquad (15)$$

шәклиндә олдуғундан, (13)-дә

$$x'=0a_1+\dots+0a_{k-1}+1\cdot a_k+0a_{k+1}+\dots+0a_n \qquad (16)$$

олур. Демәли, $\mathcal{A}e_k=a_k$, $(k=1,2,\dots,n)$. (17)

Јә"ни $\mathcal{A}$ оператору $e_1,e_2,\dots,e_n$ векторларыны ујғун олараг $a_1,a_2,\dots,a_n$ векторларына ин"икас етдирир.

Инди көстәрәк ки, (17) шәртини өдәјән $\mathcal{A}$ хәтти оператору јеканәдир. Әксини фәрз едәк. Тутаг ки, елә $\mathcal{B}$ хәтти оператору вар ки,

$\mathcal{B}e_k=a_k$ $(k=1,2,\dots,n)$ бәрабәрликләрини өдәјир.

Онда әкәр x вектору (12) шәклиндә ајрылыша малик оларса јаза биләрик ки,

$$\mathcal{B}x=\alpha_1\mathcal{B}e_1+\alpha_2\mathcal{B}e_2+\dots+\alpha_n\mathcal{B}e_n=$$
$$=\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\dots+\alpha_na_n=\mathcal{A}x,$$

јә'ни $\mathcal{B}x = \mathcal{A}x$. (18).

x вектору $\mathcal{X}$ фәзасынын ихтијари вектору олдуғундан (18)-дән чыхыр ки, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.
Бунунла да теорем исбат едилди.

Инди фәрз едәк ки, ихтијари n тәртибли квадрат

$$A = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix}$$

матриси верилмишдир. $\mathcal{X}$ фәзасында һәр һансы $e_1, e_2, \dots, e_n$ (19) (19) координат системи сечәк. A матрисинин елементләриндән вә (19) векторларындан истифадә едәрәк биз ашағыдакы $a_1, a_2, \dots, a_n$ векторларыны гура биләрик.

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \delta_{11}e_1 + \delta_{21}e_2 + \dots + \delta_{n1}e_n \\ a_2 &= \delta_{12}e_1 + \delta_{22}e_2 + \dots + \delta_{n2}e_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n &= \delta_{1n}e_1 + \delta_{2n}e_2 + \dots + \delta_{nn}e_n \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Бурадан көрүнүр ки, әҝәр биз јухарыда исбат етдијимиз теоремә ҝөрә $e_1, e_2, \dots, e_n$ векторларыны уйғун олараг $a_1, a_2, \dots, a_n$ векторларына инъикас етдирән јеҝанә $\mathcal{A}$ хәтти операторуну гурсаг, онун матриси A матриси илә үст-үстә дүшәр. Демәли, $\mathcal{X}$ фәзасында һәр бир n тәртибли квадрат мүәјјән координат системи сечилдикдә A матрисинә мүәјјән бир $\mathcal{A} \in L(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ хәтти оператору уйғун олур. Диҝәр тәрәфдән, бизә мә'лумдур ки, һәр бир $\mathcal{A} \in L(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ хәтти операторуна n-өлчүлү $\mathcal{X}$ фәзасында сечилмиш координат системиндә мүәјјән бир n тәртибли квадрат A матриси уйғундур. Беләликлә алырыг ки, n-өлчүлү $\mathcal{X}$ фәзасында мүәјјән координат системи сечилдикдә бу фәзаны өзүнү-өзүнә инъикас етдирән хәтти операторлар чохлуғу илә n тәртибли квадрат матрисләр чохлуғу арасында гаршылыглы биргијмәтли уйғунлуг вардыр.

Биз $\forall x \in \mathcal{X}$ үчүн $\mathcal{O}x = \theta$ шәртини өдәјән оператора сыфыр оператор, $\mathcal{E}x = x$ шәртини өдәјән оператора исә ваһид оператор демишдик. $\mathcal{X}$ фәзасынын ихтијари сечилмиш $a_1, a_2, \dots, a_n$ координат системиндә бу операторлара уйғун матрисләри тә'јин едәк.

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{O}a_1 &= 0a_1 + 0a_2 + \dots + 0a_n \\ \mathcal{O}a_2 &= 0a_1 + 0a_2 + \dots + 0a_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{O}a_n &= 0a_1 + 0a_2 + \dots + 0a_n \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

вә

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}a_1 &= 1a_1 + 0a_2 + \dots + 0a_n \\ \mathcal{E}a_2 &= 0a_1 + 1a_2 + \dots + 0a_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{E}a_n &= 0a_1 + 0a_2 + \dots + 1a_n \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

олдуғундан алырыг ки, $\mathcal{O}$ сыфыр операторунун матриси

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ – сыфыр матрис, $\mathcal{E}$ ваһид операторунун матриси исә

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – ваһид матрис олур.

§ 5. ВЕКТОРУН МҮХТӘЛИФ БАЗИСЛӘРӘ НӘЗӘРӘН КООРДИНАТ СҮТУНЛАРЫ АРАСЫНДА ӘЛАГӘ.

Мә'лумдур ки, ејни бир $\mathcal{X}$ хәтти фәзасында мүхтәлиф координат системләри сечмәк мүмкүндүр. Буна ҝөрә дә бир векторун мүхтәлиф координат системләриндә координат сүтунлары арасындакы әлагәни мүәјјән етмәк мәсәләси гаршыја чыхыр.

Тутаг ки, $\mathcal{L}$ фезасында $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (I) ве $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ (2) координат системлери верилиб. Шерти олараг (I)-и "кеһне" (2)-ни исе "јени" координат системи адландыраҹағыг. (I) векторлар системи $\mathcal{L}$ фезасынын базиси олдуғундан (2) системинин һер бир вектору (I) системинин векторлары васитеси иле хетти ифаде олунар.
Тутаг ки, (2) системинин векторларынын (I) васитеси иле хетти ифадеси ашағыдакы шекилдедир.

$$\left.\begin{aligned} e'_1 &= \tau_{11}e_1 + \tau_{21}e_2 + \cdots + \tau_{n1}e_n \\ e'_2 &= \tau_{12}e_1 + \tau_{22}e_2 + \cdots + \tau_{n2}e_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e'_n &= \tau_{1n}e_1 + \tau_{2n}e_2 + \cdots + \tau_{nn}e_n \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(3) бераберликлеринин сағ терефинин емсалларындан ашағыдакы матрисинин дүзелдек

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

T матрисине $e_1, e_2, \ldots, e_n$ координат системинден $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ координат системине кечид матриси дејилир.
Инди тутаг ки, $\forall x \in \mathcal{L}$ вектору верилмишдир. Бу векторун кеһне координат системинде координат сутуну $[x] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$
јени координат системинде координат сутуну $[x]' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$
олсун.
Онда ашағыдакы бераберликлери јаза биларик.

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n,$$

$$x = \alpha'_1 e'_1 + \alpha'_2 e'_2 + \cdots + \alpha'_n e'_n.$$

Бурадан ашағыдакы бераберлији аларыг.

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \alpha'_1 e'_1 + \alpha'_2 e'_2 + \cdots + \alpha'_n e'_n \qquad (4)$$

Әҝер (4)-үн сағ терефинде (3)-ден

$$e'_k = \sum_{j=1}^{n} \tau_{kj} e_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

олдуғуну нәзәре алсаг, аларыг

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = (\tau_{11}\alpha'_1 + \tau_{12}\alpha'_2 + \cdots + \tau_{1n}\alpha'_n)e_1 +$$

$$+ (\tau_{21}\alpha'_1 + \tau_{22}\alpha'_2 + \cdots + \tau_{2n}\alpha'_n)e_2 + \cdots + (\tau_{n1}\alpha'_1 + \tau_{n2}\alpha'_2 + \cdots + \tau_{nn}\alpha'_n)e_n$$

Бура ан базисе нәзәрен ајрылышын јеке олмасына есасен аларыг ки,

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \tau_{11}\alpha'_1 + \tau_{12}\alpha'_2 + \cdots + \tau_{1n}\alpha'_n \\ \alpha_2 &= \tau_{21}\alpha'_1 + \tau_{22}\alpha'_2 + \cdots + \tau_{2n}\alpha'_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n &= \tau_{n1}\alpha'_1 + \tau_{n2}\alpha'_2 + \cdots + \tau_{nn}\alpha'_n \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Әҝер (5) бераберликлерини матрис јазылыш формасында јазсаг

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$$

ве ја $[x] = T[x]'$ (6) алынар. (6)-дан алыныр ки, $\forall x \in \mathcal{L}$ векторунун кеһне координат системиндеки координат сутуну кечид матрисинин бу векторун јени координат системиндеки координат сутунуна һасилине берабердир.
Гестерек ки, T кечид матриси гејри-махсусдур. Бу мегседле [illegible] ренче [illegible] лемманы исбат едек.
Лемма: Тутаг ки, A ве B елементлери K чисмине дахил олан n. тертибли квадрат матрислердир. Һәр елементлери K чисмине дахил олан ихтијари $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ сутун үчүн

$$A\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix} \qquad (7)$$

бәрабәрлији өдәниләрсә, онда $A=B$.

<u>Исбаты:</u> Шәртә көрә ихтијари $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$ сүтуну вә

$A=(\alpha_{ij})_{n\times n}$, $B=(\beta_{ij})_{n\times n}$ $(i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,n)$ матрисләри үчүн (7) бәрабәрлији өдәнилир. Онда хүсуси һалда

$$\xi_1=1,\ \xi_2=\xi_3=\dots=\xi_n=0$$

көтүрсәк (7)-дән аларыг ки,

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\\ \vdots\\ \alpha_{n1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_{11}\\ \beta_{21}\\ \vdots\\ \beta_{n1}\end{pmatrix}$$

Бурадан да чыхыр ки,

$$\alpha_{11}=\beta_{11},\ \alpha_{21}=\beta_{21},\dots,\alpha_{n1}=\beta_{n1}.$$

Сонра $\xi_1=0,\ \xi_2=1,\ \xi_3=\dots=\xi_n=0$ көтүрсәк (7)-дән алыныр ки,

$$\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\ \alpha_{22}\\ \vdots\\ \alpha_{n2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_{12}\\ \beta_{22}\\ \vdots\\ \beta_{n2}\end{pmatrix},$$

бурадан да $\alpha_{12}=\beta_{12},\alpha_{22}=\beta_{22},\dots,\alpha_{n2}=\beta_{n2}$ алыныр.

Һәмин просеси бу гајда илә давам етдириб (7)-дә

$$\xi_1=\xi_2=\dots=\xi_{n-1}=0,\ \xi_n=1$$

көтүрсәк,

$$\alpha_{1n}=\beta_{1n},\ \alpha_{2n}=\beta_{2n},\dots,\alpha_{nn}=\beta_{nn}$$

олдуғуну аларыг. Бунунла да лемма исбат олунду.

Инди исә T кечид матрисинин гејри-мәхсуси олдуғуну көстәрәк. Бир көһнә координат системиндән јени координат системинә кечид матриси олан T матрисини алмаг үчүн (2) системинин һәр бир векторунун (1) системи васитәси илә хәтти ифадәсини јазыб вә алынан (3) бәрабәрликләринин сағ тәрәфинин әмсалларындан јухарыда көстәрдијимиз гајда илә T матрисини тә'јин етдик.

(2) системи $\mathcal{L}$ фәзасынын базиси олдуғундан һәмин просеси тәрсинә дә апармаг олар. Ајдындыр ки, бу заман јени координат системиндән көһнә координат системинә кечид матрисини тә'јин едәрик.
Әкәр (1)-ин һәр бир векторунун (2) системи васитәси илә хәтти ифадәсини јазсаг аларыг:

$$\left.\begin{array}{l} e_1=\sigma_{11}e_1'+\sigma_{21}e_2'+\dots+\sigma_{n1}e_n'\\ e_2=\sigma_{12}e_1'+\sigma_{22}e_2'+\dots+\sigma_{n2}e_n'\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ e_n=\sigma_{1n}e_1'+\sigma_{2n}e_2'+\dots+\sigma_{nn}e_n' \end{array}\right\} \qquad (8)$$

(8) бәрабәрликләринин сағ тәрәфиндәки әмсаллардан ашағыдакы

$$S=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn}\end{pmatrix}$$

матрисини дүзәлтсәк, бу матрис (2)-дән (1)-ә кечид матриси олар.
(7) бәрабәрлијинин алынмасы гајдасына аналоки оларак

$$[x]'=S[x] \qquad (9)$$

бәрабәрлијини алмаг олур.
Әкәр (7)-дән $[x]$ ифадәсини (9)-да јеринә јазсаг

$$[x]'=ST[x]' \qquad (10)$$

бәрабәрлији алыныр. Ејни гајда илә (9)-дан $[x]'$-ин ифадәсини (7)-дә јеринә јазсаг

$$[x]=TS[x] \qquad (11)$$

бәрабәрлији алыныр.
Јухарыда апардығымыз мүһакимәләрдә x вектору ихтијари олдуғундан $[x]$ вә $[x]'$ сүтунлары да ихтијаридир. Онда јухарыда исбат етдијимиз леммаја көрә (10) вә (11) бәрабәрликләриндән чыхыр ки,

$$E=ST=TS \qquad (12)$$

Бурадан да алыныр ки, $S=T^{-1}$. Беләликлә, кечид матриси һәмишә гејри-мәхсусидир.

Бурадан ајдындыр ки, (6)-дан

$$[x]' = T^{-1}[x] \qquad (12)$$

бәрабәрлијини дә јазмаг олар.

§ 6. Хәтти операторун мүхтәлиф базисләрә нәзәрән матрисләри арасында әлагә.

Хәтти операторун матрисинин тә"рифиндән ашкардыр ки, операторун матриси фәзадан сечилмиш координат системиндән асылыдыр. [illegible] координат системи башга бир координат системи илә әвәз едиләрсә онда операторун матриси дә [illegible]јишир. Нәтиҹәдә ејни бир $\mathcal{A}$ операторуна көһнә координат системиндә A матриси уј₣ун олурса, јени координат системиндә башга бир A' матриси уј₣ун олур. Бу матрисләр арасындакы әлагәни мүәјјән едәк.

Тутаг ки, $\mathcal{L}$ хәтти фәзасыны өзү-өзүнә ин"икас етдирән $\mathcal{A}$ оператору верилмишдир. $\mathcal{L}$ фәзасында һәр һансы ики координат системи сечәк.

[illegible] $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (I) [illegible] системи вә $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ [illegible] [illegible]ләрини олсун.

[illegible] [illegible] кечид матрисини T илә ишарә едәк [illegible]торунун (I)координат системиндә матриси A, (2)[illegible] системиндә матриси исә A' олсун. $\forall x \in \mathcal{L}$ векторунун [illegible]ординат системиндә координат сүтунуну $[x]$ илә, (2) [illegible] системиндәки координат сүтунуну $[x]'$ илә ишарә едәк. Онда б[illegible]дум олан ашағыдакы бәрабәрликләри јаза биләрик.

$$[x] = T[x]', \qquad (3)$$

$$[\mathcal{A}x] = A[x], \qquad (4)$$

$$[\mathcal{A}x]' = A'[x]', \qquad (5)$$

$$[\mathcal{A}x] = T[\mathcal{A}x]' \qquad (6)$$

(4) вә (5)-дән $[\mathcal{A}x]$ вә $[\mathcal{A}x]'$-ин гијмәтләрини (6)-да [illegible]лә јазсаг

$$A[x] = TA'[x]'. \qquad (7)$$

Әҝәр (3)-дән $[x]$-ин гијмәтини (7)-дә јеринә јазсаг аларыг

$$AT[x]' = TA'[x]'. \qquad (8)$$

x вектору $\mathcal{L}$ фәзасынын ихтијари вектору олдуғундан мә"лум лемләјә ҝөрә (8)-дән аларыг ки,

$$AT = TA', \qquad (9)$$

бурадан $A' = T^{-1}AT$ (10)

олдуғуну тапырыг. (10)дүстуру ејни бир $\mathcal{A}$ операторунун көһнә координат системиндәки A матриси илә јени координат системиндәки A' матрис арасындакы әлагәни характеризә едир.

<u>Тә"риф:</u> Тутаг ки, A вә B n-тәртибли квадрат матрисләрдир. Әҝәр елә гејри-мәхсуси X матриси варса ки, $A = X^{-1}BX$ бәрабәрлији өдәнилир, онда дејирләр ки, A матриси B матрисинә охшардыр.

Ҝөстәрәк ки, матрисләрин охшарлығы рефлексивлик, симметриклик, транзитивлик хассәләринә маликдир. Доғрудан да, истәнилән n-тәртибли квадрат A матриси үчүн $A = E^{-1}AE$ (11)

јаза биләрик. Бурада E – ваһид матрисдир. (11) бәрабәрлији ҝөстәрир ки, һәр бир A матриси өз-өзүнә охшардыр. Дикәр тәрәфдән, әҝәр A матриси B матрисинә охшар оларса, онда тә"рифә ҝөрә елә гејри-мәхсуси X матриси вар ки, $A = X^{-1}BX$ (12)

бәрабәрлији өдәнилир. Бу бәрабәрлији $B = (X^{-1})^{-1}AX^{-1}$ [illegible]клиндә јазыб $Y = X^{-1}$ ишарә етсәк $B = Y^{-1}AY$ аларыг. Сонунҹу бәрабәрлик ҝөстәрир ки, B матриси дә A матрисинә охшардыр.

Инди фәрз едәк ки, A матриси B матрисинә, B матриси исә C матрисинә охшардыр. Бу о демәкдир ки, елә гејри-мәхсуси X вә Y матрисләри вар ки, $A = X^{-1}BX$, $B = Y^{-1}CY$.

Бу бәрабәрликләрдән аларыг ки,

$$A = X^{-1}(Y^{-1}CY)X.$$

Сонунҹу бәрабәрлији исә [illegible] шәкилдә јазмаг олар.

$A = (YX)^{-1}C(YX)$, әҝәр бу бәрабәрликдә

$Z=YX$ ишарә етсәк $A=Z^{-1}CZ$ аларыг.
Бу исә о демәкдир ки, A матриси C матрисинә охшардыр. Бурадан алыныр ки, охшарлыг мүнасибәти транзитивлик хассәсинә маликдир. Матрисләрин охшарлығы мүнасибәти рефлексивлик, симметриклик вә транзитивлик хассәсинә малик олдуғундан чыхыр ки, бу мүнасибәт n-тәртибли квадрат матрисләр чохлуғунда еквивалентлик мүнасибәтидир. Билдијимиз кими һәр бир еквивалентлик мүнасибәти онун тә'јин олундуғу чохлуғу чүт-чүт кәсишмәјән еквивалентлик синифләринә ајырыр. О [illegible]ләдән матрисләрин охшарлығы мүнасибәти дә n-тәртибли квадрат матрисләр чохлуғуну чүт-чүт кәсишмәјән елә синифләрә ајырыр ки, һ[illegible] бир синифдә бир-биринә охшар бүтүн мүмкүн олан матрисләр дахил олур.

(10) бәрабәрлији көстәрир ки, $\mathcal{A}$ операторунун ики мүхтәлиф координат системиндәки матрисләри бир-биринә охшардыр.

§ 7. ТӘРС ОПЕРАТОР.

Тутаг ки, $\mathcal{A}$ хәтти оператору $\mathcal{L}$ хәтти фәзасыны өз-өзүнә ин'икас етдирән һәр-һансы оператор, $\mathcal{E}$ исә бу фәзанын ејнијјәт операторудур. Әкәр $\mathcal{L}$ фәзасыны өз-өзүнә ин'икас етдирән елә $\mathcal{B}$ оператору варса ки,

$$\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}=\mathcal{E} \qquad (1)$$

бәрабәрлији өдәнилир, онда $\mathcal{B}$ оператору $\mathcal{A}$ операторунун тәрси адланыр вә $\mathcal{B}=\mathcal{A}^{-1}$ шәклиндә ишарә едилир. Ајдындыр ки, әкәр $\mathcal{A}$ операторунун тәрси варса, һәмин тәрс оператор јеканәдир.

Доғрудан да әкәр $\mathcal{A}$ операторунун $\mathcal{B}$ вә $\mathcal{C}$ шәклиндә ики тәрси оларса, онда $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}=\mathcal{E}$ вә $\mathcal{A}\mathcal{C}=\mathcal{C}\mathcal{A}=\mathcal{E}$ бәрабәрликләри ејни заманда өдәнилмәлидир. Дикәр тәрәфдән

$$\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{E}=\mathcal{B}(\mathcal{A}\mathcal{C})=(\mathcal{B}\mathcal{A})\mathcal{C}=\mathcal{E}\mathcal{C}=\mathcal{C}$$

олдуғундан чыхыр ки, $\mathcal{B}=\mathcal{C}$.

Гејд едәк ки, $\mathcal{A}^0=\mathcal{E}$, $\mathcal{A}^{-n}=(\mathcal{A}^{-1})^n$ $(n\in\mathbb{N})$ гәбул едилир. (1) вә (2)-дән чыхыр ки, истәнилән там үстлү гүввәтләр үчүн $\mathcal{A}^n\mathcal{A}^m=\mathcal{A}^m\mathcal{A}^n=\mathcal{A}^{n+m}$, $(\mathcal{A}^n)^m=(\mathcal{A}^m)^n=\mathcal{A}^{nm}$ бәрабәрликләри доғрудур. Хүсуси һалда $(\mathcal{A}^n)^{-1}=(\mathcal{A}^{-1})^n=\mathcal{A}^{-n}$ бәрабәрлијини јаза биләрик. Бунлардан башга

$$(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\cdots\mathcal{A}_k)(\mathcal{A}_k^{-1}\cdots\mathcal{A}_2^{-1}\mathcal{A}_1^{-1})=\mathcal{E}$$

олмасындан чыхыр ки,

$$(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\cdots\mathcal{A}_k)^{-1}=\mathcal{A}_k^{-1}\cdots\mathcal{A}_2^{-1}\mathcal{A}_1^{-1}$$

Операторун тәрсинин тә'рифиндән ајдындыр ки, әкәр $x,y\in\mathcal{L}$ елементләри үчүн $y=\mathcal{A}x$ оларса, онда $x=\mathcal{A}^{-1}y$ олар.
Көстәрәк ки, әкәр $\mathcal{A}$ хәтти операторунун $\mathcal{A}^{-1}$ тәрси варса, онда $\mathcal{A}^{-1}$ – хәтти оператордур. Доғрудан да тутаг ки, $\forall u,v\in\mathcal{L}$ елементләри үчүн $\mathcal{A}^{-1}u=x$, $\mathcal{A}^{-1}v=y$, бурада $x,y\in\mathcal{L}$ фәзасынын мүәјјән векторларыдыр. $\mathcal{A}$ хәтти оператор олдуғундан $\forall\alpha,\beta\in\mathcal{P}$ вә $x,y\in\mathcal{L}$ үчүн јаза биләрик

$$\mathcal{A}(\alpha x+\beta y)=\alpha\mathcal{A}x+\beta\mathcal{A}y=\alpha u+\beta v$$

бурадан $$\mathcal{A}^{-1}(\alpha u+\beta v)=\alpha x+\beta y=\alpha\mathcal{A}^{-1}u+\beta\mathcal{A}^{-1}v.$$

Јә'ни $\mathcal{A}^{-1}$ – хәтти оператордур.

Тә'риф: Әкәр $\mathcal{A}$ оператору $\mathcal{L}$ хәтти фәзасынын ихтијари ики мүхтәлиф x_1 вә x_2 елементләрини онун мүхтәлиф y_1 вә y_2 елементләринә ин'икас етдирирсә вә $\mathcal{L}$-дән олан һәр бир елементин бу ин'икас заманы $\mathcal{L}$ прообразы варса, онда дејирләр ки, $\mathcal{A}$ оператору $\mathcal{L}$ фәзасыны өз-өзүнә гаршылыглы бирғијмәтли ин'икас етдирир. $\mathcal{A}$ хәтти оператор олдугда, онун n-өлчүлү $\mathcal{L}$ хәтти фәзасынын ихтијари ики мүхтәлиф елементини бу фәзанын мүхтәлиф елементләринә ин'икас етдирилмәсиндән чыхыр ки, $\mathcal{A}$ оператору $\mathcal{L}$ фәзасыны өзүнү-өзүнә гаршылыглы бир-гијмәтли ин'икас етдирән оператордур. Доғрудан да көстәрәк ки, һәр бир $y\in\mathcal{L}$ елементи $\mathcal{A}:\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ ин'икасы заманы мүәјјән бир $y\in\mathcal{L}$ елементинин образыдыр. Јә'ни $\forall y\in\mathcal{L}$ үчүн елә $x\in\mathcal{L}$ вар ки,

$$y=\mathcal{A}x \quad \text{олур.}$$

Тутаг ки, $e_1,e_2,\ldots,e_n$ (2) векторлар системи фәзасынын һәр һансы базисидир. $\mathcal{A}e_1,\mathcal{A}e_2,\ldots,\mathcal{A}e_n$ (3) векторлар системинә бахаг.

(3) системи хәтти асылы дејил, әкс һалда һеч олмаса бири сыфырдан фәргли елә $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ әдәдләри олсајды ки,

$$\lambda_1\mathcal{A}e_1+\lambda_2\mathcal{A}e_2+\cdots+\lambda_n\mathcal{A}e_n=\theta \quad \text{олсун,}$$

онда бурадан $\mathcal{A}$ хәтти оператор олдуғуна көрә аларды ки,

$$\mathcal{A}(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_ne_n)=\theta \qquad (4)$$

$\mathcal{A}$ оператору мүхтәлиф елементләри мүхтәлиф елементләрә ин'икас етдирдијиндән вә $\mathcal{A}\theta=\theta$ олдуғундан (4)-дән чыхыр ки,

$$\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_ne_n=\theta \qquad [illegible])$$

олмалыдыр. Бу исә (2)-нин хәтти асылы [illegible]

Де ол[illegible] (3) системи хәтти асылы дејил. (3)-үн хәтти асылы олмама[illegible] ки, (3) $\mathcal{L}$ фәзасынын базисидир. Онда $\forall y \in \mathcal{L}$ [illegible] (3) базис векторлары илә јеканә гајдада

$$y = \alpha_1 \mathcal{A}e_1 + \alpha_2 \mathcal{A}e_2 + \dots + \alpha_n \mathcal{A}e_n$$

[illegible] ајрыла олунур. Бурадан алырыг ки,

$$\mathcal{A}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n)$$

[illegible] көстәрир ки, y вектору

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

[illegible] образыдыр. Јә'ни $y = \mathcal{A}x$.

Теорем: Хәтти $\mathcal{A}$ операторунун тәрсинин олмасы үчүн зәрури вә [illegible] операторун $\mathcal{L}$ фәзасыны өз-өзүнә гаршылыглы бир-гиј[illegible] ин'икас етдирмәсидир.

Исбаты. Зәрурилик: Тутаг ки, $\mathcal{A}$ операторунун $\mathcal{A}^{-1}$ тәрси вар. [illegible] оператор $\mathcal{L}$ фәзасыны өз-өзүнә гаршылыглы бир-гијмәтли [illegible] етдирмир. Онда $\mathcal{L}$ фәзасында елә $x_1 \neq x_2$ елементләри [illegible] $\mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2$ олачаг. Бурадан $\mathcal{A}(x_1 - x_2) = \theta$ [illegible] сонунчу бәрабәрликдән чыхыр ки, $x_1 - x_2 = \mathcal{A}^{-1}\theta$ [illegible] ја $x_1 - x_2 = \theta$ бу исә $x_1 \neq x_2$ шәртинә зиддир. Бу зиддијјәт көстәрир ки, фәрзијјәмиз дүзкүн дејил. Јә'ни $\mathcal{A}$ оператору $\mathcal{L}$ фәзасыны өз-өзүнә гаршылыглы биргијмәтли ин'икас етдирир.

Кафилик: Шәртә көрә һәр бир $y \in \mathcal{L}$ елементинә гаршы јалныз вә јалныз бир $x \in \mathcal{L}$ елементи вар ки, $\mathcal{A}x = y$ (6)

олур. y-и x-ә ин'икас етдирән оператору $\mathcal{B}$ илә ишарә едәк. Беләликлә $x = \mathcal{B}y$ (7) олур.

Әкәр (7)-ни (6)-да нәзәрә алсаг, аларыг

$$\mathcal{A}\mathcal{B}y = y. \tag{8}$$

$y \in \mathcal{L}$ ихтијари вектор олдуғундан (8)-дән чыхыр ки,

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{E} \tag{9}$$

Аналожи гајда илә (6)-ны (7)-дә нәзәрә алсаг

$$\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{E} \tag{10}$$

олдуғуну аларыг. (9) вә (10)-дан чыхыр ки, $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{E}$. Бу исә о демәкдир ки, $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$. Беләликлә теорем исбат олунду.

§ 8. ХӘТТИ ОПЕРАТОРУН НҮВӘСИ ВӘ ОБРАЗЫ.

Тутаг ки, сонлу өлчүлү $\mathcal{L}$ хәтти фәзасыны өз-өзүнә ин'икас етдирән $\mathcal{A}$ хәтти оператору верилмишдир.

Тә'риф: $\mathcal{A}$ хәтти операторунун нүвәси $\mathcal{L}$ фәзасынын $\mathcal{A}x = \theta$ (1) бәрабәрлијини өдәјән бүтүн мүмкүн олан x елементләри чохлуғуна дејилир. Бурада $\theta \in \mathcal{L}$ вектору $\mathcal{L}$ фәзасынын сыфыр векторудур. Башга сөзлә, $\mathcal{A}$ операторунун нүвәси $\mathcal{L}$ фәзасынын $\mathcal{A}$ оператору васитәси илә сыфыра ин'икас олунан бүтүн мүмкүн олан векторлары чохлуғуна дејилир. $\mathcal{A}$ операторунун нүвәси $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ илә ишарә олунур. Јухарыдакы тә'рифдән ајдындыр ки, $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$.

Теорем: $\mathcal{L}$ фәзасыны өз-өзүнә ин'икас етдирән ихтијари хәтти $\mathcal{A}$ операторунун нүвәси бу фәзанын алтфәзасыдыр.

Исбаты: Доғрудан да, $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ векторлары вә $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in P$ әдәдләри үчүн јаза биләрик

$$\mathcal{A}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \mathcal{A}x_1 + \lambda_2 \mathcal{A}x_2 = \lambda_1 \theta + \lambda_2 \theta = \theta.$$

Бурадан ашкардыр ки, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$.
Јә'ни $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ чохлуғу $\mathcal{L}$-ин алтфәзасыдыр. Теорем исбат олунду.

Тә'риф: $\mathcal{A}$ хәтти операторунун нүвәсинин өлчүсүнә онун дефекти дејилир.

Әкәр $x, y \in \mathcal{L}$ векторлары үчүн $y = \mathcal{A}x$ олдугда, y-и x векторунун образы, x-и исә y векторунун прообразы адландырмышдыг. Әкәр $\mathcal{A}$ хәтти оператору $\mathcal{L}$ фәзасыны өз-өзүнә ин'икас етдирирсә, онда һәр бир $x \in \mathcal{L}$ вектору $\mathcal{L}$-дә мүәјјән бир y образына малик олур. Лакин үмумијјәтлә десәк, һәр бир $y \in \mathcal{L}$ векторунун олмаса бир $x \in \mathcal{L}$ прообразына малик ола билдијини демәк ол[illegible] [illegible] сыфыр оператору $\mathcal{L}$ фәзасынын бүтүн векторларыны [illegible] сыфыр векторуна ин'икас етдирдијиндән, сыфырдан фәргли ихти[illegible] векторун бу ин'икас заманы һеч бир прообразы олмур.

Тә'риф: $\mathcal{L}$ фәзасыны өз-өзүнә ин'икас етдирән $\mathcal{A}$ хәтти опера[illegible]нун образы бу фәзанын $y = \mathcal{A}x$ шәклиндә көстәрилә билән бүтүн y елементләри чохлуғуна дејилир.

$\mathcal{A}$ хәтти операторунун образы $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ шәклиндә ишарә едилир. Јухарыдакы тә'рифдән ајдындыр ки, $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$. [illegible] һәр бир хәтти $\mathcal{A}$ оператору үчүн $\mathcal{A}\theta = \theta$ олдуғун[illegible] [illegible] ки, $\theta \in \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$, јә'ни $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ чохлуғу $\mathcal{A}$ хәтти оператору үчүн бош дејил.

Теорем: $\mathcal{L}$ хәтти фәзасыны өз-өзүнә ин"икас етдирән истәнилән $\mathcal{A}$ хәтти операторунун образы бу фәзанын алт-фәзасыдыр.

Исбаты:

$\forall y_1, y_2 \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ векторлары вә $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{P}$ әдәдләринин верилдијини фәрз едәк. $y_1 \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ олмасындан чыхыр ки, елә $x_1 \in \mathcal{L}$ вар ки, $y_1 = \mathcal{A}x_1$, аналожи гајда илә $y_2 = \mathcal{A}x_2$, $x_2 \in \mathcal{L}$ јаза биләрик. Онда

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 \mathcal{A}x_1 + \lambda_2 \mathcal{A}x_2 = \mathcal{A}(\lambda_1 x_1) + \mathcal{A}(\lambda_2 x_2) = \mathcal{A}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

олдуғундан алырыг ки, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ вектору $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \mathcal{L}$ векторунун образыдыр.

Јә"ни $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$

Бу исә о демәкдир ки, $\operatorname{Im} \mathcal{A} \subset \mathcal{L}$ алтчохлуғу $\mathcal{L}$ фәзасынын алт-фәзасыдыр.

Теорем исбат олунду.

То"риф: $\mathcal{A}$ хәтти операторунун образынын өлчүсүнә бу операторун рангы дејилир.

Теорем: Сонлу өлчүлү $\mathcal{L}_n$ хәтти фәзасыны өз-өзүнә ин"икас етдирән ихтијари $\mathcal{A}$ хәтти операторунун рангы илә дефектинин чәми бу фәзанын өлчүсүнә бәрабәрдир.

Исбаты:

$$\dim \mathcal{L}_n = n, \quad \dim(\operatorname{Ker} \mathcal{A}) = d, \quad \dim(\operatorname{Im} \mathcal{A}) = r$$

ишарә едәк. Үмумилији позмадан фәрз едә биләрик ки, $r \neq 0$. Әкс һалда $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \mathcal{L}_n$ олур ки, бу һал үчүн дә теоремин доғрулуғу ашкардыр.

Тутаг ки,

$$a_1, a_2, \ldots, a_r \qquad (1)$$

векторлар системи $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ алт-фәзасынын мүәјјән базисидир. $a_i \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ олдуғундан елә $e_i \in \mathcal{L}_n$ векторлары вар ки, үјғун олараг

$$\mathcal{A}e_i = a_i \quad (i = \overline{1,r}) \qquad (2)$$

бәрабәрликләрини јаза биләрик.

Көстәрәк ки,

$$e_1, e_2, \ldots, e_r \qquad (3)$$

векторлар системи хәтти асылы дејил. Доғрудан да ихтијари $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ әдәдләри үчүн

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_r e_r = \theta \qquad (4)$$

бәрабәрлијиндән чыхыр ки,

$$\mathcal{A}(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_r e_r) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_r a_r = \theta \qquad (5)$$

бәрабәрлији доғрудур. $a_1, a_2, \ldots, a_r$ системи хәтти асылы олмадығындан алырыг ки, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$ олмалыдыр. Демәли (4) бәрабәрлији әмсалларын јалныз сыфыр гијмәтләриндә өдәнилир. Бу исә о демәкдир ки, $e_1, e_2, \ldots, e_r$ системи хәтти асылы дејил.

$e_1, e_2, \ldots, e_r$ системи үзәринә чәкилән алт-фәзаны $\mathcal{U}$ илә ишарә едәк. $e_1, e_2, \ldots, e_r$ векторлар системи хәтти асылы олмадығындан, бу системи $\mathcal{U}$ алт-фәзасынын базисидир. Буна көрә дә $\dim \mathcal{U} = r$ олур. Беләликлә, $\dim \mathcal{U} = \dim(\operatorname{Im} \mathcal{A}) = r$.

Бурадан ајдындыр ки, теоремин исбатыны ахыра чатдырмаг үчүн $\mathcal{L} = \mathcal{U} \dotplus \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ олдуғуну көстәрмәк кифајәтдир. Чүнки алт-фәзаларын дүз чәминин өлчүсү онларын өлчүләри чәминә бәрабәрдир.

$\forall a \in \mathcal{U} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ оларса, $a \in \mathcal{U}$ олдуғундан бу вектор $\mathcal{U}$ алт-фәзасынын базиси илә хәтти ифадә олунар.

$$a = d_1 e_1 + d_2 e_2 + \cdots + d_r e_r. \qquad (6)$$

Һәм дә $a \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ олдуғундан $\mathcal{A}a = \theta$ вә ја

$$\mathcal{A}(d_1 e_1 + d_2 e_2 + \cdots + d_r e_r) = d_1 a_1 + d_2 a_2 + \cdots + d_r a_r = \theta \qquad (7)$$

јаза биләрик. $a_1, a_2, \ldots, a_r$ системи хәтти асылы олмадығындан (7)-дән чыхыр ки, $d_1 = d_2 = \cdots = d_r = 0$. Әкәр бу бәрабәрлији (6)-да нәзәрә алсаг $a = \theta$ аларыг. Демәли, $\forall a \in \mathcal{U} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ оларса $a = \theta$ олур.

Бу исә о демәкдир ки, $\mathcal{U} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\theta\}$. (8)

Инди $\forall x \in \mathcal{L}_n$ векторуну көтүрәк.

Онда $\mathcal{A}x \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ олдуғундан $\mathcal{A}x$ вектору $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ алт-фәзасынын базиси илә хәтти ифадә олунар.

$$\mathcal{A}x = d_1 a_1 + d_2 a_2 + \cdots + d_r a_r \qquad (9)$$

Әкәр $d_1 e_1 + d_2 e_2 + \cdots + d_r e_r = y$ вә $x - y = z$ гәбул етсәк ашкардыр ки, $y \in \mathcal{U}$ олар.

Дикәр тәрәфдән

$$\mathcal{A}y = d_1 \mathcal{A}e_1 + d_2 \mathcal{A}e_2 + \cdots + d_r \mathcal{A}e_r = d_1 a_1 + d_2 a_2 + \cdots + d_r a_r = \mathcal{A}x$$

олдуғундан алырыг ки, $\mathcal{A}x = \mathcal{A}y$, $\mathcal{A}(x - y) = \theta$ вә ја $\mathcal{A}z = \theta$. Бу исә о демәкдир ки, $z \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

Демәли $\forall x \in \mathcal{L}_n$ вектору үчүн $x = y + z$ олур ки, бурада

$y \in \mathcal{U}$, $x \in Ker\,\mathcal{A}$, јә'ни $\mathcal{L}_n = \mathcal{U} + Ker\,\mathcal{A}$ (9)

(8) вә (9) бәрабәрликләриндән чыхыр ки, $\mathcal{L}_n = \mathcal{U} + Ker\,\mathcal{A}$. (10)

(10) бәрабәрлијиндән мә'лум теоремә ҝөрә $\dim\mathcal{L} = \dim\mathcal{U} + \dim(Ker\,\mathcal{A})$ вә ја $n = r + d$ олдуғуну алырыг.

Нәтиҹә: $Ker\,\mathcal{A} = \{\theta\}$ олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт $Im\,\mathcal{A} = \mathcal{L}_n$ олмасыдыр.

Доғрудан да $Ker\,\mathcal{A} = \{\theta\}$ оларса $d=0$ олур. Онда алырыг ки, $r=n$. Бурадан да ашкардыр ки, $Im\,\mathcal{A} = \mathcal{L}_n$. Тәрсинә, $Im\,\mathcal{A} = \mathcal{L}_n$ оларса алырыг ки, $d=0$ олмалыдыр. $d=0$ олмасындан исә $Ker\,\mathcal{A} = \{\theta\}$ олдуғу алыныр.

Теорем: $\mathcal{A}$ хәтти операторунун $\mathcal{L}$ хәтти фәзасыны өз-өзүнә гаршылыглы биргијмәтли ин'икас етдирмәси үчүн зәрури вә кафи шәрт $Ker\,\mathcal{A} = \{\theta\}$ олмасыдыр.

Исбаты:

Зәрурилик: Тутаг ки, $\mathcal{A}$ хәтти оператору $\mathcal{L}$ хәтти фәзасыны өз-өзүнә гаршылыглы биргијмәтли ин'икас етдирир. Әҝәр $\forall x \in Ker\,\mathcal{A}$ оларса, онда $\mathcal{A}x = \theta$ олар. Дикәр тәрәфдән $\mathcal{A}\theta = \theta$ вә гаршылыглы биргијмәтли ин'икас заманы һәр бир векторун јеҝанә прообразы олдуғундан алырыг ки, $x = \theta$. Демәли $Ker\,\mathcal{A} = \{\theta\}$.

Кафилик: Тутаг ки, $Ker\,\mathcal{A} = \{\theta\}$.
Әксини фәрз едәк. Тутаг ки, бу заман елә x_1 вә x_2 векторлары вар ки, $\mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2$ олур. Онда бурадан $\mathcal{A}(x_1 - x_2) = \theta$ алырыг. $Ker\,\mathcal{A} = \{\theta\}$ вә $\mathcal{A}(x_1 - x_2) = \theta$ олмасындан чыхыр ки, $x_1 - x_2 = \theta$ вә ја $x_1 = x_2$.
Бу зиддијјәт ҝөстәрир ки, фәрзијјәмиз доғру дејил. Јә'ни $Ker\,\mathcal{A} = \{\theta\}$ олдугда $\mathcal{A}$ оператору $\mathcal{L}$ фәзасынын мүхтәлиф векторларыны бу фәзанын мүхтәлиф векторларына ин'икас етдирир. $\mathcal{A}$ хәтти оператор олдуғундан бурадан чыхыр ки, $\mathcal{A}$ оператору $\mathcal{L}$ хәтти фәзасыны өз-өзүнә гаршылыглы биргијмәтли ин'икас етдирир.
Бунунла теорем исбат олунду.

Нәтиҹә I: $\mathcal{L}$ хәтти фәзасыны өз-өзүнә ин'икас етдирән хәтти $\mathcal{A}$ операторунун тәрсинин варлығы үчүн зәрури вә кафи шәрт $Ker\,\mathcal{A} = \{\theta\}$ олмасыдыр.

Исбаты:

Мә'лумдур ки, $\mathcal{A}$ операторунун $\mathcal{L}$ фәзасыны өз-өзүнә гаршылыглы биргијмәтли ин'икас етдирмәси бу операторун тәрсинин варлығы үчүн зәрури вә кафи шәртдир.

Бу сәбәбә ҝөрә нәтиҹәнин доғрулуғу јухарыдакы теоремдән ашкардыр.

Нәтиҹә 2: $\mathcal{L}$ хәтти фәзасыны өз-өзүнә ин'икас етдирән хәтти $\mathcal{A}$ операторунун тәрсинин варлығы үчүн зәрури вә кафи шәрт олмасыдыр.

Доғрудан да $Im\,\mathcal{A} = \mathcal{L}$ олмасы $Ker\,\mathcal{A} = \{\theta\}$ олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт олдуғундан нәтиҹә I-ә әсасән нәтиҹә 2-нин доғрулуғу ашкардыр.

Нәтиҹә 3: $\mathcal{L}$ хәтти фәзасыны өз-өзүнә ин'икас етдирән хәтти $\mathcal{A}$ операторунун тәрсинин варлығы үчүн зәрури вә кафи шәрт $rang\,\mathcal{A} = \dim\mathcal{L}$ олмасыдыр.

Исбаты:

Доғрудан да $Im\,\mathcal{A} = \mathcal{L}$ оларса, онда бурадан чыхыр ки, $\dim(Im\,\mathcal{A}) = \dim\mathcal{L}$ вә ја $rang\,\mathcal{A} = \dim\mathcal{L}$.
Тәрсинә, $rang\,\mathcal{A} = \dim\mathcal{L}$ оларса бу о демәкдир ки, $\dim(Im\,\mathcal{A}) = \dim\mathcal{L}$.
Бу бәрабәрликдән вә $Im\,\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$ олдуғундан чыхыр ки, $Im\,\mathcal{A} = \mathcal{L}$.
Беләликлә, нәтиҹә 2-јә әсасән алырыг ки, нәтиҹә 3 доғрудур.

Биз бундан сонра тәрси олан хәтти операторлара гејри-мәхсуси хәтти операторлар, тәрси олмајан хәтти операторлара исә мәхсуси хәтти операторлар дејәҹәјик.
Нәтиҹә I-дән ашағыдакы теоремин доғрулуғу ашкардыр.

Теорем: $\mathcal{L}$ хәтти фәзасыны өз-өзүнә ин'икас етдирән $\mathcal{A}$ хәтти операторунун гејри-мәхсуси оператор олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт бу операторун нүвәсинин јалныз сыфыр вектордан ибарәт олмасыдыр, башга сөзлә, дефектинин сыфра бәрабәр олмасыдыр.

Нәтиҹә 2 вә нәтиҹә 3-дән исә ашағыдакы теоремин доғрулуғу ашкардыр.

Теорем: $\mathcal{L}$ хәтти фәзасыны өз-өзүнә ин'икас етдирән $\mathcal{A}$ хәтти операторунун гејри-мәхсуси олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт бу операторун образынын $\mathcal{L}$ фәзасы илә үст-үстә дүшмәсидир, башга сөзлә, $\mathcal{A}$ операторунун рангынын $\mathcal{L}$ фәзасынын өлчүсүнә бәрабәр олмасыдыр.

Теорем: $\mathcal{L}$ хәтти фәзасыны өз-өзүнә ин'икас етдирән $\mathcal{A}$ хәтти операторунун рангы бу операторун матрисинин рангына бәрабәрдир.

Исбаты:

$\mathcal{L}$ хәтти фәзасында һәр һансы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ координат системи сечәк. $\forall x \in \mathcal{L}$ векторунун бу координат системиндә ајрылышы

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \qquad \text{олсун.}$$

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 \mathcal{A}e_1 + \alpha_2 \mathcal{A}e_2 + \cdots + \alpha_n \mathcal{A}e_n$$

олдуғундан ајдындыр ки, хәтти операторунун образы олан $Im\,\mathcal{A}$ алт-фәзасы $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n$ векторлар системи үзәриндә чәкилмиш алт-фәзадыр. Онда $Im\,\mathcal{A}$ алт-фәзасынын өлчүсү $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n$ векторлар системинин рангына бәрабәр олар. Дикәр тәрәфдән $Im\,\mathcal{A}$ алт-фәзасынын өлчүсү $\mathcal{A}$ операторунун рангы олдуғундан алырыг ки, $rang\,\mathcal{A} = rang\{\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n\}$

Тутаг ки,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_1 &= \alpha_{11} e_1 + \alpha_{21} e_2 + \cdots + \alpha_{n1} e_n \\ \mathcal{A}e_2 &= \alpha_{12} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \cdots + \alpha_{n2} e_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{A}e_n &= \alpha_{1n} e_1 + \alpha_{2n} e_2 + \cdots + \alpha_{nn} e_n . \end{aligned}$$

Онда $\mathcal{A}$ операторунун матриси тә'рифә көрә ашағыдакы матрис олар.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Бу матрисин сүтунлары ујғун олараг $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n$ векторларынын координат сүтунларындан ибарәтдир. Буна көрә дә A матрисинин сүтунлар системинин рангы $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n$ векторлар системинин рангы илә үст-үстә дүшәҹәкдир. Тә'рифә көрә A матрисинин рангы онун сүтун вә ја сәтир векторларынын рангына бәрабәр олдуғундан алырыг ки, $rang\,A = rang\{\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n\}$
Бурадан да чыхыр ки, $rang\,A = rang\,\mathcal{A}$.
Бунунла да теорем исбат олунду.

§ 9. ХӘТТИ ОПЕРАТОРЛАР ҸӘБРИ ИЛӘ n-ТӘРТИБЛИ КВАДРАТ МАТРИСЛӘР ҸӘБРИНИН ИЗОМОРФИЗМИ.

Фәрз едәк ки, P мејданы үзәриндә сонлу өлчүлү $\mathcal{L}$ хәтти фәзасы верилмишдир. Мә'лумдур ки, $\mathcal{L}$ фәзасында мүәјјән координат системи сечилдикдә, $\mathcal{L}$ фәзасыны өз-өзүнә ин'икас етдирән хәтти операторлар чохлуғу илә n-тәртибли квадрат матрисләр чохлуғу арасында гаршылыглы бир гијмәтли ујғунлуг вардыр. Биз хәтти операторлары $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ илә онлара ујғун матрисләри исә $A, B, C, \ldots$ шәклиндә ишарә едәҹәјик.

Тутаг ки, $\mathcal{L}$ фәзасында һәр һансы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (I) координат системи верилиб. Бу координат системиндә $\mathcal{A}$ вә $\mathcal{B}$ хәтти операторларынын матрисләрини ујғун олараг A вә B олсун. $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ хәтти операторунун матрисини C илә ишарә едәк. Онда $\forall x \in \mathcal{L}$ үчүн ашағыдакы бәрабәрликләри јаза биләрик.

$$[(\mathcal{A}+\mathcal{B})x] = C[x]$$

$$[(\mathcal{A}+\mathcal{B})x] = [\mathcal{A}x+\mathcal{B}x] = [\mathcal{A}x] + [\mathcal{B}x] =$$
$$= A[x] + B[x] = (A+B)[x]$$

Демәли $(A+B)[x] = C[x]$
x вектору ихтијари олдуғундан ахырынҹы бәрабәрликдән чыхыр ки,

$$C = A + B.$$

Беләликлә алырыг ки, сечилмиш координат системиндә хәтти операторларын ҹәминин матриси онларын матрисләри ҹәминә бәрабәрдир.

Ејни гајда илә, әкәр $\mathcal{A}\mathcal{B}$ операторунун матрисини C илә ишарә етсәк $\forall x \in \mathcal{L}$ вектору үчүн

$$[(\mathcal{A}\mathcal{B})x] = C[x]$$

вә $$[(\mathcal{A}\mathcal{B})x] = [\mathcal{A}(\mathcal{B}x)] = A[\mathcal{B}x] = A(B[x]) = (AB)[x]$$

бәрабәрликләриндән чыхыр ки, $C[x] = (AB)[x]$,
бурадан да $C = AB$ олдуғуну алырыг.
Ја'ни сечилмиш координат системиндә хәтти операторларын һасилинин матриси онларын матрисләри һасилинә бәрабәрдир.

Тутаг ки, $\forall\lambda\in\mathcal{P}$ әдәди верилиб. $\lambda\mathcal{B}$ операторунун матрисини C илә ишарә етсәк, $\forall x\in\mathcal{L}$ үчүн

$$[(\lambda\mathcal{B})x]=C[x] \quad \text{вә}$$

$$[(\lambda\mathcal{B})x]=[\lambda(\mathcal{B}x)]=\lambda[\mathcal{B}x]=\lambda(A[x])=(\lambda A)[x]$$

бәрабәрликләриндән чыхыр ки,

$$C=\lambda A.$$

Башга сөзлә, хәтти операторун әдәдә һасилинин матриси, һәмин операторун матрисинин бу әдәдә һасилинә бәрабәрдир.

Бизә мә"лумдур ки, $\mathcal{E}$ ваһид операторунун истәнилән координат системиндә матриси E ваһид матрисиндән ибарәтдир. Буна көрә дә, әкәр $\mathcal{B}$ гејри-мәхсуси операторунун матрисини A илә, $\mathcal{B}^{-1}$ операторунун матрисини X илә ишарә етсәк,

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}=\mathcal{B}^{-1}\mathcal{B}=\mathcal{E}$$

бәрабәрлијиндән чыхыр ки,

$$AX=XA=E.$$

Бурадан да $X=A^{-1}$ олдуғуну алырыг. Демәли $\mathcal{B}$ операторунун тәрсинин матриси бу операторун матрисинин тәрсинә бәрабәрдир.
Бурадан хүсуси һалда чыхыр ки, хәтти операторун тәрсинин варлығы үчүн зәрури вә кафи шәрт онун матрисинин тәрсинин олмасыдыр.

Нәһајәт, јухарыда алдығымыз хассәләрдән ашкардыр ки, әкәр $\mathcal{B}$ хәтти операторунун матриси A оларса, онда истәнилән мәнфи олмајан m там әдәди үчүн $\mathcal{B}^m$ операторунун матриси A^m олур. Хүсуси һалда $\mathcal{B}$ гејри-мәхсуси оператор оларса ихтијари там m әдәди үчүн $\mathcal{B}^{-m}$ операторунун матриси A^{-m} олур.

Елементләри $\mathcal{P}$ мејданындан олан бүтүн n-тәртибли квадрат матрисләр чохлуғуну $\mathcal{P}_{n\times n}$ илә ишарә едәк.

Асанлыгла јохламаг олар ки, $\mathcal{P}_{n\times n}$ чохлуғу матрисләрин ади мә"нада вурулмасы, топланмасы вә матрисин әдәдә һасили әмәлләринә нәзәрән ассосиатив чәбрин тә"рифиндәки бүтүн шәртләри өдәјир.
Бу чәбрә n-тәртибли квадрат матрисләр чәбри дејилир.

Фәрз едәк ки, ејни бир $\mathcal{P}$ мејданы үзәриндә $\mathcal{T}$ вә $\mathcal{H}$ ассосиатив чәбрләри верилиб. $\forall a,b\in\mathcal{T}$ вә $\lambda\in\mathcal{P}$ үчүн $\mathcal{T}$ чәбриндә тә"јин олунан әмәлләри $a+b,\ a\cdot b;\ \lambda * a$ вә $\forall a',b'\in\mathcal{H},\ \lambda\in\mathcal{P}$ үчүн $\mathcal{H}$ чәбриндә тә"јин олунан әмәлләри $a'\oplus b',\ a'\odot b',\ \lambda\circledast a'$ шәклиндә ишарә едәк.

<u>Тә"риф:</u> Әкәр $\mathcal{T}$ вә $\mathcal{H}$ ассосиатив чәбрләринин елементләри арасында елә гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг варса ки, бу ујғунлугда $\forall a, b\in\mathcal{T}$ вә $\lambda\in\mathcal{P}$ үчүн

$$a\leftrightarrow a',\quad b\leftrightarrow b'\quad (a',b'\in\mathcal{H})$$

олдугда $a+b\leftrightarrow a'\oplus b',\quad a\cdot b\leftrightarrow a'\odot b'$ вә $\lambda * a\leftrightarrow\lambda\circledast a'$ олур, онда дејирләр ки, бу чәбрләр изоморфдур. Башга сөзлә $\mathcal{T}$ вә $\mathcal{H}$ чәбрләринин елементләри арасында елә гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг варса ки, бу ујғунлуг заманы онларда тә"јин олунмуш әмәлләр сахланылыр, онда дејирләр ки, бу чәбрләр изоморфдур.

<u>Теорем:</u> Тутаг ки, $\mathcal{L}_n$ $\mathcal{P}$ мејданы үзәриндә n-өлчүлү хәтти фәзадыр. Онда бу фәзаны өз-өзүнә ин"икас етдирән $L(\mathcal{L}_n,\mathcal{L}_n)$ хәтти операторлар чәбри илә, елементләри $\mathcal{P}$ мејданындан олан n-тәртибли $\mathcal{P}_{n\times n}$ квадрат матрисләр чәбри изоморфдур.

<u>Исбаты:</u>
$\mathcal{L}_n$ фәзасында һәр һансы $e_1,e_2,\dots,e_n$ координат системини гејд едәк.
$\forall\mathcal{B}\in L(\mathcal{L}_n,\mathcal{L}_n)$ операторуна бу координат системиндә ујғун олан A матрисини гаршы гојаг.

$$\mathcal{B}\leftrightarrow A$$

Мә"лумдур ки, координат системи гејд едилдикдә бу ујғунлуг $L(\mathcal{L}_n,\mathcal{L}_n)$ чәбри илә $\mathcal{P}_{n\times n}$ чәбринин елементләри арасында гаршылыглы биргијмәтли ујғунлугдур. Дикәр тәрәфдән әкәр $\mathcal{B}\leftrightarrow B$ оларса онда

$$\forall\mathcal{A},\mathcal{B}\in L(\mathcal{L}_n,\mathcal{L}_n)\ \text{вә}\ \forall\lambda\in\mathcal{P}\ \text{үчүн}$$

$$\mathcal{A}+\mathcal{B}\leftrightarrow A+B$$
$$\mathcal{A}\mathcal{B}\leftrightarrow AB$$
$$\lambda\mathcal{A}\leftrightarrow\lambda A$$

олдуғу бизә мә"лумдур. Бурадан да тә"рифә көрә алырыг ки, $L(\mathcal{L}_n,\mathcal{L}_n)$ чәбри илә $\mathcal{P}_{n\times n}$ чәбри изоморфдур.
Теорем исбат олунду.

§ 10. Хәтти операторун мәхсуси әдәди вә мәхсуси вектору.

Тутаг ки, $\mathcal{P}$ мејданы үзәриндә $\mathcal{L}$ хәтти фәзасыны өз-өзүнә ин"икас етдирән $\mathcal{A}$ хәтти оператору верилмишдир.

Тә"риф: Әкәр елә $\lambda \in \mathcal{P}$ әдәди вә сыфырдан фәргли $x \in \mathcal{L}$ вектору варса ки,

$$\mathcal{A}x = \lambda x \qquad (1)$$

бәрабәрлији өдәнилир, онда λ әдәдинә $\mathcal{A}$ операторунун мәхсуси әдәди, x векторуна исә $\mathcal{A}$ операторунун λ мәхсуси әдәдинә ујғун мәхсуси вектору дејилир.

Теорем 10.1 Һәр бир мәхсуси вектор јеканә мәхсуси әдәдә ујғундур.

Исбаты:

Әксини фәрз едәк, тутаг ки, $\mathcal{A}$ операторунун x мәхсуси вектору λ_1 вә λ_2 мәхсуси әдәдләринә ујғундур. Онда

$\mathcal{A}x = \lambda_1 x$, $\mathcal{A}x = \lambda_2 x$ бәрабәрликләриндән чыхыр ки,

$$\lambda_1 x = \lambda_2 x \text{ вә ја } (\lambda_1 - \lambda_2)x = \theta.$$

Шәртә көрә x мәхсуси вектор олдуғундан сыфырдан фәрглидир. Онда ахырынчы бәрабәрликдән алырыг ки, $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ вә ја $\lambda_1 = \lambda_2$.
Теорем исбат олунду.

Теорем: Әкәр $\mathcal{A}$ операторунун x_1 вә x_2 мәхсуси векторлары ејни бир λ мәхсуси әдәдинә ујғун мәхсуси векторлардырса, онда $x_1 + x_2$ вектору да $\mathcal{A}$ операторунун λ мәхсуси әдәдинә ујғун мәхсуси вектордур.

Исбаты:

Доғрудан да $\mathcal{A}x_1 = \lambda x_1$ вә $\mathcal{A}x_2 = \lambda x_2$ бәрабәрликләрини тәрәф-тәрәфә топласаг $\mathcal{A}x_1 + \mathcal{A}x_2 = \lambda(x_1 + x_2)$ аларыг. $\mathcal{A}$ хәтти оператор олдуғундан бурадан чыхыр ки,

$$\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \lambda(x_1 + x_2).$$

Теорем исбат олунду.

Теорем: Әкәр x вектору $\mathcal{A}$ операторунун λ мәхсуси әдәдинә ујғун мәхсуси вектордурса, онда $\forall \alpha \in \mathcal{P}$ әдәди үчүн αx вектору да $\mathcal{A}$ операторунун λ мәхсуси әдәдинә ујғун мәхсуси вектордур.

Исбаты: Доғрудан да

$$\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}x = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x)$$

олдуғундан $\mathcal{A}(\alpha x) = \lambda(\alpha x)$ олур.
Теорем исбат олунду.

Исбат етдијимиз ахырынчы 2 теоремдән ашкардыр ки, $\mathcal{A}$ операторунун ејни бир λ мәхсуси әдәдинә ујғун мәхсуси векторлар чохлуғу $\mathcal{L}$ фәзасынын мүәјјән бир $\mathcal{U}$ алт-фәзасыны тәшкил едир.

Теорем: $\mathcal{A}$ операторунун мүхтәлиф мәхсуси әдәдләринә ујғун олан мәхсуси векторлар системи хәтти асылы дејил.

Исбаты:

Тутаг ки, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ әдәдләри $\mathcal{A}$ операторунун мүхтәлиф мәхсуси әдәдләридир. Бу мәхсуси әдәдләрә ујғун мәхсуси векторлар

$$x_1, x_2, \dots, x_s \qquad (2)$$

олсун. Теоремин исбатыны s-ә нәзәрән там ријази индуксија методу илә апараг.

Истәнилән мәхсуси вектор сыфырдан фәргли олдуғундан теорем $s=1$ олдугда доғрудур.

Фәрз едәк ки, теорем $s-1$ сајда мәхсуси вектор үчүн доғрудур. Көстәрәк ки, бу заман теорем s сајда мәхсуси вектор үчүн дә доғру олур.

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ әдәдләри үчүн

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_s x_s = \theta \qquad (3)$$

бәрабәрлијини дүзәлдәк. Әкәр (3) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфинә $\mathcal{A}$ оператору илә тә"сир етсәк

$$\mathcal{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_s x_s) = \mathcal{A}\theta$$

вә ја

$$\alpha_1 \mathcal{A}x_1 + \alpha_2 \mathcal{A}x_2 + \dots + \alpha_s \mathcal{A}x_s = \theta \qquad (4)$$

аларыг. Шәртә көрә $\mathcal{A}x_i = \lambda_i x_i$, $(i = 1, 2, \dots, s)$.
Онда (4) бәрабәрлијиндән алырыг ки,

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \dots + \alpha_s \lambda_s x_s = \theta \qquad (5)$$

(3) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфини λ_s вуруб, алынан бәрабәрликдән (5) бәрабәрлијини тәрәф-тәрәфә чыхсаг аларыг

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_s)x_1+\alpha_2(\lambda_2-\lambda_s)x_2+\dots+\alpha_{s-1}(\lambda_{s-1}-\lambda_s)x_{s-1}=\theta \quad (6)$$

Фәрзијјәмизә көрә $x_1, x_2, \dots, x_{s-1}$ системи хәтти асылы дејил. Онда (6) бәрабәрлији јалныз вә јалныз

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_s)=0,\ \alpha_2(\lambda_2-\lambda_s)=0,\ \dots,\ \alpha_{s-1}(\lambda_{s-1}-\lambda_s)=0$$

олдугда доғру олар.
Теоремин шәртинә көрә

$$\lambda_1-\lambda_s\neq 0;\ \lambda_2-\lambda_s\neq 0,\ \dots,\ \lambda_{s-1}-\lambda_s\neq 0$$

олдуғундан аларыг ки,

$$\alpha_1=0,\ \alpha_2=0,\ \dots,\ \alpha_{s-1}=0 \quad (7)$$ олмалыдыр.

(7)-ни (3)-дә нәзәрә алсаг $\alpha_s x_s=\theta$ олдуғуну аларыг, бурада x_s мәхсуси вектор олдуғундан $x_s\neq\theta$. Онда ахырынчы бәрабәрликдән чыхыр ки, $\alpha_s=0$ олмалыдыр.
Беләликлә биз көстәрдик ки, (3) бәрабәрлији јалныз

$$\alpha_1=0,\ \alpha_2=0,\ \dots,\ \alpha_{s-1}=0,\ \alpha_s=0$$

олдугда өдәнир. Бу исә о демәкдир ки, $x_1, x_2, \dots, x_s$ системи хәтти асылы дејил.
Теорем исбат олунду.

§ II. ХАРАКТЕРИСТИК ЧОХҺӘДЛИ.

Тутаг ки, елементләри P мејданындан олан n-тәртибли квадрат $A=(\alpha_{ij})_{n\times n}$ матриси верилмишдир. λ дәјишән олмагла

$$\varphi(\lambda)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}\alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda\end{vmatrix}$$

детерминантыны дүзәлдәк.
Ашкардыр ки, $\varphi(\lambda)$ λ-дан асылы мүәјјән бир чохһәдли олар.
<u>Тә"риф:</u> $\varphi(\lambda)=|A-\lambda E|$ чохһәдлисинә A матрисинин характеристик чохһәдлиси дејилир. $\varphi(\lambda)=|A-\lambda E|=0$ тәнлијинә исә A матрисинин характеристик тәнлији дејилир.
$\varphi(\lambda)$ чохһәдлисинин јүксәк һәдд әмсалыны тапаг. n-тәртибли детерминантын тә"рифинә көрә $\varphi(\lambda)=|A-\lambda E|$ детерминанты, онун һәр сәтир вә һәр сүтунундан јалныз бир елемент көтүрмәклә дүзәлдилән $n!$ сајда һәдләрин чәбри чәминә бәрабәр олдуғундан, λ-нын ән бөјүк дәрәчәјә малик олдуғу һәдд бу детерминантын

$$(\alpha_{11}-\lambda)(\alpha_{22}-\lambda)\cdots(\alpha_{nn}-\lambda)$$

һәддиндә олар. Һәм дә бу һәддин детерминанта мүсбәт ишарә илә дахил олдуғу ашкардыр. Детерминантын галан бүтүн һәдләриндә λ-нын дәрәчәси $(n-2)$-дән бөјүк олмаз. Чүнки һәмин һәддин вуругларындан бири α_{ij} $(i\neq j)$ оларса, онда һәмин һәддә

$$\alpha_{ii}-\lambda \text{ вә } \alpha_{jj}-\lambda$$

вуруглары дахил олмајачаг.
Беләликлә аларыг ки,

$$\varphi(\lambda)=(\alpha_{11}-\lambda)(\alpha_{22}-\lambda)\cdots(\alpha_{nn}-\lambda)+\psi(\lambda),$$

бурада $\psi(\lambda)$ дәрәчәси $(n-2)$-дән бөјүк олмајан чохһәдлидир.
Сонунчу бәрабәрлији исә ашағыдакы шәкилдә јаза биләрик.

$$\varphi(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\dots+\alpha_{nn})\lambda^{n-1}+\dots$$

Бурада нөгтәләрин јериндә дәрәчәси $(n-2)$-дән бөјүк олмајан һәдләрин чәмләри нәзәрдә тутулур.
Беләликлә ашағыдакы теореми исбат етмиш олуруг.
<u>Теорем:</u> Матрисин характеристик чохһәдлисинин дәрәчәси бу матрисин тәртибинә бәрабәрдир.
<u>Теорем:</u> Охшар матрисләрин характеристик чохһәдлиләри бир-биринә бәрабәрдир.
<u>Исбаты:</u>
Тутаг ки, A вә B охшар матрисләр верилмиш. Онда елә гејри-мәхсуси X матриси вар ки, $A=X^{-1}BX$. Онда ашағыдакы бәрабәрлији јаза биләрик.

$$\varphi_A(\lambda)=|A-\lambda E|=|X^{-1}BX-\lambda E|=|X^{-1}(B-\lambda E)X|=$$
$$=|X^{-1}||B-\lambda E||X|=|X|^{-1}|B-\lambda E||X|$$

Бурадан да $|X|^{-1}$ вә $|X|$ бир-биринин тәрси олдуғундан онларын һасили ваһидә бәрабәр олар. Беләликлә алырыг ки,

$$|A-\lambda E|=|B-\lambda E|, \text{ jә"ни } \varphi_A(\lambda)=\varphi_B(\lambda).$$

Теорем исбат олунду.

Бизә мә"лумдур ки, $\mathcal{L}$ хәтти фәзасыны өз-өзүнә ин"икас етдирән $\mathcal{A}$ хәтти операторунун мүхтәлиф координат системләриндәки матрисләри охшар матрисләрдир. Јухарыда исбат етдик ки, охшар матрисләрин характеристик чохһәдлиләри бир-биринә бәрабәрдир. Бу дедикләримиз әсасында ашағыдакы тә"рифи верә биләрик.

<u>Тә"риф:</u> Операторун һәр һансы координат системиндәки матрисинин характеристик чохһәдлисинә бу операторун характеристик чохһәдлиси, характеристик тәнлијинә исә бу операторун характеристик тәнлији дејилир.

Ашкардыр ки, әкәр координат системи дәјишәрсә операторун характеристик чохһәдлиси дәјишмәјәчәк. Характеристик чохһәдлинин бу хассәси онун истәнилән координат системинә нәзәрән инвариантлығы адланыр.

§ 12. ХӘТТИ ОПЕРАТОРУН МӘХСУСИ ӘДӘДЛӘРИ ВӘ МӘХСУСИ ВЕКТОРЛАРЫНЫН ТАПЫЛМАСЫ.

P мејданы үзәриндә n-өлчүлү $\mathcal{L}_n$ хәтти фәзасынын верилдијини фәрз едәк. Тутаг ки, $\mathcal{A}$ хәтти оператору, $\mathcal{L}_n$ фәзасыны өз-өзүнә ин"икас етдирән оператордур.

$\mathcal{L}_n$ фәзасында һәр һансы $e_1, e_2, \dots, e_n$ (I)

координат системи сечәк. $\mathcal{A}$ хәтти операторунун бу координат системиндә матриси $A=(\alpha_{ij})_{n\times n}$ олсун.

Фәрз едәк ки, x вектору $\mathcal{A}$ операторунун λ мәхсуси әдәдинә ујғун мәхсуси векторудур. x векторунун (I) координат системиндә координат сүтунуну

$$[x]=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$$

– илә

ишарә едәк.

$$\mathcal{A}x=\lambda x \qquad (2)$$

бәрабәрлији (I) координат системиндә матрис формада ашағыдакы шәкилдә јазылар.

$$A[x]=\lambda[x]$$

бу бәрабәрлији ачыг шәкилдә јазсаг аларыг

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$$

вә ја

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha_{11}-\lambda)\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\dots+\alpha_{1n}\xi_n=0\\ \alpha_{21}\xi_1+(\alpha_{22}-\lambda)\xi_n+\dots+\alpha_{2n}\xi_n=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_{n1}\xi_1+\alpha_{n2}\xi_n+\dots+(\alpha_{nn}-\lambda)\xi_n=0\end{array}\right\} \qquad (3)$$

(3) системи $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ мәчһулларына нәзәрән n мәчһуллу n сајда хәтти тәнликләр системидир. x мәхсуси вектор олдуғундан $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ координатларындан һеч олмаса бири сыфырдан фәрглидир. Демәли (3) системинин сыфырдан фәргли һәлли вар. Онда мә"лум теоремә көрә бу системин детерминанты сыфыра бәрабәр олмалыдыр., jә"ни

$$\begin{vmatrix}\alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=|A-\lambda E|=0 \quad (4)$$

бурада E n-тәртибли ваһид матрисдир.

(4)бәрабәрлији көстәрир ки, $\mathcal{A}$ операторунун бүтүн мәхсуси әдәдләри онун характеристик тәнлијинин көкләридир. Тәрсинә, әкәр λ әдәди $\mathcal{A}$ операторунун характеристик тәнлијинин $\mathcal{P}$ мејданына дахил олан һәр һансы көкү оларса, онда λ әдәди $\mathcal{A}$ операторунун мәхсуси әдәдидир. Чүнки бу һалда (3)системинин детерминанты сыфыра бәрабәр олур.

Бурадан да алыныр ки, (3)системинин сыфырдан фәргли һәлли вар. Һәмин сыфырдан фәргли һәлли

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

илә ишарә етсәк, алырыг ки, бу һәлл λ әдәдинә ујғун мәхсуси вектордур. Бурадан ајдындыр ки, $\mathcal{A}$ операторунун мәхсуси векторларыны вә мәхсуси әдәдләрини тапмаг үчүн $\varphi(\lambda)=|A-\lambda E|$ характеристик чохһәдлисини дүзәлдиб бу чохһәдлинин $\mathcal{P}$ мејданына дахил олан бүтүн λ_i көкләрини тапмаг лазымдыр. Бу көкләр $\mathcal{A}$ операторунун мәхсуси әдәдләри олачагдыр. Сонра һәр бир λ_i көкүнү (3)системиндә λ-нын јеринә јазыб, алынан системин хәтти асылы олмајан һәлләрини тә"јин етмәк лазымдыр. Бу хәтти асылы олмајан һәлләрин һәр бири λ_i мәхсуси әдәдинә ујғун мәхсуси вектор олачаг. Белә һәлләрин сајы $n-r_i$ әдәдинә бәрабәр олур ки, бурада n- фәзанын өлчүсү, r_i исә $A-\lambda_i E$ матрисинин рангыдыр.

Теорем: Әкәр $\mathcal{P}$ - комплекс әдәдләр мејданы оларса, комплекс $\mathcal{L}$ хәтти фәзасыны өз-өзүнә ин"икас етдирән истәнилән $\mathcal{A}$ хәтти операторунун бу фәзада ән азы бир мәхсуси вектору вар.

Исбаты:

Чәбрин әсас теореминә көрә $\mathcal{A}$ операторунун $\varphi(\lambda)=|A-\lambda E|$ характеристик чохһәдлисинин $\mathcal{P}$ комплекс әдәдләр мејданында ән азы бир көкү вар. Бу көк јухарыда көстәрдијимиз кими $\mathcal{A}$ операторунун мәхсуси әдәдидир. Һәмин көкү (3) системиндә λ-нын јеринә јазсаг системин детерминанты сыфыра бәрабәр олар. Онда системин сыфырдан фәргли һәлли олачағы бизә мә"лумдур. Һәмин сыфырдан фәргли һәлл $\mathcal{A}$ операторунун мәхсуси вектору олачаг.

Теорем исбат олунду.

Гејд едәк ки, $\mathcal{P}$ һәгиги әдәдләр мејданы олдугда һәгиги $\mathcal{L}$ фәзасында $\mathcal{A}$ хәтти операторунун ола биләр ки, һеч бир мәхсуси вектору олмасын. Чүнки бу һалда $\varphi(\lambda)$ һәгиги әмсаллы елә чох-һәдли ола биләр ки, онун һеч бир һәгиги көкү олмасын.

Онда (3)системинин детерминанты ихтијари һәгиги λ әдәди үчүн сыфырдан фәргли олдуғундан бу системин јалныз сыфыр һәлли вар.

§ 13. САДӘ СТРУКТУРЛУ ХӘТТИ ОПЕРАТОРЛАР.

Әкәр $\mathcal{A}$ хәтти операторунун n-өлчүлү $\mathcal{L}_n$ хәтти фәзасында n сајда хәтти асылы олмајан мәхсуси вектору оларса, онда бу оператора садә структурлу оператор дејилир.

Билирик ки, n-өлчүлү $\mathcal{L}_n$ фәзасында истәнилән n сајда хәтти асылы олмајан вектор бу фәзада базис тәшкил едир. $\mathcal{A}$ садә структурлу хәтти операторунун хәтти асылы олмајан n сајда мәхсуси векторлары

$$a_1, a_2, \dots, a_n \qquad (I)$$

олсун. Мәхсуси векторлары (I)-дәки низамлы дүзүлүшүнү координат системи гәбул едәк.

Тутаг ки, $a_1, a_2, \dots, a_n$ мәхсуси векторларына ујғун мәхсуси әдәдләр ујғун олараг $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ әдәдләридир. (Ола биләр ки, бу әдәдләрдән бә"зиләри бир-биринә бәрабәр олсун). Онда

$$\mathcal{A}a_1 = \lambda_1 a_1$$
$$\mathcal{A}a_2 = \lambda_2 a_2$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\mathcal{A}a_n = \lambda_n a_n$$

јаза биләрик. Бурадан ашкардыр ки, $\mathcal{A}$ операторунун мәхсуси векторлардан ибарәт координат системиндә матриси

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

олар.

Беләликлә, биз ашағыдакы теореми исбат етмиш олуруг.

Теорем: Садә структурлу $\mathcal{A}$ хәтти операторунун мәхсуси векторларындан ибарәт координат системиндә бу операторун матриси диагонал матрисдир.

Ашкардыр ки, бу теоремин тərси дə доғрудур.

Теорем: Əкəр $\mathcal{A}$ хəтти операторунун матриси мүəјјəн координат системиндə диагонал матрисдирсə, онда бу оператор садə структурлудур.

Исбаты:

Тутаг ки, $\mathcal{A}$ хəтти операторунун матриси $a_1, a_2, \dots, a_n$ координат системиндə (*) шəклиндəдир. Онда операторун матрисинин тəрифинə əсасəн

$$\begin{aligned} \mathcal{A}a_1 &= \lambda_1 a_1 + 0a_2 + \dots + 0a_n \\ \mathcal{A}a_2 &= 0a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + 0a_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{A}a_n &= 0a_1 + 0a_2 + \dots + \lambda_n a_n \end{aligned} \quad \text{вəја} \quad \begin{aligned} \mathcal{A}a_1 &= \lambda_1 a_1 \\ \mathcal{A}a_2 &= \lambda_2 a_2 \\ &\dots\dots \\ \mathcal{A}a_n &= \lambda_n a_n \end{aligned}$$

јаза билерик. Бурадан ашкардыр ки, хəтти асылы олмајан n сајда $a_1, a_2, \dots, a_n$ векторлары $\mathcal{A}$ операторунун мəхсуси векторларыдыр.

Теорем исбат олунду.

Садə структурлу $\mathcal{A}$ хəтти операторунун $\mathcal{L}_n$ фəзасында сечилмиш ихтијари

$$e_1, e_2, \dots, e_n \qquad (2)$$

координат системиндəки матрисини A илə ишарə едəк. Тутаг ки, $e_1, e_2, \dots, e_n$ координат системиндəн мəхсуси векторлардан ибарəт $a_1, a_2, \dots, a_n$ координат системинə кечид матриси T-дыр. Онда

$$J = T^{-1}AT \qquad (3)$$

олар. Бурадан

$$A = TJT^{-1}; \qquad (4)$$

вə ја

$$A = T\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}T^{-1} \qquad (5)$$

алырыг. Јə'ни садə структурлу операторун матриси мүəјјəн бир диагонал матрисə охшардыр, белə ки, бу диагонал матрисин диагонал елементлəри $\mathcal{A}$ операторунун мəхсуси əдəдлəри олуб, сол баш диагонал бојунча мəхсуси векторларын координат системиндəки дүзүлүшүнə ујғун

олараг јерлəширлəр.

Тəрсинə, əкəр $\mathcal{A}$ операторунун матриси мүəјјəн диагонал матрисə охшар оларса, онда $\mathcal{A}$ оператору садə структурлу олур. Доғрудан да охшар матрислəр ејни бир операторун мүхтəлиф координат системлəриндə јазылмыш матрислəри олдуғундан алырыг ки, елə бир координат системи вар ки, бу координат системиндə $\mathcal{A}$ операторунун матриси диагонал шəкилдəдир. Матриси диагонал матрис олан һəр бир операторун садə структурлу олдуғу бизə мə'лумдур. Беləликлə, ашағыдакы теореми исбат етмиш олуруг.

Теорем. Матрисин диагонал матрисə охшар олмасы үчүн зəрури вə кафи шəрт бу матрисин мүəјјəн бир садə структурлу операторун матриси олмасыдыр.

Мə'лумдур ки, n-тəртибли квадрат A матрисинин гүввəтлəрини һесабламаг практик олараг чохлу əмəллəр јеринə јетирмəк тəлəб едир. Белə ки, A^2 һесабламаг үчүн n^3 сајда вурма вə n^3 сајда топлама əмəллəрини јеринə јетирмəк лазым кəлир. A^3, A^4 вə с. һесабладыгда бу əмəллəрин сајы сүр'əтлə артыр. Əкəр A садə структурлу операторун матриси оларса, бу чəтинлији чох асанлыгла арадан галдырмаг олур. Доғрудан да, бу һалда

$$A = TJT^{-1}$$

шəклиндə кəстəрилə билдијиндəн, ријази индуксија методу илə асанлыгла исбат едə билəрик ки, $A^k = TJ^kT^{-1}$ олур. Бурада k натурал əдəддир. Дикəр тəрəфдəн

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

олдуғундан (Бу бəрабəрлијин доғрулуғу ријази индуксија методу илə асанлыгла исбат едилир)

$$A^k = T\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n^k \end{pmatrix}T^{-1} \qquad (6)$$

алырыг.

Гејд едәк ки, әкәр $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ әдәдләринин һәр бири сыфырдан фәргли оларса (4) вә (5) бәрабәрликләриндән истифадә едәрәк асанлыгла һесаблаја биләрик.

$$A^{-1} = (TJT^{-1})^{-1} = T\,J^{-1}T^{-1}$$

вә

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \lambda_2^{-1} & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

олдуғундан,

(J^{-1} үчүн бу бәрабәрлијин доғру олдуғуну $J J^{-1} = J^{-1} J = E$ бәрабәрлијинә әсасән асанлыгла јохламаг олар) алырыг ки,

$$A^{-1} = T \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \lambda_2^{-1} & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} T^{-1} \qquad (7)$$

(7) вә (6)-дан ашкардыр ки, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ әдәдләринин һәр бири сыфырдан фәргли олдугда истәнилән там k әдәди үчүн

$$A^{k} = T \begin{pmatrix} \lambda_1^{k} & & 0 \\ & \lambda_2^{k} & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n^{k} \end{pmatrix} T^{-1}$$

бәрабәрлији доғрудур.

Көрүндүјү кими матрисин диагонал матрисә охшар олмасыны билмәк, һәм дә практик әһәмијјәтә маликдир. Бу мәгсәдлә операторун садә структурлу олмасыны мүәјјән едән ашағыдакы теоремләри исбат едәк.

<u>Теорем:</u> Әкәр n-өлчүлү фәзада тә"сир едән операторун характеристик чохһәдлисинин n сајда мүхтәлиф көкү варса онда оператор садә структурлудур.

<u>Исбаты:</u>

Доғрудан да бу һалда n сајда чүт-чүт мүхтәлиф мәхсуси әдәдә n сајда хәтти асылы олмајан мәхсуси вектор ујғун олдуғундан оператор садә структурлу олур.

Теорем исбат олунду.

<u>Теорем:</u> n-өлчүлү комплекс $\mathcal{L}_n$ фәзасында тә"сир едән $\mathcal{A}$ операторунун садә структурлу олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт, бу операторун характеристик чохһәдлисинин k_i дәфә тәкрарланан һәр бир λ_i көкү үчүн $\operatorname{rang}(A-\lambda_i E) = n - k_i$ олмасыдыр.

<u>Исбаты:</u>

Зәрурилик: Тутаг ки, $\mathcal{A}$ садә структурлудур. Онда

$$A = TJT^{-1}$$ олдуғундан,

$$A - \lambda_i E = T(J - \lambda_i E)T^{-1}$$ олур.

Охшар матрисләрин ранглары бәрабәр олдуғундан алырыг ки,

$$\operatorname{rang}(A-\lambda_i E) = \operatorname{rang}(J-\lambda_i E).$$

Дикәр тәрәфдән

$$J - \lambda_i E = \begin{pmatrix} \lambda_1-\lambda_i & & 0 \\ & \lambda_2-\lambda_i & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n-\lambda_i \end{pmatrix}$$

матрисинин рангы онун тамамилә сыфыр олмајан сәтирләринин сајына бәрабәр олдуғундан чыхыр ки,

$\operatorname{rang}(J-\lambda_i E)$ - әдәди $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ әдәдләри ичәрисиндә λ_i-јә бәрабәр олмајан әдәдләрин сајына бәрабәрдир. λ_i-нин тәкрарланма дәрәчәси k_i олдуғундан

$$\operatorname{rang}(J-\lambda_i E) = n - k_i$$

олур. Демәли, $\operatorname{rang}(A-\lambda_i E) = n - k_i$.

<u>Кафилик:</u> $\operatorname{rang}(A-\lambda_i E) = r_i$-илә ишарә едәк.

Тутаг ки, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ әдәдләри $\mathcal{A}$ операторунун мүхтәлиф мәхсуси әдәдләридир. λ_i мәхсуси әдәдинә ујғун кәлән мәхсуси векторлардан ибарәт алт-фәзанын өлчүсү $n-r_i$ (бу алтфәзанын базиси $(A-\lambda_i E)X=0$ бирчинс тәнлијинин фундаментал һәлләридир) вә шәртә көрә $n-k_i=r_i$ олдуғундан алырыг ки, $\mathcal{A}$ операторунун λ_i мәхсуси әдәдинә ујғун алт-фәзанын өлчүсү

$$n - r_i = k_i\text{-дир} \quad (i=1,2,3,\ldots,s)$$

Әкәр λ_1 мәхсуси әдәдинә ујғун хәтти асылы олмајан мәхсуси векторлары

$$a_1, a_2, \ldots, a_{k_1},$$

λ_2-ә ујғун хәтти асылы олмајан мәхсуси векторлары $b_1, b_2, \ldots, b_{k_2}$ вә с., λ_s-ә ујғун хәтти асылы олмајан мәхсуси векторлары

$u_1, u_2, \ldots, u_{k_s}$ илә ишарә етсәк, ҹәми

$k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$ сајда

$$a_1, a_2, \ldots, a_{k_1}, b_1, b_2, \ldots, b_{k_2}, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_{k_s} \tag{8}$$

мәхсуси векторларыны аларыг. Ҝөстәрәк ки, (8) системи хәтти асылы дејил. Әксини фәрз едәк.

Тутаг ки,

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_{k_1} a_{k_1} + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_{k_2} b_{k_2} + \\ + \cdots + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_{k_s} u_{k_s} = \theta \tag{9}$$

бәрабәрлији әмсаллардан һеч олмаса биринин сыфырдан фәргли гијмәтиндә өдәнилир. Мүәјјәнлик үчүн $\mu_{k_s} \neq 0$ олсун.
(9) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфинә $\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}$ оператору илә тә"сир едәк. (бурада $\mathcal{E}$ - ваһид операторлур). Онда аларыг.

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_{k_2} b_{k_2}) + (\lambda_3 - \lambda_1)(\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \cdots + \gamma_{k_3} c_{k_3}) + \\ + \cdots + (\lambda_s - \lambda_1)(\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_{k_s} u_{k_s}) = \theta$$

Әкәр бу бәрабәрлијә $\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E}$. оператору илә тә"сир етсәк

$$(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \cdots + \gamma_{k_3} c_{k_3}) + \cdots + \\ + (\lambda_s - \lambda_1)(\lambda_s - \lambda_2)(\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_{k_s} u_{k_s}) = \theta$$

бәрабәрлијини аларыг, вә с. просеси бу гајда илә давам етдирәрәк

алынан бәрабәрликләрә ардычыл оларг $\mathcal{A} - \lambda_3 \mathcal{E}, \ldots, \mathcal{A} - \lambda_s \mathcal{E}$ операторлары илә тә"сир етсәк, нәтиҹәдә

$$(\lambda_s - \lambda_1)(\lambda_s - \lambda_2) \cdots (\lambda_s - \lambda_{s-1})(\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_{k_s} u_{k_s}) = \theta$$

бәрабәрлијини аларыг. Шәртә ҝөрә $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ мүхтәлиф мәхсуси әдәдләр олдуғундан сонунҹу бәрабәрликдән аларыг ки,

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_{k_s} u_{k_s} = \theta .$$

Фәрзијјәмизә ҝөрә $\mu_{k_s} \neq 0$. Онда ахырынҹы бәрабәрликдән чыхыр ки, $u_1, u_2, \ldots, u_{k_s}$ векторлар системи хәтти асылыдыр. Бу исә ола билмәз. Чүнки бу векторлар λ_s-ә ујғун хәтти асылы олмајан мәхсуси векторлардыр. Бу зиддијјәт ҝөстәрир ки, фәрзијјәмиз доғру дејил, јә"ни (8) системи хәтти асылы дејил. (8) системи $\mathcal{A}$ операторунун n сајда хәтти асылы олмајан мәхсуси векторлары олдуғундан аларыг ки, $\mathcal{A}$ оператору садә струклудур.
Теорем исбат олунду.

X - ФӘСИЛ

ГРУПЛАР

§ I. ЈАРЫМГРУПЛАР ВӘ МОНОИДЛӘР.

Бош олмајан M чохлуғу мүәјјән $\top$ бинар чәбри әмәли тә"јин олунмуш чохлуг олсун. Бу о демәкдир ки, M чохлуғунда елә $\top$ гајдасы тә"јин олунмушдур ки, онун васитәсилә бу чохлугдан көтүр мүш ихтијари a вә b елементләриндән дүзәлдилмиш низамлы $\langle a,b\rangle$ чүтүнә гаршы һәмин чохлугдан олан $a\top b=c$ јеканә елементини ујғун гојмаг мүмкүндүр. Бу заман дејирләр ки, M чохлуғу $\top$ әмәлинә нәзәрән гапалыдыр, һәмчинин дејирләр ки, M чохлуғу $\top$ әмәлинә нәзәрән группоиддир. Бу фикри садәҹә олараг белә ифадә етмәк олар: $\langle M;\top\rangle$ чәбри (структуру) группоиддир.

<u>Тә"риф I:</u>

Группоиддә тә"јин олунмуш $\top$ әмәли ассосиативдирсә белә группоидә јарымгруп дејилир.

<u>Тә"риф 2:</u>

Јарымгрупда әмәлә нәзәрән нејтрал елемент варса, белә јарымгрупа ваһидли јарымгруп вә ја садәҹә олараг, моноид дејилир. Хатырлајаг ки, $e\in M$ елементи о заман $\top$-јә нәзәрән нејтрал елемент адланыр ки, ихтијари $a\in M$ үчүн $a\top e=e\top a=a$ олсун.

Мәсәлән, натурал әдәдләр чохлуғунда вурма әмәлинә нәзәрән нејтрал елемент 1-дир. Доғрудан да

$$\forall a\in\mathbb{N}:\quad a\cdot 1=1\cdot a=a.$$

Лакин һәмин чохлугда топлама әмәлинә нәзәрән нејтрал елемент јохдур. Доғрудан да, топламаја нәзәрән нејтрал елементи сыфыр адландырмышыг. Лакин сыфыр әдәди натурал әдәдләр чохлуғуна дахил дејил.

Ола биләр ки, чохлугда тә"јин олунмуш әмәлә нәзәрән сағ нејтрал елемент олсун, лакин сол нејтрал елемент олмасын, мәсәлән: натурал әдәдләр чохлуғунда $\top$ әмәли гүввәтә јүксәлтмә әмәлидирсә, јә"ни $a\top b=a^b$-дирсә, онда $\forall a\in\mathbb{N}:\ a\top 1=a^1=a$, лакин $1\top a=1^a=1$; бу исә көстәрир ки, 1 сол нејтрал елемент дејил. Лакин ашағыдакы һөкмү һәмишә јадда сахламаг лазымдыр:

<u>Теорем I:</u> M чохлуғунда $\top$ әмәлинә нәзәрән сағ вә сол нејтрал елементләр варса, онлар үст-үстә дүшүрләр. Доғрудан да: әкәр e' сол, e'' исә сағ нејтрал-елементләрдирсә, онда аларыг ки:

$$e'=e'\top e''=e''.$$

Јухарыда дедикләримизи тәтбиг етсәк асанлыгла көрмәк олар ки:

1. $\mathbb{N}$-натурал әдәдләр чохлуғу гүввәтә јүксәлтмә әмәлинә нәзәрән группоиддир, лакин јарымгруп дејил.
2. $\mathbb{N}$ чохлуғу топламаја нәзәрән группоиддир, һәтта јарымгрупдур, лакин моноид дејил.
3. $\mathbb{N}$ чохлуғу вурмаја нәзәрән группоид, јарымгруп вә һәтта моноиддир.

Билирик ки, чәбрдә тә"јин олунмуш әмәл коммутативдирсә, онда белә чәбрә һәмин әмәлә нәзәрән коммутатив чәбр дејилир.

Јухарыдакы мисаллардан 1-группоид коммутатив дејил, чүнки $a^b=b^a$ бәрабәрлији, үмумијјәтлә, доғру дејил. Дикәр ики јарымгруплар коммутатив јарымгруплардыр.

$M_n(\mathbb{R})$ илә елементләри һәгиги әдәдләр мејданындан олан n-тәртибли бүтүн матрисләр чохлуғуну ишарә едәк, јә"ни

$$M_n(\mathbb{R})=\{A=(a_{ij})_{n\times n}\mid a_{ij}\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\}$$

Ашкардыр ки, $\langle M_n(\mathbb{R});+\rangle$ коммутатив моноиддир. Бурада сыфыр n-тәртибли сыфыр матрисдир.

Лакин $\langle M_n(\mathbb{R});\cdot\rangle$ коммутатив олмајан моноиддир, бурада e ваһиди n-тәртибли E ваһид матрисдир.

Фәрз едәк ки, $M=\langle M;\top\rangle$ јарымгруп вә ја моноиддир, H исә M чохлуғунун бош олмајан алтчохлуғудур, H-а о заман M јарымгрупунун (моноидинин) алтјарымгрупу дејилир ки, H чохлуғу өзүнүн ихтијари a,b елементләри илә бирликдә $a\top b$-ни дә өз дахилиндә сахласын.

Бу заман дејәҹәјик ки, H чохлуғу M-дәки $\top$ әмәлинә нәзәрән гапалыдыр. Әкәр H чохлуғу әлавә олараг, M моноидинин нејтрал елементини дә өзүндә сахлајырса, H-а M моноидинин алтмоноиди дејилир.

Ашкардыр ки, H-да ассосиативлик автоматик өдәнилир.

Мәсәлән: билирик ки, $\langle\mathbb{Z};\cdot\rangle$ чәбри јарымгруп вә һәм дә моноиддир, нејтрал исә елемент ади „1"-дир. Инди $n\mathbb{Z}$ [illegible]

n натурал әдәдинин мисилләриндән ибарәт бүтүн там әдәдләр чохлуғуна бахаг. $\langle n\mathbb{Z};\cdot\rangle$ чәбри јарымгрупдур, моноид дејил. Бу јарымгруп $\langle \mathbb{Z};\cdot\rangle$ групунун алтјарымгрупудур. Лакин $\langle n\mathbb{Z};+\rangle$ моноиди $\langle \mathbb{Z};+\rangle$ моноидинин алтмоноидидир.

Инди даһа чох ишләнән јарымгрупа(вә ја моноидә)аид бир мисал көстәрәк. M чохлуғу бош олмајан һәр һансы чохлуг, H исә M чохлуғунун бүтүн чевирмәләри чохлуғу олсун. H чохлуғундан бинар чәбри әмәл олараг чевирмәләрин композисија ганунуну көтүрәк вә ону $*$ илә ишарә едәк. Ашкардыр ки, H чохлуғу $*$ әмәлинә нәзәрән гапалыдыр вә $*$ әмәли ассосиативдир, демәли $\langle H;*\rangle$ јарымгрупдур.

§ 2. АССОСИАТИВЛИЈИН ҮМУМИЛӘШМӘСИ.

M һәр һансы чохлуг $\top$ әмәли исә бу чохлугда тә"јин олунмуш бинар чәбри әмәлдир, јә"ни $\langle M;\top\rangle$ чәбри верилдијини фәрз едәк. $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ исә бу чохлуғун елементләриндән дүзәлдилмиш ардычыллыг олсун. Демәли $a_1, a_2, \ldots, a_n$ низамлы системдир. $a_1 \top a_2 \top \ldots \top a_n$ илә верилмиш елементләр ардычыллығынын индуктив шәкилдә тә"јин олунмуш ашағыдакы композисијасыны ишарә едәк:

$$a_1 \top a_2 \top \ldots \top a_n = (a_1 \top a_2 \top \ldots \top a_{n-1}) \top a_n$$

Ашкардыр ки, елементләрин нөвбәсини дәјишмәдән n узунлуғлу композисијалары мүхтәлиф гајдада тә"јин етмәк олар. Әкәр, хүсуси һалда, композисија гануну вуруғдурса онда $a_1, a_2, \ldots, a_n$ елементләринин композисијасы һасил адланыр вә $\prod_{i=1}^{n} a_i$ кими ишарә олунур;

Әкәр композисија гануну топламадырса, онда $a_1, a_2, \ldots, a_n$ елементләрин композисијасы чәм адланыр вә $\sum_{i=1}^{n} a_i$ кими ишарә олунур.

$$a_1 a_2 \cdots a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i \, , \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \, .$$

Әкәр M чохлуғундакы бинар әмәл ассосиативдирсә, онда верилмиш композисијада мө"тәризәләри ихтијари гајдада гојмаг олар(күтүн

олар), башга сөзлә десәк, мө"тәризә јазмаг артыгдыр.
Буну ашағыдакы теорем көстәрир.

Теорем: M чохлуғунда тә"јин олунмуш бинар чәбри әмәл ассосиативдирсә, о да һәмин әмәлин M-дән олан n елементә тәтбиги заманы мө"тәризәләри ихтијари гајдада дүзмәк олар, јә"ни әмәлин нәтичәси мө"тәризәләрин дүзүлүшүндән асылы дејил.

Исбаты n-ә нәзәрән индуксија илә апараг. $n=1,2$ үчүн исбат ајдындыр. $n=3$ олдугда теорем M чохлуғундакы әмәлин ассосиативлик гануну илә үст-үстә дүшүр. $n>3$ гәбул едәк: вә n-дән кичик олан бүтүн γ-лар үчүн теоремин доғрулуғуну гәбул едәк.

Исбат едәк ки, ихтијари k, s $(1 \leq k, s \leq n-1)$ әдәдләри үчүн

$$(a_1 \cdots a_k)(a_{k+1} \cdots a_n) = (a_1 \cdots a_s)(a_{s+1} \cdots a_n) \quad (1)$$

бәрабәрлији доғрудур. Гејд едәк ки, бурада јалныз кәнар мө"тәризәләри јазмагла кифајәтләндик, чүнки дахили мө"тәризәләрин дүзүлүшү фәрзијјәмизә көрә ихтијари гајдада ола биләр вә бу һеч бир дәјишиклик етмәз; хүсуси һалда мәсәлән

$$(\ldots((a_1 a_2) a_3) \ldots a_{k-1}) a_k = (a_1 a_2 \cdots a_{k-1}) a_k \quad (2)$$

бәрабәрлији доғрудур(фәрзијјәмизә көрә). Инди (1)бәрабәрлијиндә ики әсас һалы араşдыраг:

а) $k=n-1$. Бу һалда $(a_1 a_2 \cdots a_{n-1}) a_n = (\ldots(a_1 a_2) \ldots a_{n-1}) a_n$ бәрабәрлији доғру олар.((2-јә әсасән).

б) $k<n-1$. Ассосиативлијә әсасән аларыг ки:

$$(a_1 \cdots a_k)(a_{k+1} \cdots a_n) = (a_1 \cdots a_k)((a_{k+1} \cdots a_{n-1}) a_n) =$$
$$= ((a_1 \cdots a_k)(a_{k+1} \cdots a_{n-1})) a_n = (\ldots((\ldots(a_1 a_2) \ldots a_k) a_{k+1}) \ldots a_{n-1}) a_n$$

доғру бәрабәрлији аларыг.

(1)бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндә дә s-ә нәзәрән ејни мүһакимә апараг, ону да бу шәкилә кәтирмәк олар. Сағ тәрәфләри ејни олан бәрабәрликләрин сол тәрәфләринин дә бәрабәр олдуғуну, јә"ни (1)-ин доғру олдуғуну аларыг.

Демәли әкәр $\langle M;\cdot\rangle$ мултипликатив моноиддирсә, онда һасили ашағыдакы кими тә"јин едәрик:

$$\prod_{i=1}^{2} a_i = a_1 a_2 \, ; \quad \prod_{i=1}^{3} a_i = (a_1 a_2) a_3 \, ; \ldots ; \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = \Big(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\Big) a_n \quad \text{вә}$$

Үмумијјәтлә десәк, $\prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)\left(\prod_{j=1}^{n-k} a_{k+j}\right)$ бәрабәрлији әлә $a_1a_2\cdots a_n$ һасилини верәҹәкдир. Беләликлә алырыг ки, јарымгрупда вә ја моноиддә һасили һесабларкән мө"тәризә јазмаг артыгдыр;

Хүсуси һалда $a_1=a_2=\cdots=a_n=a$ оларса, $\underline{aa\cdots a}$ һасилини a^n илә ишарә едирләр вә ону a елементинин n-чи дәрәҹәдән гүввәти адландырырлар. Онда исбат етдијимиз теоремдән елә бир нәтиҹәјә кәлмәк олар ки,

$$a^m\cdot a^n=a^n\cdot a^m=a^{m+n},\quad (a^m)^n=(a^n)^m=a^{mn} \qquad (3)$$

бәрабәрликләри ихтијари натурал m вә n әдәдләри үчүн доғрудур. Әкәр M аддитив моноиддирсә, онда a гүввәтинә ујғун бурада n-ним мислини кәтүрмәк олар вә буна да a-нын n-гат мисли дејилир.

Теоремин нәтиҹәси бу һалда ашағыдакы кими ифадә олуна биләр:

$$ma+na=na+ma=(m+n)a,\quad n(ma)=m(na)=(mn)a,\quad m,n\in\mathbb{N}$$

Бир факты да гејд едәк. Әкәр мултипликатив моноиддә a вә b елементләри јердәјишә биләндирсә, јә"ни $ab=ba$ оларса, онда

$$(ab)^n=a^nb^n,\quad n=0,1,2,\ldots \qquad (5)$$

Хүсуси һалда, M коммутатив моноиддирсә (5) бәрабәрлији ихтијари $a,b\in M$ елементләри үчүн доғру олар.
(5) бәрабәрлијини даһа да үмуми шәкилдә јазмаг олар

$$a_ia_j=a_ja_i\ (i,j=\overline{1,m}) \text{ оларса,}$$
$$(a_1a_2\cdots a_m)^n=a_1^na_2^n\cdots a_m^n \qquad (6)$$

доғрудур.

Аддитив моноиддә исә ихтијари $n\in\mathbb{N}$ әдәди үчүн

$$n(a_1+a_2+\cdots+a_m)=na_1+na_2+\cdots+na_m$$

бәрабәрлији доғрудур.

§ 3. ГРУПУН ТӘ"РИФИ ВӘ МИСАЛЛАР.

Гејд едәк ки, бурада вә бундан сонра һәмишә, садәлик хатиринә, бинар әмәли ишарәси үчүн үмуми шәкилдә мултипликативлик ишарәсиндән истифадә едәҹәјик.

Лакин јадда сахламалыјыг ки, бу ишарә тәкҹә вурмаја аид дејил. Јухарыда дедијимиз анлајышлардан истифадә едәрәк група ашағыдакы кими дә тә"риф вермәк олар.

Тә"риф 1. $\langle G;\cdot\rangle$ моноидинин a елементи үчүн $ab=ba=e$ мүнасибәтини өдәјән b елементинә a-ја симметрик елемент дејилир.

Тә"риф 2. $\langle G;\cdot\rangle$ моноидинин һәр бир елементинә симметрик елемент варса, белә моноидә груп дејилир.

Јухарыда дедикләримизи нәзәрдән кечирсәк кәрәрик ки, верилмиш G чохлуғу үзәриндә груп јарадылмасы үчүн ашағыдакы аксиомларын өдәнилмәси тәләб олунур:

1. G-дә „·" бинар ҹәбри әмәли тә"јин олунуб, јә"ни $\langle a,b\rangle\mapsto a\cdot b$ вә G чохлуғу бу әмәлә нәзәрән гапалыдыр.
2. „·" әмәли G-дә ассосиатив әмәлдир:
$$\forall a,b,c\in G \text{ үчүн } \quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$$
3. G-дә нејтрал елемент вар, јә"ни
$$\exists e\in G \text{ вә } \forall a\in G \text{ үчүн } \quad a\cdot e=e\cdot a=a.$$
4. һәр бир $a\in G$ үчүн
$$\exists a^{-1}\in G:\quad a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=e.$$

Бу аксиомларын групун дәрс вәсаитинин I һиссәсиндәки аксиомлары илә еквивалент олдуғуну асанлыгла јохламаг олар. Орада групун садә хассәләри дә верилдијиндән бурада һәмин хассәләри тәкрар етмәјәҹәјик.

Лакин бүтүн ријазијјатда вә үмумијјәтлә тәбиәт елмләриндә кениш тәтбиги олан бу анлајышын даһа да ајдын олмасы үчүн бир нечә мисаллар да көстәрәк.

1. G чохлуғу, елементләри $\mathbb{R}$ һәгиги әдәдләр [illegible] олан n тәртибли гејри-мәхсуси матрисләр чохлуғу олсун. Бу чохлуг матрисләрин ади вурулмасы әмәлинә нәзәрән груп әмәлә кәтирир. Бу група мејданы үзәриндә n дәрәҹәли там хәтти груп дејилир вә $GL(n,\mathbb{R})$ кими ишарә олунур.

2. Инди исә хүсуси һала бахаг. $GL(n,\mathbb{R})$ чохлуғундан һәр бирисинин детерминанты 1-ә бәрабәр олан бүтүн матрисләри ајыраг. Һәмин чохлуғу $SL(n,\mathbb{R})$ илә ишарә едәк. Демәли

$$SL(n,\mathbb{R})=\{A\in GL(n,\mathbb{R})\mid \det A=1\}$$

Матрисләр һасилинин детерминанты һаггында (II фәсил §3 II һиссә) теоремдән мә'лумдур ки, $\det A=1$ $\det B=1$ оларса, онда $\det AB=\det A\cdot\det B=1$ олар.

Демәли: 1) $SL(n,\mathbb{R})$ матрисләрин вурулмасына нәзәрән гапалыдыр.

2) Вурманын ассосиативлији $GL(n,\mathbb{R})$ групунда өдәнилдијиндән $GL(n,\mathbb{R})$ чохлуғунун һиссәси олан $SL(n,\mathbb{R})$ чохлуғунда да өдәниләчәкдир.

3) E – n тәртибли ваһид матрисинин детерминанты 1 олдуғундан

$$E\in SL(n,\mathbb{R}).$$

4) $A\in SL(n,\mathbb{R})$-дирсә, асанлыгла көрмәк олар ки, $A^{-1}\in SL(n,\mathbb{R})$ олачағыны (јохламалы ?).

Беләликлә көстәрмиш олдуг ки, $SL(n,\mathbb{R})$ чохлуғу да матрисләрин вурулмасына нәзәрән груп тәшкил едир.

$SL(n,\mathbb{R})$ групуна $\mathbb{R}$ мејданы үзәриндә хүсуси хәтти груп вә јахуд унимодулјар груп да дејирләр.

3. Әкәр $GL(n,\mathbb{R})$ вә $SL(n,\mathbb{R})$ групларында $\mathbb{R}$ мејданы әвәзинә $\mathbb{Q}$ рационал әдәдләр мејданыны көтүрсәк, $\mathbb{Q}$ мејданы үзәриндә n дәрәчәли хәтти груп вә јахуд $\mathbb{Q}$ мејданы үзәриндә n дәрәчәли унимодулјар групу алмыш оларыг.

4. M һәр һансы чохлуг, S_M исә бу чохлуғун бүтүн әвәзләмәләри чохлуғу, јә"ни M-ин өз-өзүнә бүтүн бијексијалары чохлуғу олсун. Бу чохлугда бинар әмәл-ин"икасларын композисијасы олсун.

Мә"лумдур ки, $\forall f,g\in S_M$ үчүн $f\circ g\in S_M$.

$f^{-1}\in S_M$ вә $f\circ f^{-1}=\varepsilon_M\in S_M$ олачагдыр.

Беләликлә алырыг ки, S_M чохлуғу ин"икасларын композисијасы ганунуна нәзәрән групун бүтүн аксиомларыны өдәјир.

Демәли, чохлуғунун бүтүн әвәзләмәләр чохлуғу онларын композисија ганунуна нәзәрән груп тәшкил едир.

Бу група M чохлуғунун әвәзләмәләр групу дејилир вә S_M илә ишарә олунур. Хүсуси һалда, M чохлуғунун елементләринин сајы n оларса, онда S_M групуна n дәрәчәли симметрик вә ја n дәрәчәли әвәзләмәләр групу дејилир вә S_n илә ишарә олунур.

§ [illegible]. АЛТГРУПЛАР.

Тә"риф: Әкәр $\langle G;\cdot\rangle$ групунун әсас чохлуғу олан G-нин бош олмајан A алтчохлуғу G-дә тә"јин олунмуш әмәлә нәзәрән өзү дә груп оларса, бу $\langle A;\cdot\rangle$ групуна $\langle G;\cdot\rangle$ групунун алтгрупу дејилир.

Теорем: $A\subseteq G$ алтчохлуғунун $\langle G;\cdot\rangle$ групунда, верилмиш әмәлә нәзәрән алтгруп олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт:

1) $\forall a,b\in A:\ a\cdot b\in A$,

2) $\forall a\in A:\ a^{-1}\in A$

шәртләринин ејни заманда өдәнмәсидир.

Исбаты: Шәртин зәрурилији ашкардыр. Доғрудан да, әкәр $\langle A;\cdot\rangle$ чәбри $\langle G;\cdot\rangle$ групунун алтгрупудурса, онда A-да групун бүтүн аксиомлары, хүсуси һалда биринчи аксиома ујғун 1) шәрти вә 4-чү аксиома ујғун 2) шәрти дә өдәниләчәкдир.

Инди шәртин кафилијини исбат едәк:

1) шәрти көстәрир ки, A чохлуғу G-дә тә"јин олунмуш әмәлә нәзәрән гапалыдыр. A-да „·“ әмәлинин ассосиативлији өдәнилир. Чүнки о, G-нин ихтијари елементләри үчүн, хүсуси һалда онун һиссәси олан A-нын елементләри үчүн дә өдәнилир.

2) шәрти көстәрир ки, A-дан олан һәр бир елементин A-да симметрик елементи вар.

1) вә 2)-дән алырыг ки, $a\cdot a^{-1}=e\in A$, јә"ни G-нин нејтрал елементи A-ја дахилдир. Бүтүн бунлар көстәрир ки, G [illegible] тә"јин олунмуш әмәлә нәзәрән групун бүтүн аксиомлары A [illegible] луғунун елементләри үзәриндә өдәнилир, јә"ни $\langle A;\cdot\rangle$ – алтгрупдур.

Бә"зән теоремдәки 1) вә 2) шәртләрини бир шәртлә, јә"ни A чохлуғу өзүнүн ихтијари a вә b елементләри илә бирликдә $a\cdot b$ һасилини өз дахилиндә сахламасы шәрти илә әвәз едирләр.

Тапшырыг.

1. Көстәрин ки, 1) вә 2) шәртләри илә 3) шәрти еквивалентдир.

2. Көстәрин ки, групун 3 вә 4 аксиомлары бу групда $ax=b$ вә $ya=b$ $(\forall a,b\in G)$ тәнликләринин јеканә һәллинин олмасы илә еквивалентдир.

һәр бир групун ән азы ики алтгрупу вар: 1) Нејтрал e елементин-дән ибарәт алтгруп; буна бә"зән ваһид алтгруп да дејирләр.
2) Групун өзү.
Бунлара групун мәхсуси алтгруплары дејилир. Јердә галан алтгруп-лар исә (әҝәр варса) гејри-мәхсуси алтгуплар адланыр. Верилмиш алт-груплардан јени алтгрупун алмаг үчүн ашағыдакы теорем әһәмијјәтли-дир.

<u>Теорем:</u> G групунун A вә B алтгупларынын $A\cap B$ кәсишмәси дә G-нин алтгрупудур.

<u>Исбаты:</u> $A\cap B$ чохлуғу бош дејил, доғрудан да A вә B алтгруплар олдуғундан G-нин e ваһиди бунларын һәр икисинә дахилдир вә демәли кәсишмәјә дә дахилдир. Әҝәр кәсишмә јалныз e ваһидин-дән ибарәтдирсә теорем ашкардыр. Фәрз едәк ки, кәсишмәдә e-дән фәргли елементләр дә вар.

$\forall a, b\in A\cap B$ ҝөтүрәк. Онда кәсишмәнин тә"ри-финә әсасән $a, b\in A$ вә $a, b\in B$.

Биринчи дахилолмадан алырыг ки, $ab^{-1}\in A$; икинчи дахилол-мадан алырыг ки, $ab^{-1}\in B$. Демәли $ab^{-1}\in A\cap B$. Онда јухарыдакы теоремә әсасән $A\cap B$ алтгрупдур.

Бу теореми үмумиләшдирәрәк G групунун ихтијари сајда алтгруп-лары үчүн дә сөјләмәк олар:

<u>Теорем:</u> G групунун ихтијари сајда алтгрупларынын кәсишмәси дә G групунун алтгрупудур.

<u>Исбаты:</u> Ҝөстәрмәк лазымдыр ки, $A_1, A_2, \dots$ G групунун алтгрупларыдырса $\bigcap_{i\in J} A_i = A$ чохлуғу да G-нин алтгрупу-дур.

Доғрудан да $A=\{e\}$ оларса исбат ашкардыр. Әҝәр $A\neq\{e\}$-дирсә, $\forall a, b\in A$ олмасындан алырыг ки, $\forall i\in J$ үчүн $a, b\in A_i$.
Бурадан алырыг ки, $\forall i\in J$ үчүн $ab^{-1}\in A_i$. Бурадан да алырыг ки, $ab^{-1}\in\bigcap_{i\in J} A_i = A$, јә"ни A – алт-групдур.

„A G-нин алтгрупудур" һөкмүнү $A\lhd G$ кими ишарә едәк.

<u>Мисаллар:</u> 1. Јухарыда дахил етдијимиз
$$GL(n,\mathbb{R}) \quad \text{вә} \quad SL(n,\mathbb{R})$$
груплардан икинчи биринчинин алтгрупудур, јә"ни

1. $SL(n,\mathbb{R})\lhd GL(n,\mathbb{R})$.
2. $SL(n,\mathbb{Q})\lhd GL(n,\mathbb{Q})$.

Әз нөвбәсиндә $SL(n,\mathbb{Q})$ групунда $\mathbb{Q}$-ну $\mathbb{Z}$ илә әвәз етсәк $SL(n,\mathbb{Z})$ чохлуғунун да груп олдуғуна инанмаг олар.
3. $SL(n,\mathbb{Z})\lhd SL(n,\mathbb{Q})$.

Бу групларда $n=1$, $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ ҝөтүрмәклә биз $GL(1,\mathbb{R}^*)$ вә $GL(1,\mathbb{Q}^*)$ группларыны, јә"ни ујғун оларағ, һәгиги вә рационал әдәдләрин мултипликатив групларыны алмыш олуруг.

Инди исә бир хүсуси груп вә онун хүсуси алтгрупу илә таныш олаг. $<G;\cdot>$ мултипликатив груп олсун. G-дән ҝөтүрүлмүш һәр бир a елементинә гаршы
$$t_a(x)=ax \quad (\forall x\in G)$$
дүстуру илә тә"јин олунан t_a ин"икасыны гаршы гојаг. Ашкардыр ки, t_a ин"икасы G чохлуғунда әвәзләмәдир вә онa хүсуси ад вераг: G-нин сол трансләјасијасы (сол өтүрмәси) дејилир.
$T(G)=\{t_a | a\in G\}$ чохлуғу G-нин сол өтүрмәләри чохлуғу адландырыг.

<u>Теорем.</u> Бир $\mathcal{S}_G=<\mathcal{S}_G;\cdot>$ групу G чохлуғунда симметрик групдур. Онда $T=<T(G);\cdot>$ чәбри $\mathcal{S}_G$ групу-нун алтгрупудур.

<u>Исбаты:</u> G-дән олан ихтијари a, b елементләри үчүн
$$t_a\cdot t_b=t_{ab} \quad \text{вә} \quad t_a\cdot t_a^{-1}=\varepsilon_G=t_e \qquad (1)$$
(бурада e елементи G-нин ваһидидир) бәрабәрликләри доғрудур.
Доғрудан да $\forall x\in G$ үчүн алырыг:
$$(t_a\cdot t_b)(x)=t_a(t_b(x))=t_a(bx)=a(bx)=(ab)x=t_{ab}(x),$$
јә"ни
$$t_a\cdot t_b=t_{ab}.$$
Бу ахырынчы бәрабәрликдә $b=a^{-1}$ ҝөтүрсәк алырыг ки,
$$t_a\cdot t_{a^{-1}}=t_{aa^{-1}}=t_e=\varepsilon_G, \quad e \ G\text{-нин}$$
ваһидидир. Беләликлә алырыг ки, $h: a\to t_a$ ин"икасы изоморфизм-дир.

Бундан башга, (I)-ә әсасән алырыг ки,

$$t_a \cdot t_e = t_{ae} = t_a \text{ вә } (t_a)^{-1} = t_{a^{-1}} \in T(G). \quad (2)$$

(I) вә (2)-јә әсасән алырыг ки, $T(G)$ чохлуғу $\mathcal{S}_a$ групундакы әмәлә нәзәрән гапалыдыр. Демәли $\langle T(G); \cdot \rangle$ групу $\mathcal{S}_a$ групунун алтгрупудур.

<u>Теорем (Кели)</u> Һәр бир $\langle G; \cdot \rangle = G$ групу G чохлуғунда симметрик групун алтгрупуна изоморфдур. Хүсуси һалда, һәр бир сонлу n-тәртибли груп n дәрәчәли симметрик групун алтгрупуна изоморфдур.

<u>Исбаты</u>: $T(G)$ G чохлуғунун бүтүн сол өтүрмәләр (трансләјасијалар) чохлуғу олсун. Бундан әввәлки теоремә әсасән $\langle T(G); \cdot \rangle$ групу $\mathcal{S}_a$ групунун алтгрупудур.

Инди G чохлуғунун $T(G)$ чохлуғуна ин"икасыны ашағыдакы дүстурла мүәјјән едәк:

$$\forall a \in G: \quad h(a) = t_a.$$

Асанлыгла көрмәк олар ки, h ин"икасы G-нин $T(G)$-ја бијектив ин"икасыдыр.

Көстәрәк ки, h G-дәки әмәлләрин нәтиҹәсини дәјишмир:

$$h(ab) = t_{ab} = t_a t_b = h(a)h(b),$$

$$h(a^{-1}) = t_{a^{-1}} = t_a^{-1} = h^{-1}(a).$$

Демәли, h ин"икасы G групунун T групуна изоморфизмидир. T исә $\mathcal{S}_a$ алтгрупудур.

§ 5. ГРУПЛАРЫН ИЗОМОРФИЗМИ.

Фәрз едәк ки, $G = \langle G; \cdot \rangle$ вә $\bar{G} = \langle \bar{G}; \circ \rangle$ кими ики груп верилмишдир. G-нин елементләрини $a, b, c, \dots$, $\bar{G}$-нин елементләрини исә $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$ илә ишарә едәк; бурада „·“ вә „∘“ әмәлләри ејни вә ја мүхтәлиф ола биләрләр.

<u>Тә"риф:</u> $\langle G; \cdot \rangle$ групунун $\langle \bar{G}; \circ \rangle$ групуна изоморфизми G вә $\bar{G}$ чохлуглары елементләри арасында елә гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуға дејилир ки, бу ујғунлуг G групундакы әмәлләрин нәтиҹәсини дәјишмәсин, јә"ни

$$\forall a, b \in G \text{ үчүн } \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \circ \varphi(b) \quad (1)$$

бәрабәрлији өдәнсин.

Демәли, изоморфизми мүәјјән етмәк үчүн әввәлә ин"икасын бијексија олдуғуну көстәрмәк, сонра исә (I) мүнасибәтинин өдәнилдијини јохламаг лазымдыр. Әкәр φ G-нин $\bar{G}$-јә изоморфизмидирсә ону $\varphi: G \cong \bar{G}$ кими ишарә едәчәјик. Асанлыгла көстәрмәк олар ки, φ G групунун $\bar{G}$ групуна изоморфизмидирсә, онда ашағыдакы хассәләр доғрудур:

1. $\varphi(e) = \bar{e} \quad (e \in G, \ \bar{e} \in \bar{G}).$
2. $\varphi(a^{-1}) = \varphi^{-1}(a).$
3. $\varphi: G \cong \bar{G}$, онда $\varphi^{-1}: \bar{G} \cong G.$

Бу дедикләримиздән көрүнүр ки, изоморф групплар әмәлә аид хассәләринә көрә бир-бириндән фәргләнмирләр.

Она көрә дә изоморф групплары ба"зән дә груп хассәләринә көрә ејниләшдирирләр. Буну ашағыдакы теорем дә тәсдиг едир.

<u>Теорем:</u> $\langle G; \cdot \rangle$ групуна изоморф олан ихтијари $\langle \bar{G}; \circ \rangle$ ҹәбри групдур.

Бу теореми исбат етмәк үчүн $\langle \bar{G}; \circ \rangle$ ҹәбриндә групун аксиомларыны јохламаг лазымдыр. Бунун охучуја һәвалә едилмәси мәсләһәтдир. Асанлыгла көстәрмәк олар ки, әкәр $\varphi: G \cong \bar{G}$ вә

$\psi: \bar{G} \cong G'$ исә, онда $\psi \circ \varphi: G \cong G'$.

Бурада $\psi \circ \psi$ композисијасы φ вә ψ чевирмәләринин ардычыл апарылмасы кими баша дүшүлүр.

Әкәр $\varphi: G \cong \bar{G}$, онда $\varphi^{-1}: \bar{G} \cong G$,

бијексијаларын исбаты I һиссәдә ујғун мәвзуда верилмишдир вә бијексијаларын хассәләриндән истифадә едәрәк асанлыгла көстәрмәк олар.

<u>Тә"риф:</u> $\langle G; \cdot \rangle$ групунун өз үзәринә изоморфизминә бу групун автоморфизми дејилир.

Автоморфизм изоморфизмин хүсуси һалы олдуғу үчүн, о, изоморфизмин бүтүн хассәләрини өзүндә сахлајыр.

Јухарыда дедикләримизи јекунлашдырараг, гејд едирик ки, $\langle G; \cdot \rangle$ групунун бүтүн автоморфизмләр чохлуғу, автоморфизмләрин вурулмасына (композисија гануну) нәзәрән групун бүтүн аксиомларыны өдәјир.

Бу груп G групунун автоморфизмләр групу дејилир.

<u>Мисаллар:</u> 1. $\langle \mathbb{Z}; + \rangle$ там әдәдләрин адитив групу, $\langle \mathbb{Z}_2; + \rangle$ исә чүт әдәдләрин адитив групудурса

$$\varphi: k \to 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ин"икасы биринҹинин икинҹијә изоморфизмидир.

2. $\langle \mathbb{R}^+;\cdot\rangle$ -мүсбәт һәгиги әдәдләрин мултипликатив групу, $\langle \mathbb{R};+\rangle$ -бүтүн һәгиги әдәдләрин аддитив групудурса, $\varphi(a)=\ln a$ $(a\in\mathbb{R}^+)$ ин"икасы биринҹинин икинҹијә изоморфизмидир. Доғрудан да $\ln:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$; бу ин"икас $\mathbb{R}$ -ин үзәринә ин"икасдыр вә мүхтәлиф елементләри мүхтәлиф елементләрә ин"икас етдирир. Дикәр тәрәфдән, $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

3. Там әдәдләрин автоморфизминә мисал олараг, ашағыдакылары ҝөстәрмәк олар:

а) $\varphi(k)=k$ - јә"ни ејнилијјәт ин"икас,

б) $\psi(k)=-k$, $(k\in\mathbb{Z})$.

Асанлыгла ҝөрмәк олар ки, там әдәдләрин аддитив групунун бу ики автоморфизминдән башга автоморфизми јохдур. Бу ики $\{\varphi,\psi\}$ автоморфизмләр исә груп тәшкил едир. Һәмин групун нејтрал елементи φ, һәр бир елементин симметрик елементи исә өзүдүр.
Демәли, $\langle\mathbb{Z};+\rangle$ групунун автоморфизмләр групу - $\langle\{\varphi,\psi\};\circ\rangle$ групудур (бурада „$\circ$" φ вә ψ ин"икасларынын композисија ганунудур).

§ 6. ГРУПУН ДОҒУРАНЛАР СИСТЕМИ.

ДӨВРҮ ГРУПЛАР.

Групларын хассәләрини өјрәнәркән исбат етдик ки, истәнилән алтгрупларын кәсишмәси дә алтгрупдур. Инди G групунун елә алтгрупларыны ҝөтүрәк ки, онлар G групунун мүәјјән S чохлуғуну өзүндә сахласын. Бу групларын һамысынын кәсишмәсини ҝөтүрсәк, ајдындыр ки, һәмин кәсишмә алтгруп олмагла (бах: алтгрупларын кәсишмәси һаггында үмуми теорем), S чохлуғуну өзүндә сахлајаҹагдыр. Әҝәр $S=\{a,b,\dots\}$ чохлуғундан ибарәтдирсә, кәсишмә алтгруп олдуғундан, орада сонлу сајда елементләрдән тәшкил олунмуш $aaa^{-1}b^{-1}abba^{-1}b^{-1}$ шәклиндәки һасилләри өзүндә сахлајаҹагдыр. Әҝәр кәсишмәни A илә ишарә етсәк һөкм едәрик ки, кәсишмәдә һәр бир елемент $a,b,\dots$ елементләринин вә ја онларын тәрсләринин сонлу һасилләриндән ибарәтдир вә јалныз бу шәкилдә һасилләрдән ибарәтдир.

Теорем: Доғураны $S=\{a,b,\dots\}$ чохлуғундан ибарәт олан груп бу чохлуғун сонлу сајда елементләриндән вә онларын тәрсиндән дүзәлдилән бүтүн мүмкүн олан һасилләрдән тәшкил олунмушдур.

Бу заман садәҹә олараг дејәҹәјик ки, S чохлуғу A алтгрупунун доғуранлар системидир. Әҝәр S сонлудурса бу заман дејирләр ки, A групу сонлу доғурана маликдир. G групунун доғуранлары системи олараг G групунун өзүнү ҝөтүрмәк олар.

Әҝәр G -нин доғуранлар системи $g_1,g_2,\dots,g_k$ исә, онда $G=\langle g_1,g_2,\dots,g_k\rangle$ кими јазылышдан вә ја

$$G=\{g_1,g_2,\dots g_k\}$$

јазылышындан истифадә олунур. Әҝәр $k=1$ оларса онда дөврү групдан данышмаг олар. G групу тәкҹә бир a елементи васитәсилә јарадыла биләр. Ајдындыр ки, бу заман a -нын $a^{\pm n}$ ($a^0=e$ илә бирликдә) шәклиндәки мүхтәлиф гүввәтләри иштирак едәҹәкдир.

Тә"риф: Доғураны бир елементдән ибарәт олан група дөврү груп дејилир.

G дөврү групдурса вә онун доғураны a елементидирсә ону $G=\{a\}$ кими јазырлар. Јухарыда дедикләримиздән ҝөрүнүр ки, G групу a -нын $a^{\pm n}$ шәклиндәки бүтүн гүввәтләриндән ($a=0$ олдугда да) тәшкил олунмушдур.

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}=a^{n+m}=a^n\cdot a^m$$

бәрабәрлији ҝөстәрир ки, бу груп коммутатив групдур.
Бурада ики алтернатив һал мүмкүндүр:
1) a -нын бүтүн гүввәтләри өз араларында мүхтәлифдирләр. Бу һалда дөврү груп

$$\dots,a^{-2},a^{-1},a^0=e,a,a^2,\dots$$

гүввәтләриндән ибарәтдир, јә"ни сонсуздур.
2) a -нын гүввәтләри тәкрар олунур вә

$$a^s=a^k\quad(s>k).$$

Белә олдугда аларыг ки,

$$a^{s-k}=e\quad(s-k>0)$$

Әҝәр $s-k=h$ илә ишарә етсәк аларыг ки,

$$a^h=e.$$

Бела h -ларын ән кичијини n -лә ишарә едәк (n натурал әдәд олдуғундан h -ларын ән кичији вар), онда аларыг ки, елә ән кичик натурал n әдәди вар ки,

$$a^n = e$$

олур. Бу шәрти өдәјән n әдәдинә a әдәдинин тәртиби дејилир. Әҝәр n әдәди a -нын тәртибидирсә, бу заман $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ гүввәтләри өз араларында мүхтәлиф олурлар. Чүнки әкс һалда аларды ки,

$$a^s = a^k \ (0<k<s<n)$$

вә јахуд
$$a^{s-k} = e \ (0<s-k<n)$$

Бу исә n -ин ән кичик олмасына зидд оларды. Ихтијари m там әдәди үчүн

$$m = nq + r \ (0 \le r < n)$$

мүнасибәти доғру олдуғундан аларыг ки:

$$a^m = a^{nq+r} = a^{nq} \cdot a^r = (a^n)^q \cdot a^r = e a^r = a^r.$$

Бу исә ону ҝөстәрир ки, a -нын ихтијари гүввәти $a^0 = e, a, \dots, a^{n-1}$ гүввәтләри ичәрисиндәдир. Буна ҝөрә дә, бу дөвры група јалныз n елемент олдуғуну һөкм едә биләрик, һәмин елементләр исә

$$a^0 = e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$$

елементләридир. n әдәди һәмчинин дөвры $G = \{a\}$ групунун тәртиби олур.

Әҝәр a әдәдинин бүтүн гүввәтләри мүхтәлиф оларса, онда a елементи сонсуз тәртибли елемент адланыр.

a елементи сонсуз тәртибли елементдирсә, $a^s = a^k$ бәрабәрлији онда вә јалныз онда өдәнилир ки, $s = k$ олсун. Чүнки $s \ne k$ $(s>k)$ оларса $a^s = a^k$ бәрабәрлијиндән аларыг ки, $a^{s-k} = e$, демәли a -нын елә $s-k = h > 0$ мүсбәт гүввәти олар ки, $a^h = e$ олур. Бу исә a -нын сонсуз тәртибли олмасына зиддир. Бу зиддијјәт ҝөстәрир ки, $s \ne k$ оларса $a^s \ne a^k$.

Мисаллар: 1. $\mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}; + \rangle$ там әдәдләрин аддитив групу олсун. Бу чохлугда 1 олан ихтијари m там әдәдини 1 -ин (вә ја -1 -ин) мисилләри кими ҝөстәрмәк олар:

$$m = 1 \cdot m \quad (\text{вә ја } m = (-1)(-m))$$

Демәли $\mathbb{Z}$ групу доғураны 1 (вә ја -1) олан дөвры групдур.

$$\mathbb{Z} = \{1\} = \{-1\}$$

2. $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$ 1-ин n дәрәҹәдән көкү олсун. Мә'лумдур ки, $\varepsilon^0 = 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}$ гүввәтләри 1-ин n дәрәҹәдән бүтүн көкләри олаҹагдыр. Демәли 1-ин n° -дән көкләри групу доғураны ε олан сонлу дөвры групдур.

3. Π - n°-ли симметрик група n узунлуглу дөвр олсун. Ашкардыр ки, Π -ни 1-дән n -ә гәдәр бүтүн дәрәҹәләрдән гүввәтә јүксәлтсәк, бу гүввәтләр n -тәртибли дөвры груп олаҹагдыр.

4. Дүзҝүн n -буҹаглыны өз-өзүнә чевирән бүтүн чеврилмәләр групу n-тәртибли дөвры групдур. n -буҹаглынын мәркәзи әтрафында $\frac{2\pi}{n}$ буҹағы гәдәр дөндәрилмәси бу групун доғураныдыр.

Теорем: Бүтүн сонсуз дөвры групплар өз араларында, сонлу n тәртибли бүтүн групплар исә өз араларында изоморфдурлар.

Исбаты: Теоремин I һиссәсини исбат етмәк үчүн ҝөстәрәк ки, бүтүн сонсуз дөвры групплар там әдәдләрин аддитив групуна изоморфдурлар. Онда изоморфизмин симметриклик вә транзитивлик хассәсинә әсасән аларыг ки, онлар өз араларында да изоморфдурлар.

$G = \{a\}$ ихтијари сонсуз дөвры груп олсун.

$\mathbb{Z} = \{1\}$ исә там әдәдләрин аддитив групу олсун.

φ ин'икасыны $\varphi: a^k \longmapsto k$ шәклиндә ҝөтүрәк.

Ашкардыр ки, φ бијексијадыр. Чүнки a^k верилдикдә k -ны вә k верилдикдә a^k -ны биргијмәтли тә'јин етмәк олар.

Диҝәр тәрәфдән

$$\varphi(a^k a^m) = \varphi(a^{k+m}) = k + m = \varphi(k) + \varphi(m).$$

Бу ҝөстәрир ки, φ изоморфизмдир, јә'ни $\varphi : \langle G; \cdot \rangle \cong \langle \mathbb{Z}; + \rangle$.

Инди теоремин икинчи һиссәсини исбат едәк; буну етмәк үчүн ҝөстәрәк ки, n тәртибли бүтүн сонлу дөвры групларын һәр бириси 1 -ин n° -дән көкләри групуна изоморфдур.

Фәрз едәк ки, $G = \{a\}$ n тәртибли ихтијари дөвры груп,

$\overline{G} = \{\varepsilon\}$ 1-ин n°-дән көкләри групудур. φ изоморфизмини $\varphi: a^{k} \longrightarrow \varepsilon^{k}$ шәклинә тә'јин едәк. Асанлыгла көстәрмәк олар ки, φ изоморфизмдир.

Мис: $n=5$ үчүн јухарыда көстәрдијимиз сонлу дөврү групларын изоморф олдуғуну әјани көстәрмәк үчүн ашағыдакы ҹәдвәлдән истифадә едәк. Бунун үчүн ејни n-ја ујғун елементләри алт-алта јазаг.

G_1-1-ин 5°-дән көкләри групу	1	ε	ε^2	ε^3	ε^4
G_2 5-тәртибли әвәзләмәләрин дөврү групу.	(1)	(12345)	(13524)	(14253)	(15432)
G_3 дүзҝүн 5-бучаглынын фырланмасы групу.	0	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{8\pi}{5}$

бурада G_1 групунда доғуран ε, G_2 групунда доғуран $\Pi = (12345)$, G_3 групунда доғуран исә $\varphi = \frac{2\pi}{5}$ бучағы гәдәр дөнмәдир.

Дөврү алтгруплар: Инди исә дөврү групун бүтүн алтгрупларыны мүәјјән едәк.

$G=\{a\}$ -доғураны a олан ихтијари дөврү груп. A исә онун алтгрупу олсун. Фәрз едәк ки, A ваһид алтгруп дејил.
Әҝәр A алтгрупу мәнфи үстлү a^{-m} елементини өз дахилиндә сахлајырса, онда онун тәрси олан a^{m}-и дә өз дахилиндә сахлајыр. Фәрз едәк ки, a^{m} A-ја дахил олан ән кичик үстлү елементдир. Инди көстәрәк ки, A-дан олан ихтијари елемент a^{m}-ин гүввәтләриндән ибарәтдир. Доғрудан да, әҝәр a^{k} елементи A-дан олан ихтијари елементдирсә, онда мә'лумдур ки,

$$k = mq + r \quad (0 \le r < m) \qquad (1)$$

јазмаг олар. Бу һалда

$$a^{k}(a^{m})^{-q} = a^{k-mq} = a^{r} \in A \quad (r < m)$$

олдуғуну аларыг. Бурадан исә алырыг ки, $r=0$ (m-ин сечилмәсинә көрә). Бу исә көстәрир ки, $k=mq$ вә $a^{k}=(a^{m})^{q}$. Беләликлә көстәрмиш олуруг ки;
A алтгрупунун ихтијари елементи a^{m}-ин гүввәтләриндән ибарәтдир. Демәли A дөврү алтгрупдур. Әҝәр a елементинин тәртиби сон-

лудурса вә n-ә бәрабәрдирсә, онда $a^{n} = e \in A$ олур. Бу исә индичә алдығымыз нәтиҹәјә көрә ону көстәрир ки, $m \backslash n$, јә'ни $n = mq$. Бу һалда A алтгрупу $a^{m}, a^{2m}, \dots, a^{qm}=e$ гүввәтләриндән тәшкил олунур вә тәртиби q-ә бәрабәрдир. Әҝәр елементи сонсуз тәртиблидирсә, онда A алтгрупу да

$$a^{0}=e,\ a^{\pm m},\ a^{\pm 2m}, \dots$$

елементләриндән тәшкил олунур вә сонсуз тәртиблидир. Беләликлә исбат етмиш олуруг:

Теорем: Дөврү групун алтгрупу да дөврүдүр. Бу алтгруп ја ваһид алтгрупдур, ја да ән кичик мүсбәт m дәрәҹәли a^{m}-ин гүввәтләриндән тәшкил олунмуш алтгрупдур. Бу заман сонсуз дөврү груплар үчүн m ихтијари, сонлу n тәртибли дөврү груплар үчүн исә m әдәди n-ин бөләнидир, јә'ни $m \backslash n$. Бу икинҹи һалда алтгрупун тәртиби $q=\frac{n}{m}$. Һәр бир белә m әдәди үчүн $G=\{a\}^{n}$ групунун бир вә јалныз бир алтгрупу вар ки, $\frac{n}{m}=q$ тәртибли олур.
Бурадан да белә нәтиҹәјә ҝәлирик ки, сонлу дөврү групда елементин тәртиби групун тәртибинин бөләнидир.

§ 7. АЛТГРУПА НӘЗӘРӘН АЈРЫЛМА, ЈАНАШЫ СИНИФЛӘР. ЛАГРАНЖ ТЕОРЕМИ.

$\langle G;\cdot\rangle$ верилмиш груп, A, B исә G чохлуғунун бош олмајан алтчохлуглары олсун. A вә B чохлугларынын $A\cdot B$ һасили дедикдә

$$A\cdot B = \{a\cdot b \mid a\in A,\ b\in B\}$$

чохлуғу баша дүшүлүр.

Хүсуси һалда бу алтчохлуглардан бири, мәсәлән A бир елементли $A=\{a\}$ чохлуғудурса, онда

$$AB = aB = \{ab \mid b\in B\}$$ олур.

Ашкардыр ки, $A, B, C \subseteq G$ оларса, онда

$$A(BC)=(AB)C$$

мүнасибәти доғрудур. Демәли, G групунун бүтүн алтчохлуглары чохлуғу јухарыда тә'јин олунмуш чохлугларын һасили әмәлинә нәзәрән јарымгруп тәшкил едир.

Инди фәрз едәк ки, A G групунун алтгрупудур, бу заман $A\cdot A=A$ олар. Чүнки A алтгруп олдуғундан G-дәки әмәлә нәзәрән гапалыдыр. Әкәр A вә B G групунун мүхтәлиф алтгруппларыдырса, $A\cdot B$ һасилинин нә заман алтгруп олдуғуну мүәјјәнләшдирәк.
AB-нин елементләри ab шәклиндәдир вә

$$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}.$$

Она көрә дә бу чохлуғун тәрс елементләри BA чохлуғуну тәшкил едир.
Беләликлә көрүрүк ки, әкәр AB групдурса,

$$AB=BA \qquad (I)$$

олмалыдыр, јә"ни A илә B јердәјишән олмалыдыр.
Асанлыгла көрмәк олар ки, бу шәрт һәмчинин кафи шәртдир. Доғрудан да, әкәр бу шәрт өдәнилирсә, онда AB өзүнүн һәр бир ab елементи илә бирликдә онун тәрсини, јә"ни $b^{-1}a^{-1}$ елементини вә ихтијари ики елементи илә бирликдә онларын һасилини дә, јә"ни

$$ab\cdot ab=aa\,bb$$

шәклиндә һасилләри өзүндә сахлајыр, демәли,

$$AB\cdot AB=AA\cdot BB=AB$$

Беләликлә алырыг ки,
Теорем: $\langle G;\cdot\rangle$ групунун ихтијари ики алтгрупунун һасили онда вә јалныз онда G-нин алтгрупу олар ки, бу алтгрупплар јердәјишән олсунлар.

Бу һалда A-нын һәр бир елементинин B-нин һәр бир елементи илә јердәјишән олмасы тәләб олунмур. Әкәр тәкчә (I) шәклиндә коммутативлик өдәнирсә, онда AB һасили доғуран $\{A,B\}$ олан алтгруп олур. Ашкардыр ки, һәр бир абел групунда (I) шәрти автоматик өдәнир. Она көрә дә һасил алтгруп олур.

Әкәр G групу аддитив групдурса, ашкардыр ки, о, абел групудур вә демәли

$$A+B=B+A$$

доғрудур, она көрә дә $A+B$ чәми һәмишә алтгруп олачагдыр. Әкәр A алтгруп вә x елементи G-нин олан ихтијари гејд олунмуш елементдирсә, онда xA чохлуғу A-ја нәзәрән сағ јан...

синиф, Ax шәклиндәки чохлуғу исә сол јанашы (гоншу) синиф адланыр.

Шәртләшәк ки, бундан сонра бу әсасән сағ јанашы синифләрдән данышачағыг вә дејиләнләр һамысы ејнилә сол јанашы синифләр үчүн дә доғрудур.

Әввәлчә гејд едәк ки, ики xA вә yA синифләри $x\neq y$ олдугда да бәрабәр ола биләрләр. Бунун үчүн кифајәтдир ки, xy^{-1} вә ја $x^{-1}y$ A-ја дахил олсун:

$$yA=(xx^{-1})yA=x((x^{-1}y)A)=xA$$

Сонра гејд едәк ки, ики мүхтәлиф јанашы (гоншу) синифләрин һеч бир ортаг елементи јохдур. Доғрудан да, әкәр xA вә yA синифләринин ортаг $z=xa_1$, $z=ya_2$ елементи варса, онда $xa_1=ya_2$ олар ки, бу да

$$a_1a_2^{-1}=x^{-1}y$$

бәрабәрлијилә еквивалентдир; бурадан чыхыр ки, $x^{-1}y\in A$.

Бундан әввәл сөјләдијимиз факта әсасән һөкм едирик ки, xA вә yA үст-үстә дүшүр. Бу исә синифләрин мүхтәлифлији шәртинә зиддир.

Дала сонра гејд едәк ки, һәр бир $a\in G$ елементи синифләрдән биринә, мәһз ону сахлајан aA синфинә дахилдир. Демәли a елементи синифләрдән биринә вә јалныз биринә дахилдир.
Ики мүхтәлиф јанашы (гоншу) синифләр ејнигүчлүдүр: $aA\longrightarrow bA$ ујғунлуғу aA синфинин bA синфинә гаршылыглы биргијмәтли инкасыны мүәјјән едир.

A алтгрупундан башга галан синифләр алтгруп ола билмәз. aA синфи $ae=a$ елементини өз дахилиндә сахлајыр вә бу синфин ваһиди олмур. Одур ки, бу синиф алтгруп ола билмәз.

Инди x-и G-дә дәјишдирәрәк бүтүн xA шәклиндәки синифләр чохлуғуну мүәјјән едә биләрик. Бүтүн бу синифләр чохлуғуна G групунда A алтгрупуна нәзәрән сағ ајрылыш дејәҹәјик. Јанашы синифләрин һамысынын сајына A-нын G-дәки индекси дејилир. Әкәр G сонлу групдурса вә онун тәртиби N, A-нын тәртиби n вә онун G-дәки индекси j оларса, истәнилән синифдә n сајда елемент олдуғуну нәзәрә алсаг јаза биләрик:

$$N=nj \qquad (I)$$

Беләликлә, ашағыдакы теорем исбат едилмиш олур:

Теорем (Лагранж). G сонлу групунун һәр бир алтгрупунун тәртиби һәмин групун тәртибинин бөләнидир.

Доғрудан да (I) бәрабәрлијиндән алыныр ки, $j = \frac{N}{n}$

Хүсуси һалда, G групунун алтгрупу кими, онун бир a елементи илә јарадылан дөврү групуну ҝөтүрсәк, ашкардыр ки, бу алтгрупун тәртиби a-нын тәртиби илә ејни олачагдыр. Буна ҝөрә дә Лагранж теореминдән алырыг:

Нәтиҹә 1: Сонлу групун елементинин тәртиби групун тәртибинин бөләнидир. Бу нәтиҹәдән бирбаша ашағыдакы нәтиҹә алыныр:

Нәтиҹә 2: n тәртибли групда ихтијари a елементи үчүн $a = e$ бәрабәрлији доғрудур.

Тапшырыг: Исбат един ки, садә p тәртибли һәр бир сонлу груп дөврү групдур.

§ 8. НОРМАЛ БӨЛӘН. ФАКТОР-ГРУП.

$G = \langle G; \cdot \rangle$ -груп, $A = \langle A; \cdot \rangle$ исә G-нин алтгрупу олсун.

Тә'риф: G групунун A алтгрупуна нәзәрән сағ ајрылышы илә сол ајрылышы үст-үстә дүшәрсә, јә'ни $\forall x \in G: xA = Ax$ оларса, онда A-ја G-нин нормал алтгрупу вә ја нормал бөләни дејилир.

Тә'рифдән ҝөрүнүр ки, A нормал бөләндирсә, о, G-дән олан һәр бир x елементи илә јердәјишмә биләндир, јә'ни (I) бәрабәрлији өдәнилир.

Мәсәлән: S_3 групунда A нормал бөләни E, (123), (231) әвәзләмәләрдән ибарәтдир. Орада ики синиф вар. Јенә һәмин синифләрдән бири A алтгрупунун өзү, диҝәр синиф исә (12)(3), (13)(2), (1)(23) әвәзләмәләриндән ибарәтдир. Диҝәр тәрәфдән асанлыгла јохламаг олар ки, S_3-дән олан ихтијари T әвәзләмәси үчүн $TA = AT$ бәрабәрлији доғрудур.

Әҝәр A G-дә нормал бөләндирсә

$$\forall x \in G \qquad xA = Ax$$

бәрабәрлији доғрудур. (I) бәрабәрлији ҝөстәрир ки, A-дан олан елә a вә a' елементләри вар ки:

$$xa = a'x, \quad x \in G \qquad (2)$$

(2)-дән аларыг ки,

$$a' = xax^{-1} \qquad (3)$$

xax^{-1} елементинә a елементиндән x елементинин көчүрмәси (трансформасијасы) нәтиҹәсиндә алынмыш елемент дејилир. Бу заман дејирләр ки, $a' = xax^{-1}$ елементи a елементинә гошма елементдир. (3) бәрабәрлијиндән алыныр ки,

$$a = x^{-1}a'x = x^{-1}a'(x^{-1})^{-1}$$

бәрабәрлији доғрудур, јә'ни a елементи дә a' елементилә гошма елементдир. Она ҝөрә дә һәмин елементләрә гаршылыглы гошма елементләр дејирләр. Бу дедикләримиздән белә нәтиҹәјә ҝәлирик ки: A алтгрупу G-дә нормал бөләндирсә, о, өзүнүн һәр бир a елементи илә бирликдә онун гошмасы олан xax^{-1} елементини дә өз дахилиндә сахламалыдыр.

Тәрсинә, A алтгрупу өзүнүн һәр бир елементи илә бирликдә онун гошмасыны да өз дахилиндә сахлајырса, A G-дә нормал бөләндир.

Доғрудан да, A алтгрупу өзүнүн ихтијари a елементи илә бирликдә онун гошмасы олан xax^{-1} елементини дә өз дахилиндә сахлајырса, бу о демәкдир ки, елә $a' \in A$ вар ки,

$$xax^{-1} = a'$$

вә ја

$$xa = a'x.$$

a елементи ихтијари олдуғундан аларыг ки,

$$xA = Ax \quad (x \in G)$$

бәрабәрлији доғрудур, јә'ни A нормал бөләндир.

Беләликлә исбат етмиш олуруг:

Теорем: A алтгрупунун нормал бөлән олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт, A-нын өзүнүн һәр бир a елементи илә бирликдә онун гошма елементини дә өз дахилиндә сахламасыдыр.

Нормал алтгруп (нормал бөлән) анлајышы груплар нәзәријјәсиндә хүсуси јер тутур вә бир сыра анлајышларын әсасландырылмасында әһәмијјәти вар.

$\langle G; \cdot \rangle$ групунда x елементини ихтијари гејд едәк, сонра $a \xmapsto{\varphi} xax^{-1}$ гајдасы илә G-нин өз-өзүнә [illegible]јин едәк, јә'ни $\varphi(a) = xax^{-1}$.

Бу гајда илә тә"јин едилмиш ин"икас гаршылыглы биргијмәтли ин"икасдыр. Чүнки һәр бир a елементи үчүн $a' = xax^{-1}$ вә тәрсинә $a' = xax^{-1}$ верилдикдә $a = x^{-1}a'(x^{-1})^{-1}$ елементи биргијмәтли тапылыр.

Дикәр тәрәфдән a вә b ихтијари елементләри үчүн аларыг ки:

$$\varphi(ab) = x(ab)x^{-1} = (xax^{-1})(xbx^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)$$

јә"ни φ автоморфизмдир. Бу гајда илә тә"јин едилмиш автоморфизмә G групунун дахили автоморфизми, јердә галан (әкәр варса) автоморфизмләр исә харичи автоморфизмләр дејилир. G групунун $a \mapsto xax^{-1}$ гајдасы илә тә"јин олунмуш дахили автоморфизминдә һәр бир A алтгрупу xAx^{-1} алтгрупуна кечир ки, буна да A-ја гошма алтгруп дејилир.

Әкәр $xAx^{-1} = A$ оларса вә бу ихтијари $x \in G$ үчүн доғру оларса, бурадан аларыг ки, $xA = Ax$, јә"ни A нормал бөләндир, беләликлә аларыг:

<u>Тә"риф:</u> G групунун A алтгрупу өзүнүн ихтијари гошмасы илә үст-үстә дүшәрсә, јә"ни

$$\forall x \in G \text{ үчүн } \quad xAx^{-1} = A$$

бәрабәрлији доғрудурса, A-ја G-дә нормал бөлән вә ја инвариант алтгруп дејилир.

Демәли, A G-дә нормал бөләндирсә, о, G-нин бүтүн дахили автоморфизмләринә нәзәрән инвариантдыр вә тәрсинә; A алтгрупу G-нин бүтүн дахили автоморфизмләринә нәзәрән инвариантдырса, A G-нин нормал бөләнидир.

"A G-нин нормал бөләнидир" фикрини символик олараг беләишарә едирләр: $A \lhd G$.

Асанлыгла јохламаг олар ки, $A \lhd G$ исә, G-нин A-ја нәзәрән ајрылышындакы бүтүн јанашы синифләр чохлуғу груп тәшкил едир.

Буну исбат едәк:

G-нин A нормал бөләнинә нәзәрән јанашы синифләр чохлуғуну (үмумилији позмадан сағ јанашы синифләри јазачағыг) G/A илә ишарә едәк. Сонра бу чохлугдан олан ихтијари xA вә yA синифләрини көтүрсәк аларыг:

$$xA \cdot yA = x(Ay)A = x(yA)A = x \cdot y \cdot AA = xyA$$

Бу бәрабәрлијин әввәли илә ахырыны бирләшдирсәк аларыг ки, јанашы синифләр чохлуғу G-дә тә"јин олунмуш әмәлә нәзәрән гапалыдыр. Асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\forall xA, yA, zA \in G/A \quad \text{үчүн}$$

$$xA(yA \cdot zA) = (xA \cdot yA)zA$$

бәрабәрлији (ассосиативлик) доғрудур. Јанашы синифләрдән бири олан A өзү G/A-да тә"јин етдијимиз әмәлә нәзәрән нејтрал елемент ролуну ојнајыр; доғрудан да:

$$\forall xA \in G/A \quad \text{үчүн}$$

$$(xA)A = x(AA) = xA, \quad \text{вә}$$

$$A(xA) = (Ax)A = (xA)A = x(AA) = xA$$

Нәһајәт, бу чохлугда һәр бир xA синфинә симметрик елемент, x-ә симметрик елемент (јә"ни x^{-1}) јерләшән синифдир, $(xA)^{-1} = x^{-1}A$. Доғрудан да

$$xA \cdot x^{-1}A = x(Ax^{-1})A = x(x^{-1}A)A = xx^{-1}AA = eA = A$$

вә

$$x^{-1}A \cdot xA = x^{-1}(Ax)A = x^{-1}(xA)A = x^{-1}xAA = eA = A,$$

$$\text{јә'ни} \quad x^{-1}A = (xA)^{-1}.$$

Беләликлә, көрүрүк ки, G/A чохлуғунда тә"јин олунмуш әмәлә нәзәрән групун бүтүн аксиомлары өдәнилир; демәли, $\langle G/A; \cdot \rangle$ чәбри групдур. ▲

Ајдындыр ки, G групу коммутатив групдурса, онун һәр бир алтгрупу нормал бөләндир вә она нәзәрән јанашы синифләр чохлуғу да груп тәшкил едир. Әкәр G групунда әмәл адитив [illegible] исә, онда [illegible] јазылышда [illegible] һәр бир јанашы синиф $x + A$ [illegible] $x + A = A + x$ олур.

<u>Тапшырыглар:</u> 1. Исбат един ки, ве[illegible] групда индекси 2-јә бәрабәр олан һәр бир алтгруп бу групда нормал бөләндир.

2. Исбат един ки, нормал бөләнин тә"рифиндәки $xAx^{-1} = A$ шәрти [illegible] шәртә кәтирмә, јә"ни $xAx^{-1} \subseteq A$ [illegible] еквивалент олар.

4. Исбат един ки; а) $\mathcal{S}_3$ – 3 тәртибли әвәзләмәләр групунда дүз 6 дәнә дахили автоморфизм вар. б) $\mathcal{S}_3$ групу илә бу дахили автоморфизмләр групу изоморфдурлар.

§9. ГРУПЛАРЫН ҺОМОМОРФИЗМИ, ҺОМОМОРФИЗМИН ХАССӘЛӘРИ

<u>Тә"риф:</u> $<G;\cdot>$ групунун $<\widetilde{G};\circ>$ групуна һомоморфизми G чохлуғунун $\widetilde{G}$ чохлуғуна елә φ ин"икасына дејилир ки, бу ин"икас G -дәки әмәлләрин нәтиҹәсини дејишмәсин, јә"ни

$$\forall a,b\in G:\quad \varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\circ\varphi(b) \qquad (I)$$

бәрабәрлији доғру олсун.

G групу $\widetilde{G}$ групуна һомоморфдурса, ону $G\simeq\widetilde{G}$ кими ишарә едирләр.

Тә"рифдән көрүндүјү кими изоморфизмин тә"рифиндә ин"икасын гаршылыглы биргијметлилијиндән имтина етсәк һомоморфизмин тә"рифини алмыш оларыг.

<u>Мәсәлән:</u> ихтијари $G=<G;\cdot>$ групун бүтүн елементләрин бу групун ваһидинә ин"икас етдирсәк, бу ин"икас һомоморф ин"икас олачаг вә беләликлә, G групунун онун ваһид алтгрупуна һомоморфизминин гурмуш олуруг; бу тривиал һомоморфизмдир. Сонра, ихтијари $\mathcal{S}_n$ групуну көтүрсәк вә бурада һәр бир чүт әвәзләмәјә гаршы $+1$ һәр бир тәк әвәзләмәјә гаршы -1 -и ујғун гојсаг нәтиҹәдә $\mathcal{S}_n$ групунун $G=<\{+1,-1\};\cdot>$ мултипликатив групуна һомоморфизмини гурмуш оларыг.

φ һомоморфизми G чохлуғуну $\widetilde{G}$ чохлуғунун үзәринә ин"икас етдирирсә бу һомоморфизми Епиморфизм адландырырлар.

Гејд едәк ки, биз бурада вә бундан сонра һәмишә хүсуси гејд јохдурса, мәһз епиморф һомоморфизмләрдән данышачағыг.

Бундан әлавә φ һомоморфизми G чохлуғуну $\widetilde{G}$ -нин дахилинә инјектив ин"икас етдирирсә, белә һомоморфизмә мономорфизм ады верирләр.

φ һомоморфизми G -нин өз дахилинә һомоморфизмидирсә, белә һомоморфизмә ендоморфизм дејилир. Изоморфизмдә олдуғу кими, бурада да асанлыгла ашағыдакы садә хассәләри көстәрмәк олар.

1. G групунун $\widetilde{G}$ групуна һомоморфизми заманы G -нин e нејтрал елементи $\widetilde{G}$ -нин $\tilde{e}$ нејтрал елементинә кечир.

2. G -дә һәр бир елементин симметрик елементи $\widetilde{G}$ -дә ујғун елементин симметрик елементинә кечир.

<u>Теорем I:</u> $G=<G;\cdot>$ групдурса вә $\widetilde{G}=<\widetilde{G};\circ>$ -группоиддирсә вә G -нин $\widetilde{G}$ -јә һомоморф ин"икас етдирмәк мүмкүндүрсә, онда $\widetilde{G}=<\widetilde{G};\circ>$ группоиди групдур. Башга сөзлә десәк, групун һомоморф образы групдур.

<u>Исбаты:</u> $G=<G;\cdot>$ груп олдуғундан бурада групун бүтүн аксиомлары өдәнилир. Теореми исбат етмәк үчүн, көстәрмәлијик ки, $\widetilde{G}$ группоидиндә дә групун бүтүн аксиомлары өдәнилир.

G -нин $\widetilde{G}$ -јә һомоморфизмини φ илә ишарә едәк вә

$$\varphi(a)=\tilde{a},\ \varphi(b)=\tilde{b},\ \varphi(c)=\tilde{c}$$

вә с. кими гәбул едәк. Ашкардыр ки, $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\in\widetilde{G}$.

1. $\forall a,b\in G$ үчүн $\exists c\in G: a\cdot b=c$.

φ ин"икасы биргијметли тә"јин олундуғундан, сонунчу бәрабәрлији һәр тәрәфинә φ илә тә"сир етсәк аларыг:

$$\varphi(a\cdot b)=\varphi(c) \quad \text{вә ја} \quad \varphi(a)\circ\varphi(b)=\varphi(c)$$

бу исә о демәкдир ки, $\tilde{a}\circ\tilde{b}=\tilde{c}$.

$\tilde{c}$ -нин $\widetilde{G}$ -дә олдуғу теоремин шәртиндә верилиб, чүнки $\widetilde{G}$ - группоиддир.

2. $\forall a,b,c\in G$ үчүн $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ олдуғундан јенә дә бу бәрабәрлијин һәр ики тәрәфинә φ илә тә"сир етсәк, һомоморфизмин тә"рифини вә ишарәләримизи нәзәрә алсаг һөкм едәрик ки, $\widetilde{G}$ группоидиндә $\forall\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}$ елементләри үчүн

$$(\tilde{a}\circ\tilde{b})\circ\tilde{c}=\tilde{a}\circ(\tilde{b}\circ\tilde{c})$$

бәрабәрлији доғрудур.

3. Ејни мүһакимәләрлә

$$a\cdot e=a$$

бәрабәрлијиндән аларыг ки:

$$\tilde{a} \circ \tilde{e} = \tilde{a}$$

бәрабәрлији $\tilde{G}$ -дә доғрудур.

4. $ab = e$ бәрабәрлији G -дә верилибсә, һәм дә едирик ки, $b = a^{-1}$, һәмин бәрабәрликдән дә аларыг ки, $\tilde{a} \circ \tilde{b} = \tilde{e}$ вә демәли $\tilde{b} = \tilde{a}^{-1}$.

Беләликлә, $\tilde{G}$ -дә групун бүтүн аксиомларынын өдәнилдијини көстәрмиш олуруг.

<u>Тапшырыг 1:</u> Көстәрин ки, S_n / A_n факторгрупу 2тәртибли дөврү групдур.

2. һәр бир дөврү групун факторгрупу да дөврү групдур.

<u>Теорем 2:</u> φ ин"икасы G групунун $\tilde{G}$ групуна һомоморфизми, h ин"икасы исә $\tilde{G}$ групунун G' група һомоморфизмидирсә, h илә φ -нин $h \circ \varphi$ композисијасы (ин"икасларын композисијасы кими) G групунун G' групуна һомоморфизмдир.

<u>Исбаты:</u> φ ин"икасы G чохлуғунун $\tilde{G}$ чохлуғу үзәринә вә h ин"икасы $\tilde{G}$ чохлуғунун G' чохлуғу үзәринә ин"икасы олдуғундан $h \circ \varphi$ композисијасы вар вә бу ин"икас G чохлуғунун G' чохлуғу [illegible] ин"икасыдыр. h вә φ -нин һомоморфизм олдуғуну нәзәрә алсаг аларыг:

$$\forall a, b \in G \text{ үчүн } (h \circ \varphi)(a \cdot b) = h(\varphi(ab)) = h(\varphi(a) \cdot \varphi(b)) =$$
$$= h(\varphi(a)) \cdot h(\varphi(b)) = (h \circ \varphi)(a) \cdot (h \circ \varphi)(b).$$

Бу исә ону көстәрир ки, $h \circ \varphi$ композисијасы G групундакы әмәлин нәтичәсини дејишмир.

§10 ҺОМОМОРФИЗМИН НҮВӘСИ. ГРУПУН ТӘБИИ ҺОМОМОРФИЗМИ.

$G = \langle G; \cdot \rangle$ групунун $\tilde{G} = \langle \tilde{G}; \circ \rangle$ групуна һомоморфизми φ -дирсә, φ ин"икасы биргијмәтлидир, лакин гаршылыглы биргијмәтли олмаја биләр. Башга сөзлә десәк φ сјурексијадыр, [illegible] φ бијексија дејил. Она көрә дә $\tilde{G}$ -дән олан һәр бир [illegible] бир јох бир нечә прообразы ола биләр. φ нәтичәсиндә [illegible] бәрабәрдирсә, онда φ һомоморфизми нәтичәсиндә G груп[illegible]

синифләрә ајрылыр. Бу ајрылыш G групунун нормал бөләнинә нәзәрән ајрылышы илә үст-үстә дүшүр. Буну шәрһ етмәјә чалышаг.

<u>Тә"риф:</u> φ һомоморфизми нәтичәсиндә G групунун $\tilde{G}$ -нин $\tilde{e}$ ваһидинә кечән бүтүн елементләри чохлуғуна φ һомоморфизминин нүвәси дејилир.

φ һомоморфизминин нүвәсини H илә ишарә етсәк јазарыг:

$$H = \operatorname{Ker} \varphi = \{ x \in G \mid \varphi(x) = \tilde{e},\ \tilde{e} \in \tilde{G} \}.$$

Көстәрәк ки, $H \lhd G$, је"ни H G -нин нормал бөләнидир. Әввәлә көстәрәк ки, H G -нин алтгрупудур. Доғрудан да $\forall x, y \in H$ үчүн $\varphi(x) = \tilde{e}$, $\varphi(y) = \tilde{e}$ олдуғундан $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \circ \varphi(y) = \tilde{e} \circ \tilde{e} = \tilde{e}$, демәли $xy \in H$. Дикәр тәрәфдән, $x \in H$ исә

$$\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1} = \tilde{e}^{-1} = \tilde{e}.$$

Демәли, H алтгрупдур. Инди $x \in H$ вә $\forall a \in G$ исә онда

$$\varphi(axa^{-1}) = \varphi(a) \circ \varphi(x) \circ \varphi(a^{-1}) = \varphi(a) \circ \tilde{e} \circ (\varphi(a))^{-1} = \varphi(a) \circ \varphi^{-1}(a) = \tilde{e}$$

Бу исә ону көстәрир ки,

$$x \in H \Rightarrow \forall a \in G: \ axa^{-1} \in H,$$

је"ни H нормал бөләндир.

G групунун $\tilde{G}$ групуна һомоморфизми φ -дирсә вә H бу һомоморфизмин нүвәсидирсә, демәли H $\tilde{e}$ -нин φ -јә нәзәрән прообразлары чохлуғудур. Дикәр тәрәфдән H G -дә нормал бөлән олдуғундан билирик ки, G -нин H -а нәзәрән ајрылышында јанашы синифләрдән бири H -дыр. Демәли G -нин $\tilde{G}$ -јә һомоморфизминдә G -дә јанашы синифләр, бири H, дикәрләри исә xH шәклиндә алынгла G -нин ајрылышыны тәшкил едирләр.

Инди фәрз едәк ки, $G = \langle G; \cdot \rangle$ групу верилиб вә H бу групун нормал бөләнидир. Ашкардыр ки, G -нин H -а нәзәрән јанашы синифләрә ајрылышы вар. Бу јанашы синифләр чохлуғу груп әмәлә кәтирир. Она G -нин H -а нәзәрән фактор-групу дејилир вә G/H кими ишарә олунур.

G -дән көтүрүлмүш һәр бир a елементинә һәмин елементин јерләшдији синфи, је"ни aH синфини гаршы гојаг. Ашкардыр ки, бу үјғунлуг ин"икасдыр вә биргијмәтлидир, чүнки a елементи синифләрдән јалныз бириндә јерләшир, һәмин ин"икасы φ илә ишарә етсәк јазарыг:

$$\varphi(a)=aH,\quad \varphi(b)=bH \text{ вә } aH,\, bH\in G/_H$$

$$\forall a,b\in G:\ \varphi(ab)=abH=aH\cdot bH=\varphi(a)\varphi(b)\qquad .(\ )$$

Бу бәрабәрликдән көрүнүр ки, φ һомоморфизмдир. Бу һомоморфизм G групунун тәбии һомоморфизми дејилир. G групунун һомоморфизмләри ичәрисиндә онун тәбии һомоморфизми характерик хүсусијјәтә маликдир; белә ки, бу һомоморфизм илә G групунун бүтүн һомоморфизмләрини мүәјјән етмәк олур. Буну ашағыдакы әсас теоремдән көрмәк олар.

<u>Теорем:</u> G групунун $\tilde G$ групуна һомоморфизми φ-дирсә, вә H бу һомоморфизмин нүвәсидирсә, $G/_H$ фактор-групу илә $\tilde G$ групу изоморфдур.

<u>Исбаты:</u> Шәртә көрә $\varphi: G\longmapsto \tilde G$; бундан әввәлки бәндә көстәрдик ки, G-нин $G/_H$-а һомоморфизми һәмишә вар; ону f-лә ишарә етсәк: $f: G\longmapsto G/_H$.

$$\forall a\in G\quad \varphi(a)=\tilde a,\ \tilde a\in\tilde G,$$

$$\forall a\in G\quad f(a)=aH,\ H\lhd G.$$

Инди $\tilde G$ чохлуғундан олан һәр бир $\tilde a$ елементинә гаршы $aH\in G/_H$ синфини ујғун гојаг; һәмин ујғунлуғу ψ илә ишарә етсәк, јаза биләрик:

$$\forall\tilde a\in\tilde G:\ \psi(\tilde a)=aH.$$

Бәләликлә, алырыг ки, $\tilde a$ елементи вә aH синфи ејни бир a елементинин ујғун олараг φ вә f ин"икаслары нәтичәсиндәки образларыдыр. Бу образлар биргијмәтли тә"јин олундуғундан $\psi(\tilde a)=aH$ илә тә"јин олунан ујғунлуг гаршылыглы биргијмәтлидир, башга сөзлә десәк, бијектив ин"икасдыр. Доғрудан да aH синфи верилләрсә a елементи илә тә"јин олунан $\tilde a$ елементи вә тәрсинә $\tilde a$ верилдикдә a илә биргијмәтли тә"јин олунан aH синфи биргијмәтли тә"јин олунур.

Дикәр тәрәфдән

$$\forall\tilde a,\tilde b\in\tilde G \text{ үчүн } \psi(\tilde a\tilde b)=abH=aH\cdot bH=\psi(\tilde a)\,\psi(\tilde b).$$

Демәли ψ изоморфизмдир. ▲

Бу теоремдән әввәл исбат етдик ки, һәр бир G групунун H нормал бөләни верилмишдирсә, һәмишә G групунун $G/_H$ фактор-групуна тәбии һомоморфизмини гурмаг олур.

Онда бу фактдан вә исбат етдијимиз әсас теоремдән аларыг ки, G групунун $\tilde G$ групуна φ һомоморфизми верилибсә, онда онун H нүвәси вә демәли G групунун нормал бөләни мә"лумдур. Она көрә дә φ һомоморфизми f тәбии һомоморфизми илә ψ һомоморфизминин композисијасындан ибарәтдир (бурада ψ $G/_H$-ын $\tilde G$-јә изоморфизмидир).

Бәләликлә, алырыг ки:

$$\varphi=\psi\circ f.$$

Хүсуси һалда ψ ејнијјәт ин"икасы оларса, $\varphi=f$ олур.

Бу дедикләримиздән белә бир нәтичә чыхармаг олар:

<u>Нәтичә:</u> G групунун һәр бир һомоморфизми ја онун тәбии һомоморфизмидир, ја да һәмин тәбии һомоморфизм илә бир изоморфизмин композисијасындан ибарәтдир.

<u>Тапшырыг:</u> 1. Исбат един ки, S_4 – дөрд дәрәчәли әвәзләмәләр групунун дөрд тәртибли Клејн алтгрупуна нәзәрән фактор-групу S_3 - үч дәрәчәли әвәзләмәләр групуна изоморфдур.

2. Исбат един ки, $GL(n;\mathbb{R})$ групунун $SL(n;\mathbb{R})$ алтгрупуна нәзәрән фактор-групу $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ сыфырдан фәргли һәгиги әдәдләрин мултипликатив групуна изоморфдур.

Групларын һомоморфизминин ријазијјатда вә хүсусилә тәнликләр нәзәријјәсиндә тәтбигини вермәк үчүн ашағыдакы теоремин бөјүк әһәмијјәти вардыр.

<u>Теорем:</u> f ин"икасы G групунун $\tilde G$ групуна һомоморфизми вә y елементи $\tilde G$ групунун мүәјјән елементидирсә, $f(x)=y$ тәнлијинин бүтүн һәлләри, өзүнүн бир хүсуси һәлли илә $f(x)=\tilde e$ (бурада $\tilde e$ елементи $\tilde G$ групунун нејтрал елементидир) тәнлијинин бүтүн һәлләринә һасилиндән алына биләр.

<u>Исбаты:</u> f ин"икасы G групунун $\tilde G$-ә епиморфизмидирсә, $\tilde G$-дән олан ихтијари y үчүн $f(x)=y$-ин һәмишә һеч олмаса бир һәлли вар. Ола биләр ки, һәлл сонсуз сајда олсун.

Фәрз едәк ки, x_0 һәмин һәлләрдән һәр һансы биридир. x' елементи исә $f(x)=\tilde{e}$ тәнлијинин ихтијари һәлли олсун, јә"ни $f(x')=\tilde{e}$, онда x_0x' елементи $f(x)=y$ тәнлијинин һәлли олачагдыр. Доғрудан да, һомоморфизмин тә"рифинә әсасән аларыг ки;

$$f(x_0x')=f(x_0)f(x')=y\tilde{e}=y.$$

Еләчә дә асанлыгла көстәрмәк олар ки, $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$ елементләри $f(x)=\tilde{e}$ -нин мүхтәлиф һәлләридирсә, онда

$$x_0x_1, x_0x_2, \dots, x_0x_n \in G$$

елементләри дә $f(x)=y$ тәнлијинин һәлләридир.

Мәсәлән: 1. $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ -- сыфырдан фәргли бүтүн комплекс әдәдләр чохлуғу олсун. n -дән гүввәтә јүксәлтмә әмәли $\langle \mathbb{C}^*; \cdot \rangle$ мултипликатив групунун өз-өзүнә һомоморф ин"икасы олдуғундан ихтијари a комплекс әдәди үчүн

$$x^n=a$$

тәнлијинин бүтүн һәлләри, өзүнүн бир x_0 һәлли илә $x^n=1$ тәнлијинин бүтүн һәлләринә һасилиндән алынар.

2. f ин"икасы- $C[a,b]$ фәзасында n тәртибли дифференсиал оператор олсун. Ашкардыр ки, бу оператор $C^n[a,b]$ фәзасынын, јә"ни $[a,b]$ парчасында n -тәртибдән кәсилмәз дифференсиаллана функсијалар фәзасынын адитив групунун $C[a,b]$ фәзасынын адитив групуна һомоморф ин"икас етдирир (бах: дифференсиалын хассәләри). Она көрә дә һөкм едирик ки, $D^n(u)=v$ тәнлијинин бүтүн һәлләри өзүнүн бир хүсуси һәлли (сәрһәд шәртләри нәтиҹәсиндә алынан јеканә һәлл) илә $D^n(u)=0$ тәнлијинин һәлләринин ҹәминдән алына биләр.

Тапшырыг: Теореми хәтти ҹәбри тәнликләр системинин һәллинә тәтбиги ни ифадә един вә әсасландырын.

ФӘСИЛ - XI.

ҺАЛГАЛАР.

[9] -ун II фәслинин 4-чү параграфында һалганын тә"рифи, садә хассәләри, һалгаларын һомоморфизми вә изоморфизми, алтһалга кими мөвзулар кениш шәрһ олунмушдур. Онлары мә"лум һесаб едәрәк бу фәсилдә һалганын чохһәдлиләр ҹәбриндә вә әдәдләр нәзәријјәсиндә чох ишләдилән бә"зи зәрури анлајышы вә хассәләрини өјрәнәҹәјик. Бунлара һалганын идеалы, идеала нәзәрән мүгајисә, һалганын характеристикасы, баш идеал һалгасы, Евклид һалгасы в. с. кими мөвзулар дахилдир.

§ 1. ҺАЛГАНЫН ИДЕАЛЫ.

Групплар нәзәријјәсиндә нормал бөлөнләрин ојнадығы хүсуси ролу һалгалар нәзәријјәсиндә идеал адланан алтһалгалар ојнајыр.

Тә"риф 1: Фәрз едәк ки, J ваһидли K һалгасынын алтһалгасыдыр. Әкәр ихтијари $a \in J$ вә $x \in K$ елементләри үчүн xa (уйғун олараг ax) һасили J -јә дахил оларса, онда J алтчохлуғуна K һалгасынын сол (уйғун олараг сағ) идеалы дејилир.

Тә"риф 2: K һалгасынын ејни заманда сол вә сағ идеалы олан алтчохлуғуна онун икитәрәфли идеалы вә ја садәҹә олараг идеалы дејилир.

Тә"рифдән көрүндүјү кими K һалгасынын сыфыр елементиндән ибарәт олан $\{0\}$ чохлуғу идеалдыр. Она сыфыр идеал дејилир. K чохлуғу өзү дә идеалдыр, бу идеал ваһидин мисилләриндән ибарәт олдуғуна көрә она ваһид идеал дејилир. Сыфыр вә ваһид идеал K һалгасынын тривиал идеаллары адланыр. K һалгасынын дикәр идеаллары онун хүсуси идеаллары адланыр.

Мисаллар: 1. $\mathbb{Z}$ -там әдәдләр һалгасынын гејд олунмуш n там әдәди үчүн $n\mathbb{Z}=\{nx \mid x \in \mathbb{Z}\}$ чохлуғу $\mathbb{Z}$ -нин идеалыдыр.

2. Ихтијари K һалгасы вә гејд олунмуш n там әдәди үчүн $nK=\{nx \mid x \in K\}$ чохлуғу K -нын идеалыдыр.

3. K һалгасынын гејд олунмуш a елементинә көрә тәјин олунмуш $\{ka \mid k \in K\}$ чохлуғу K -нын сағ идеал, $\{ak \mid k \in K\}$ чохлуғу исә сол идеалдыр. K коммутатив һалга олдуғда бу идеаллар

үст-үстә дүшүр ки, буна a елементи тәрәфиндән јарадылан баш идеал дејилир вә (a) кими ишарә олунур.

4. $\mathcal{K}$ коммутатив һалгасынын $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{K}$ елементләринә ҝөрә тәшкил олунмуш $\{k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n \mid k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathcal{K}\}$ чохлуғу $\mathcal{K}$ -нын идеалыдыр. Она $a_1, a_2, \ldots, a_n$ елементләри тәрәфиндән јарадылан идеал дејилир вә $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ кими ишарә олунур.

5. Һәгиги әдәдләр мејданы үзәриндә x дәјишәниндән асылы чохһәдлиләрин $\mathbb{R}[x]$ һалгасында һәр һансы $h(x)$ чохһәдлисинин мисилләриндән ибарәт $\{h(x) \cdot f(x) \mid f(x) \in \mathbb{R}[x]\} = (h(x))$ баш идеалынын јаратмаг олар.

$\mathcal{K}$ һалгасынын $\mathcal{J}_1$ вә $\mathcal{J}_2$ идеаллары үчүн

$$\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = \{x + y \mid x \in \mathcal{J}_1,\ y \in \mathcal{J}_2\}$$

чохлуғуна бу идеалларын ҹәми,

$$\mathcal{J}_1 \cdot \mathcal{J}_2 = \{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \mid \forall x_i \in \mathcal{J}_1, \forall y_i \in \mathcal{J}_2, (i = \overline{1,n})\}$$

чохлуғуна исә онларын һасили дејилир.

Асанлыгла јохламаг олар ки, истәнилән сајда идеалларын кәсишмәси, сонлу сајда идеалларын ҹәми вә һасили дә идеалдыр.

Гејд едәк ки, $\mathcal{K}$ коммутатив һалгасынын (a) баш идеалы a елементини өз дахилинә алан бүтүн идеалларын кәсишмәсиндән ибарәтдир.

Еләҹә дә, коммутатив һалганын $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ идеалы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ елементләрини өз дахилинә алан бүтүн идеалларын кәсишмәсиндән ибарәтдир.

Баш идеалларын ашағыдакы хассәләрини гејд едәк:

1) $\mathcal{K}$ һалгасынын ихтијари a елементи онун доғурдуғу баш идеала дахилдир: $a \in (a)$.

Доғрудан да $\mathcal{K}$ ваһид e елементини өзүндә сахлајыр, онда

$$a = a \cdot e \in (a).$$

2) 0 сыфыр елемент 0 илә доғулан баш идеал јалныз бу елементдән ибарәтдир. Ваһид e елементи илә доғулан баш идеал, $\mathcal{K}$ һалгасы илә үст-үстә дүшүр:

$$(0) = \{0\}, \quad (e) = \mathcal{K}.$$

Доғрудан да бүтүн $r \in \mathcal{K}$ әдәдләри үчүн $r \cdot 0 = 0$. Демәли, $(0) = \{0\}$. Диҝәр тәрәфдән ихтијари $r \in \mathcal{K}$ елементи (e) идеалына дахилдир, чүнки $r = r \cdot e$. Демәли $(e) = \mathcal{K}$

3) Әҝәр $\mathcal{K}$ һалгасынын b вә c елементләри (a) баш идеалына дахилдирсә, онда $b - c \in (a)$,

$$b \in (a) \wedge c \in (a) \Rightarrow b - c \in (a).$$

Һәгигәтән $b \in (a)$ вә $c \in (a)$ -дырса, онда $a \backslash b \wedge a \backslash c$

Буна ҝөрә дә $b - c \backslash a$ вә $b - c \in (a)$ олур.

4) Әҝәр b елементи (a) баш идеалына дахилдирсә, онда $rb\ (r \in \mathcal{K})$ шәклиндә бүтүн елементләр дә (a)-ја дахилдир.

Доғрудан да $b \in (a)$ олмасындан чыхыр ки, $a \backslash b$. Онда $a \backslash rb$, јә'ни $rb \in (a)$.

5) $\mathcal{K}$ һалгасынын a елементи бу һалганын b елементинә анҹаг вә анҹаг о һалда бөлүнүр ки, $(a) \subseteq (b)$ олсун,

$$b \backslash a \Leftrightarrow (a) \subseteq (b).$$

Доғрудан да тутаг ки, $b \backslash a$. Онда һалгада бөлүнмәнин транзитивлијинә әсасән $a \backslash x$ -дән чыхыр ки, $b \backslash x$.

Башга сөзлә $\forall x \in (a)$ олмасындан чыхыр ки, $x \in (b)$.

Бу исә о демәкдир ки, $(a) \subseteq (b)$.

Тәрсинә, тутаг ки, $(a) \subseteq (b)$. Онда $a \in (b)$ -дир, чүнки $a \in (a) \subseteq (b)$. $a \in (b)$ -олмасындан чыхыр ки, $b \backslash a$.

6) $\mathcal{K}$ һалгасынын ассосиәләнмиш елементләри ејни бир баш идеалы доғурур.

Доғрудан да тутаг ки, a вә b һалганын ассосиәләнмиш елементләридир (јә'ни тутаг ки, $a = b\varepsilon$, бурада ε, $\mathcal{K}$ һалгасында тәрси олан елементдир). Онда $a \backslash x \Leftrightarrow b \backslash x$. Демәли,

$$x \in (a) \Leftrightarrow x \in (b)$$ вә буна ҝөрә дә $(a) = (b)$.

7) $\mathcal{K}$ һалгасынын тәрси олан ε елементи илә доғулан баш идеал, $\mathcal{K}$ илә үст-үстә дүшүр, јәни $(\varepsilon) = \mathcal{K}$.

Бу хассә 6-чы хассәнин хүсуси һалыдыр.

Доғрудан да хассә 2-јә ҝөрә $(e) = \mathcal{K}$ алырыг. e вә ε елементләри ассосиәләнмиш елементләрдир. Онда $(\varepsilon) = \mathcal{K}$ олур.

§ 2. ИДЕАЛА НӘЗӘРӘН МҮГАЈИСӘЛӘР ВӘ ЧЫХЫГЛАР СИНИФЛӘРИ. ФАКТОР-ҺАЛГА.

Тутаг ки, $\mathcal{K}$ һәр һансы бир һалгадыр, $\mathcal{J}$ исә бу һалганын ихтијари идеалыдыр. Билдијимиз кими $\mathcal{K}$ аддитив абел групу вә $\mathcal{J}$ исә бу групун алтгрупудур. Абел групунда онун бүтүн алтгруплары нормал бөләнләрдир, онда $\mathcal{J}$ -дә $\mathcal{K}$ групунун нормал бөләнидир. Демәли, $\mathcal{K}$ групунун $\mathcal{J}$ нормал бөләни үзрә $\mathcal{K}/\mathcal{J}$ фактор-групу вардыр. Бу фактор-груп $\mathcal{J}$ нормал бөләни үзрә $\mathcal{K}$ групунун јанаши синифләриндән ибарәтдир.

$$0+\mathcal{J},\ a+\mathcal{J},\ b+\mathcal{J},\ c+\mathcal{J},\ \dots$$

Гејд едәк ки, $x,y\in\mathcal{K}$ елементләри $\mathcal{K}$ һалгасынын аддитив групунун $\mathcal{J}$ алтгрупу үзрә јанаши синифләринә онда вә јалныз онда дахилдир ки, $x-y\in\mathcal{J}$ олсун. $\mathcal{K}$ - абел групу олдуғундан, $\mathcal{K}/\mathcal{J}$ фактор-групу да аддитив абел групудур.

Әввәл бир мүһүм анлајышы-мүгајисә анлајышыны-тә"јин едәк вә онун бә"зи хассәләрини өјрәнәк.

<u>Тә"риф:1</u>. Фәрз едәк ки, $\mathcal{J}$ идеалдыр. Әкәр $x-y\in\mathcal{J}$ оларса, онда дејирләр ки, $x\in\mathcal{K}$ елементи $y\in\mathcal{K}$ елементинә $\mathcal{J}$ модулуна нәзәрән мүгајисә олунандыр. "$x\in\mathcal{K}$ $y\in\mathcal{K}$ елементи илә $\mathcal{J}$ модулуна нәзәрән мүгајисә олунандыр" мүлаһизәси гыса олараг

$$x\equiv y\ (\mathrm{mod}\ \mathcal{J})$$

кими јазылыр.

Демәли, $x\equiv y(\mathrm{mod}\ \mathcal{J}) \Leftrightarrow x-y\in\mathcal{J}$.

Әкәр $\mathcal{J}=(m)$ баш идеалдырса, онда $x\equiv y\ (\mathrm{mod}\ \mathcal{J})$ әвәзинә $x\equiv y(\mathrm{mod}\ m)$ јазылыр.

<u>Теорем I</u>. $\mathcal{K}$ һалгасында ихтијари $\mathcal{J}$ идеалы үчүн „a илә b елементләри $\mathcal{J}$ идеалына нәзәрән мүгајисә олунандыр" мүнасибәти еквивалентлик мүнасибәтидир.

Исбаты охучуја һәвалә едилир.

<u>Нәтичә:</u> $\mathcal{K}$ һалгасында һәр бир $\mathcal{J}$ идеалы бу һалганын еквивалентлик синифләринә ајрылмасыны тә"јин едир. Ики елемент онда вә јалныз онда ејни бир синифә дахилдир ки, $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ \mathcal{J})$, јә"ни $a-b\in\mathcal{J}$ олсун.

<u>Тә"риф:2.</u> $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ \mathcal{J})$ бинар мүнасибәтинә көрә гурулмуш еквивалентлик синифләри $\mathcal{J}$ идеалына нәзәрән чыхыглар синифләри адланыр.

Беләликлә алырыг ки, $\mathcal{J}$ идеалына нәзәрән ејни бир синифә дахил олан ихтијари ики a вә b елементләри $\mathcal{J}$ модулуна нәзәрән мүгајисә олунандыр, јә"ни

$$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ \mathcal{J}).$$

$a\equiv b(\mathrm{mod}\ \mathcal{J})$ мүнасибәтинин тә"рифиндән чыхыр ки, әкәр $r\in\mathcal{J}$ -дирсә, онда $a+r\equiv a\ (\mathrm{mod}\ \mathcal{J})$.

Доғрудан да $(a+r)-a=r\in\mathcal{J}$.

Тәрсинә, әкәр $a\equiv b(\mathrm{mod}\ \mathcal{J})$ -дирсә, онда $b-a\in\mathcal{J}$. $b-a=r$ ишарә едәк. Онда $b=a+r$, бурада $r\in\mathcal{J}$.

Демәли, әкәр A $\mathcal{J}$ идеалына нәзәрән чыхыглар синфидирсә вә $a\in A$, онда A $a+r$ шәклиндә бүтүн елементләрдән ибарәтдир, $r\in\mathcal{J}$. Буна көрә дә чох вахт a елементини өзүндә сахлајан $\mathcal{J}$ идеалына нәзәрән чыхыглар синфи $a+\mathcal{J}$ кими ишарә олунур. Хүсуси һалда $\mathcal{J}$ идеалынын өзү, чыхыглар синифләриндән биридир, мәсәлән $0+\mathcal{J}=\mathcal{J}$.

Идеала нәзәрән мүгајисәнин ашағыдакы хассәләрини исбат едәк.

<u>Теорем 2:</u> Ејни модула нәзәрән мүгајисәләри һәдбә-һәд топламаг вә чыхмаг олар.

<u>Исбаты:</u> Исбат етмәк лазымдыр ки, әкәр

$$a_1\equiv b_1\ (\mathrm{mod}\ \mathcal{J}) \wedge a_2\equiv b_2\ (\mathrm{mod}\ \mathcal{J}), \qquad (*)$$

онда

$$a_1\pm a_2\equiv b_1\pm b_2\ (\mathrm{mod}\ \mathcal{J}).$$

$a_1\equiv b_1(\mathrm{mod}\ \mathcal{J})$ -дан чыхыр ки, $a_1=b_1+r_1$, бурада $r_1\in\mathcal{J}$. Һәмчинин $a_2=b_2+r_2$, $r_2\in\mathcal{J}$.

Онда

$$a_1\pm a_2=(b_1+r_1)\pm(b_2+r_2)=(b_1\pm b_2)+(r_1\pm r_2).$$

Лакин, $r_1\in\mathcal{J}$, $r_2\in\mathcal{J}$. Онда тә"рифә көрә $r_1\pm r_2\in\mathcal{J}$.

Бу исә ону көстәрир ки,

$$a_1\pm a_2\equiv b_1\pm b_2\ (\mathrm{mod}\ \mathcal{J}).$$

Теорем 3: Ејни модула нәзәрән мүгајисәләри һәдбә-һәдд вурмаг олар.

Исбаты: Доғрудан да (*)-дән $a_1=b_1+r_1$, $a_2=b_2+r_2$, бурада $r_1, r_2\in J$, онда

$$a_1a_2=(b_1+r_1)(b_2+r_2)=b_1b_2+b_1r_2+b_2r_1+r_1r_2.$$

Идеалын тә'рифинә көрә $r_1\in J$, $r_2\in J$ олмасындан чыхыр ки,

$$b_1r_2\in J,\ b_2r_1\in J,\ r_1r_2\in J, \quad \text{онда}$$
$$b_1r_2+b_2r_1+r_1r_2\in J \quad \text{олур.}$$

Демәли $\quad a_1a_2-b_1b_2=b_1r_2+b_2r_1+r_1r_2.$

Буна көрә дә

$$a_1a_2-b_1b_2\in J,$$

онда

$$a_1a_2\equiv b_1b_2 \pmod{J}.$$

Инди јенидән K/J факторгрупуна гајыдаг. Бу групун елементләри $a+J,\ b+J,\ c+J,\dots$ кими чыхыглар синифләриндән ибарәтдир. Онлары ујғун олараг $\bar a, \bar b, \bar c,\dots$ кими ишарә едәк: $\bar a=a+J$, $\bar b=b+J$, $\bar c=c+J,\dots$. Ајдындыр ки, һәр бир синиф өзүнүн истәнилән елементи васитәсилә јеканә гајдада тә'јин олунур.

Чыхыглар синифләри үзәриндә ашағыдакы кими әмәлләр тә'јин едәк:

1) $\bar a=\bar b$ о заман вә јалныз о заман олур ки, $a\equiv b \pmod{J}$.

2) $\bar a+\bar b=\overline{a+b}$, јә'ни $\bar a$ вә $\bar b$ синифләринин ҹәми $a+b$ елементинин дахил олдуғу $\overline{a+b}$ синфинә дејилир.

3) $\bar a\cdot\bar b=\overline{ab}$, јә'ни $\bar a$ вә $\bar b$ синифләринин һасили $a\cdot b$ елементинин дахил олдуғу $\overline{ab}$ синфинә дејилир.

Теорем 3: J идеалына нәзәрән K һалгасынын чыхыглар синифләри чохлуғу K/J орада тә'јин олунмуш әмәлләрә нәзәрән һалга әмәлә кәтирир.

Исбаты: K/J топламаја нәзәрән адитив груп тәшкил етдијиндән бурада топламаја аид хассәләрин доғрулуғуну јохламаға еһтијаҹ јохдур. Вурма әмәлинә аид хассәләри јохлајаг.

$$(\bar a\bar b)\bar c=\overline{ab}\cdot\bar c=\overline{(ab)c}=\overline{a(bc)}=\bar a\cdot\overline{bc}=\bar a(\bar b\bar c).$$
$$\bar a(\bar b+\bar c)=\bar a\,\overline{b+c}=\overline{a(b+c)}=\overline{ab+ac}=\overline{ab}+\overline{ac}=\bar a\bar b+\bar a\bar c.$$

Сағдан пајлама хассәси дә һәмин гајда илә јохланыр.

Демәли K/J һалгадыр.

K/J һалгасына K һалгасынын J идеалына нәзәрән фактор-һалгасы, вә ја J модулуна нәзәрән чыхыглар һалгасы дејилир.

§ 3. ҺАЛГАЛАРЫН ЕПИМОРФИЗМИ ҺАГГЫНДА ТЕОРЕМ, ҺАЛГАНЫН ХАРАКТЕРИСТИКАСЫ, ҺАЛГАНЫН ӘН КИЧИК АЛТҺАЛГАСЫ.

Теорем 1. Ихтијари K вә $\tilde K$ һалгалары үчүн K-нын $\tilde K$-ја һомоморфизми K-нын идеалыдыр.

Исбаты: Фәрз едәк ки, $f: K\simeq\tilde K$ һомоморфизм,

$$\mathrm{Ker}\, f=\{x\in K \mid f(x)=\tilde 0\in\tilde K\}$$

исә бу һомоморфизмин нүвәсидир. Истәнилән $a, b\in \mathrm{Ker}\, f$ үчүн

$$f(a+b)=f(a)+f(b)=\tilde 0, \quad f(ab)=f(a)f(b)=\tilde 0$$

мүнасибәтләриндән чыхыр ки, $a+b\in\mathrm{Ker}\, f$, $ab\in\mathrm{Ker}\, f$.

Демәли $\mathrm{Ker}\, f$ алтһалгадыр. Истәнилән $a\in\mathrm{Ker}\, f$, $m\in K$ үчүн

$$f(am)=f(a)f(m)=\tilde 0\cdot f(m)=\tilde 0,$$
$$f(ma)=f(m)f(a)=f(m)\tilde 0=\tilde 0.$$

Мүнасибәтләри көстәрир ки, $am\in\mathrm{Ker}\, f$, $ma\in\mathrm{Ker}\, f$. Демәли $\mathrm{Ker}\, f$ идеалдыр.

Теорем 2: Тутаг ки, $f: K\simeq\tilde K$ һомоморфизм, $J=\mathrm{Ker}\, f$ исә онун нүвәсидир. Онда истәнилән $a, b\in K$ үчүн $f(a)=f(b)$ о заман вә јалныз о заман доғрудур ки, $\bar a=\bar b$ олсун.

Исбаты: Доғрудан да,

$$f(a)=f(b)\Rightarrow f(a-b)=\tilde 0\Rightarrow a-b\in J\Rightarrow a\equiv b \pmod{J}\Rightarrow \bar a=\bar b.$$

Тәрсинә, $\bar a=\bar b\Rightarrow a\equiv b \pmod{J}\Rightarrow a-b\in J\Rightarrow f(a-b)=\tilde 0\Rightarrow f(a)=f(b)$.

Теорем 3: Фәрз едәк ки, f ихтијари K һалгасынын $\tilde K$ һалгасы үзәринә епиморфизми, J исә онун нүвәсидир. Онда K/J фактор-һалгасы $\tilde K$-ја изоморфдур.

Исбаты: Истәнилән $a\in K$ елементи үчүн $\bar a$ синфини $\tilde K$-дакы образы оларағ $\tilde{a} = f(a)$ -ны верән $h(\bar{a}) = f(a)$ ин"икасыны гурағ.Онда

$$h(\bar{a}+\bar{b}) = h(\overline{a+b}) = f(a+b) = f(a)+f(b) = h(\bar{a})+h(\bar{b}),$$
$$h(-\bar{a}) = h(\overline{-a}) = f(-a) = -f(a) = -h(\bar{a}),$$
$$h(\bar{a}\cdot\bar{b}) = h(\overline{ab}) = f(ab) = f(a)f(b) = h(\bar{a})\,h(\bar{b}).$$

Демәли, h ин"икасы $\mathcal{K}/\mathcal{J}$ -нин $\tilde{\mathcal{K}}$ үзәринә ин"икасыдыр вә баш әмәллəри сахлаjыр.Әкәр $h(\bar{a}) = h(\bar{b})$ оларса, онда

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a \equiv b \pmod{\mathcal{J}} \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}.$$

Демәли, h ин"икасы һәм дә инjективдир.Бу исә көстәрир ки, h ин"икасы $\mathcal{K}/\mathcal{J}$ -нин $\tilde{\mathcal{K}}$ үзәринә изоморфизмидир.

Инди фәрз едәк ки, ваһидли $\mathcal{K}$ һалгасы верилмишдир.Онун ваһидини e илә ишарә едәк.

<u>Тә"риф:I.</u> Әкәр $\mathcal{K}$ һалгасынын аддитив групунда e -нин тәртиби n -ә бәрабәрдирсә,онда дejирләр ки, $\mathcal{K}$ һалгасынын характеристикасы n -ә бәрабәрдир.

Бу тә"рифдән көрүнүр ки, $\mathcal{K}$ һалгасынын характеристикасынын n олмасы о демәкдир ки, $ne = 0$ вә n -дән кичик истәнилән натурал $k \neq 0$ әдәди үчүн $ke \neq 0$.

Әкәр һалганын характеристикасы сонлу әдәддирсә она сонлу характеристикалы һалга,сыфырдырса она сыфыр характеристикалы һалга деjилир.

<u>Мисаллар:I.</u> Там әдәдләр һалгасы,расионал әдәдләр һалгасы,һәгиги әдәдләр һалгасы,комплекс әдәдләр һалгасы вә с. кими бүтүн әдәди һалгалар сыфыр характеристикалы һалгалардыр.

2. Там әдәдләр һалгасынын $\mathbb{Z}/(3)$ фактор һалгасыны дүзәлдәк.
Бу һалганын елементләри

$$\bar{0} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\},\quad \bar{1} = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\},\quad \bar{2} = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

кими 3 синифдән ибарәтдир.
Бурада $e = \bar{1}$ -дир вә

$$2e = e+e = \bar{1}+\bar{1} = \{3k+1\}+\{3n+1\} = \{3(k+n)+2\} = \bar{2},$$

$$3e = e+e+e = \{3k+1\}+\{3m+1\}+\{3n+1\} = \{3(k+m+n)+3\} =$$
$$= \{3(k+m+n+1)\} = \{3t \mid t \in \mathbb{Z}\} = \bar{0}$$

Демәли, $\mathbb{Z}/(3)$ фактор-һалгасынын характеристикасы 3-дүр.
Тутаг ки, $\mathcal{K}$ ва ди e олан ихтиjари һалга $\mathbb{Z}$ исә там әдәдләр һалгасыдыр.

$$\varphi(n) = ne,\quad n \in \mathbb{Z}$$

шәклиндә вә илән $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathcal{K}$ ин"икасына бахаг.Аjдындыр ки, φ ин"икасы $\mathbb{Z}$ һалгасынын $\mathcal{K}$ һалгасына һомоморфизмидир.
$E = \varphi(\mathbb{Z}) = \{ne\}$ чохлуғу илә верилән алтһалга $\mathcal{K}$ -нын ән кичик алтһалгасы адланыр.Аjдындыр ки, φ ин"икасы $\mathbb{Z}$ һалгасынын E алтһалгасына епиморфизмидир. пиморфизм һаггында теорема әсасән E һалгасы $\mathbb{Z}/\mathcal{J}$ фактор-һалгасына изоморфдур,бурада

$$\mathcal{J} = \operatorname{Ker}\varphi = \{n \in \mathbb{Z} \mid \varphi(n) = ne = 0\}$$

Дикәр тәрәфдән $\mathbb{Z}$ там әдәдләр һалгасында һәр бир идеал баш идеалдыр,jә"ни $\mathcal{J} = (p)$ -дир.Бурада p мәнфи олмаjан там әдәддир.
$\mathcal{J}$ -нин структурундан көрүнүр ки, $ne = 0$ бәрабәрлиjини едәjән бүтүн мәнфи олмаjан n там әдәдләри p -нин мисилләридир.
Демәли, p әдәди бу бәрабәрлиjи едәjән ән кичик мәнфи олмаjан там әдәддир,башга сөзлә p әдәди $\mathcal{K}$ һалгасынын характеристикасыдыр.

Ашағыдакы ики һалдан бири вә jалныз бири доғрудур:
I) $p = 0$. Бу һалда $E \cong \mathbb{Z}/(0) \cong \mathbb{Z}$. Доғрудан да $\mathbb{Z}/(0)$ фактор-һалгасынын һәр бир синфинә jалныз бир там әдәд дахилдир.
Одур ки, $\mathbb{Z}/(0)$ һалгасынын $\mathbb{Z}$ -ә һомоморфизми,истәнилән $a \in \mathbb{Z}$ үчүн

$$h(\bar{a}) = h(\{a\}) = a$$

шәклиндәдир ки, бу да изоморфизмдир.
Демәли, $p = 0$ олдугда $E = \{ne\}$ алтһалгасы $\mathbb{Z}$ там әдәдләр һалгасына изоморфдур.
2) $p > 0$. Онда E алтһалгасы $\mathbb{Z}/(p)$ чыхыглар синифләри һалгасына изоморфдур.
Тәрсинә,әкәр $E \cong \mathbb{Z}$ оларса, $\mathcal{J} = (0)$, $E \cong \mathbb{Z}/(p)$ оларса $\mathcal{J} = (p)$ олар ки,биринчи һалда $\mathcal{K}$ -нын характеристикасы сыфыр,икинчи һалда исә $p > 0$ әдәдидир.
Бу дедикләримизи ашағыдакы теорем шәклиндә jекунлашдыра биләрик:

<u>Теорем 4:</u> Тутаг ки, $\mathcal{K}$ ваһиди e олан һалга, $\mathbb{Z}$ исә там әдәдләр һалгасыдыр, $\varphi(n)=ne;\ n\in\mathbb{Z}$, $E=\{ne\}$

$p\geq 0$ там әдәди о заман вә јалныз о заман $\mathcal{K}$ һалгасынын характеристикасы олар ки, E алтһалгасы $\mathbb{Z}/(p)$ чыхыглар һалгасына изоморф олсун.

Бу теоремдән көрүнүр ки, там әдәдләр һалгасынын характеристикасы сыфыр, $\mathbb{Z}/(p)$ һалгасынын характеристикасы p -дир.

<u>Теорем 5:</u> Тамлыг областынын характеристикасы ја сыфыр, ја да садә әдәддир.

<u>Исбаты:</u> Тутаг ки, $\mathcal{K}$ ваһиди e олан тамлыг областыдыр. Әкәр $\mathcal{K}$-нын характеристикасы $p=st$ мүрәккәб әдәд оларса, онда $1<s,t<p$ вә $0=pe=(st)e=(se)(te)$. $\mathcal{K}$ тамлыг областы олдуғу үчүн бурадан $se=0$ вә ја $te=0$ алынар ки, бу да p -нин характеристика олмасы шәртинә зидд олар.

<u>Теорем 6:</u> p садә әдәд олдугда $\mathbb{Z}/(p)$ фактор-һалгасы мејдандыр.

<u>Исбаты:</u> Ихтијари $\bar{a}\in\mathbb{Z}/(p)$ сыфырдан фәргли синфинин тәрсинин варлығыны көстәрмәк кифајәтдир.

$\bar{a}\neq\bar{0}$ олмасы көстәрир ки, a әдәди p -јә бөлүнмүр. Онда a вә p гаршылыглы садәдир, $(a,p)=1$. Онда елә m вә n там әдәдләр вар ки, $mp+na=1$, бурадан $\overline{mp}+\overline{na}=\bar{1}$.

Лакин $\overline{mp}=\bar{0}$ олдуғу үчүн $\bar{n}\,\bar{a}=\bar{1}$ вә $\bar{a}^{-1}=\bar{n}$.

<u>Нәтиҹә:</u> Характеристикасы сыфырдан фәргли олан тамлыг областынын ән кичик алтһалгасы мејдандыр.

Доғрудан да $p\neq 0$ олдуғу үчүн теорем 5-ә әсасән p садә әдәддир. Онда $\mathbb{Z}/(p)$ фактор-һалгасы мејдандыр. $E=\{ne\}$ ән кичик алтһалгасы $\mathbb{Z}/(p)$ -јә изоморф олдуғуна көрә, о да мејдан олар.

§4. <u>КОММУТАТИВ ҺАЛГАДА БӨЛҮНМӘНИН САДӘ ХАССӘЛӘРИ.</u>

<u>Тә"риф:1.</u> $\mathcal{K}$ коммутатив һалгасынын a вә b $(b\neq 0)$ елементләри үчүн $\mathcal{K}$-да елә q елементи варса $a=bq$ олсун, онда дејирләр ки, a елементи b елементинә бөлүнүр вә јахуд b елементи a -ны бөлүр. $a\,\vdots\,b$ ифадәси " a елементи b -јә бөлүнүр", $b\backslash a$ ифадәси " b елементи a -ны бөлүр" мүлаһизәсини ифадә едир.

Коммутатив ваһидли һалгада бөлүнмә мүнасибәтинин ашағыдакы хассәләрини гејд едәк:

1. Бөлүнмә мүнасибәти рефлексивдир, јә"ни ихтијари $a\in\mathcal{K}\ (a\neq 0)$ елементи үчүн

$$a\,\vdots\,a.$$

2. Бөлүнмә мүнасибәти транзитивдир: јәни $a\,\vdots\,b$ вә $b\,\vdots\,c$ оларса, $a\,\vdots\,c$ олар.

Доғрудан да, $a\,\vdots\,b$, онда елә $q\in\mathcal{K}$ вар ки, $a=bq$. Һәм дә $b\,\vdots\,c$, онда елә $s\in\mathcal{K}$ вар ки, $b=cs$. Онда

$$a=bq=(cs)q=c(sq),\quad sq\in\mathcal{K}$$

алырыг.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $\mathcal{K}$ һалгасында ашағыдакы һөкмләр дә доғрудур:

3. Әкәр $a\,\vdots\,c$ вә $b\in\mathcal{K}$ оларса, онда $ab\,\vdots\,c$.
4. Әкәр $a\,\vdots\,c$ вә $b\,\vdots\,c$ оларса, онда $(a\pm b)\,\vdots\,c$.
5. Әкәр $a\,\vdots\,c$ вә b елементи c елементинә бөлүнмүрсә, онда $a\pm b$ елементи c елементинә бөлүнмүр.
6. Сыфыр ихтијари сыфырдан фәргли b елементинә бөлүнүр.
7. $\mathcal{K}$ һалгасынын ихтијари a елементи ваһид e елементинә бөлүнүр.

Һалгаларда бөлүнмә мүнасибәтинин хассәләри тәрси олан елемент анлајышы илә дә сых әлагәдардыр.

<u>Тә"риф:2.</u> $\mathcal{K}$ һалгасында елә b елементи варса ки, $ab=e$ олсун, онда a елементинә тәрси олан елемент дејилир. b -јә исә a -нын тәрси дејилир.

Мисаллар: 1. $\mathbb{Z}$ там әдәдләр һалгасында тәрси олан елементләр јалныз 1 вә -1 әдәдләридир.

2. $\mathbb{Z}[i]=\langle\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\};+,\cdot\rangle$ там гаусс әдәдләри һалгасында тәрси олан јалныз 4 әдәд вардыр: $1, -1, i$ вә $-i$.

Доғрудан да, әкәр $a+bi\in\mathbb{Z}[i]$ елементинин тәрси варса, онда елә $c+di\in\mathbb{Z}[i]$ тапылар ки,

$(a+bi)(c+di)=1$ олсун.

Онда $|a+bi|^2\cdot|c+di|^2=1$, јә'ни

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=1. \qquad (1)$$

Онда (1) бәрабәрлији, јалныз $a^2+b^2=1$, јә'ни ашағыдакы дөрд һалдан бири олдугда мүмкүндүр:

$$a=1,\ b=0;\qquad a=-1,\ b=0;\qquad a=0,\ b=1;$$

$a=0,\ b=-1$. Бу да көстәрир ки, $a+bi$ јалныз дөрд гијмәт ала биләр: $1, -1, i, -i$.

Мисал: 3. $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]=\{a+b\sqrt{m} \mid a,b,m\in\mathbb{Z}$, m-гејд олунан әдәд, $\sqrt{m}\notin\mathbb{Z}$, јә'ни m там квадрат дејил$\}$, һалгасында $\varepsilon=u+v\sqrt{m}$ елементинин онда вә јалныз онда тәрси вар ки, бу елементин нормасы дејилән

$$N(\varepsilon)=(u+v\sqrt{m})(u-v\sqrt{m})=u^2-mv^2$$

ифадәсинин гијмәти ±1-ә бәрабәр олсун.

Доғрудан да: 1) Тутаг ки, $\varepsilon=u+v\sqrt{m}$ тәрси олан елемент вә $\varepsilon^{-1}=x+y\sqrt{m}$ она тәрс елементдир. Онда

$$(u+v\sqrt{m})(x+y\sqrt{m})=1 \qquad (1)$$

$a+b\sqrt{m}\longrightarrow a-b\sqrt{m}$ автоморфизминә әсасән

$$(u-v\sqrt{m})(x-y\sqrt{m})=1 \qquad (2)$$

јаза биләрик. (1) вә (2) бәрабәрликләрини вуруб,

$(u^2-mv^2)(x^2-my^2)=1$, јә'ни $N(\varepsilon)N(\varepsilon^{-1})=1$ аларыг.

Демәли, $N(\varepsilon)=u^2-mv^2$ ваһидин там бөләнидир вә буна көрә дә $N(\varepsilon)=\pm1$.

2) Тәрсинә, әкәр $N(\varepsilon)=(u+v\sqrt{m})(u-v\sqrt{m})=\pm1$ оларса, онда $\varepsilon=u+v\sqrt{m}$ үчүн елә $\varepsilon^{-1}=\pm(u-v\sqrt{m})$ елементи вардыр ки, $\varepsilon\varepsilon^{-1}=1$ олар, буна көрә дә ε тәрси олан елементдир.

Мисал 4: $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]=\langle\{a+b\sqrt{3} \mid a,b\in\mathbb{Z}\};+,\cdot\rangle$ һалгасында тәрси олан елементләри тапаг.

Һәлли: Әкәр $a+b\sqrt{3}$ тәрси олан әдәддирсә онда елә $c+d\sqrt{3}$ әдәди тапылар ки,

$$(a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3})=1$$

$\alpha=a+b\sqrt{3}$ әдәдинин нормасы $N(\alpha)=a^2-3b^2$.

Демәли, $N(\alpha)=a^2-3b^2$ ваһидин там бөләнидир. Буна көрә $a^2-3b^2=1$ олур. (бах мисал 3).

$a^2-3b^2=1$ тәнлијинин $a=\pm2,\ b=\pm1$ дөрд һәллини тапырыг. Демәли, $\pm(2+\sqrt{3})$, $\pm(2-\sqrt{3})$ әдәдләри $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ һалгасында тәрси олан әдәдләрдир. Лакин

$$(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n=((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}))^n=1$$

олдуғуна көрә n ихтијари натурал әдәд олдугда $(2+\sqrt{3})^n$ вә $(2-\sqrt{3})^n$ әдәдләри дә $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ һалгасында тәрси олан әдәдләрдир. Демәли, $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ һалгасынын тәрси олан бүтүн елементләри чохлуғу $\pm(2+\sqrt{3})^n$ шәклиндә елементләрдән ибарәтдир.

Теорем: 1. Әкәр $a \vdots b$ вә ε K һалгасында тәрси олан елементдирсә, онда $a \vdots b\varepsilon$.

Исбаты: Доғрудан да $a \vdots b$, онда елә q елементи вар ки, $a=bq$. ε елементинин K-да тәрси олдуғуна көрә K-да елә ε_1 елементи тапылар ки, $\varepsilon\varepsilon_1=e$ олар. Онда аларыг:

$$a=(b\varepsilon\varepsilon_1)q=(b\varepsilon)(\varepsilon_1 q)$$

Бу бәрабәрлик көстәрир ки, $a \vdots b\varepsilon$.

Теорем 2: K коммутатив, ваһидли һалгасынын тәрси олан елементләринин K чохлуғу вурмаја нәзәрән груп әмәлә кәтирир.

Исбаты: Шәртә ҝөрә K һалгасы коммутативдир вә ваһиди вардыр, онда теореми исбат етмәк үчүн ашағыдакы ики һөкмүн доғру олдуғуну ҝөстәрмәк кифајәтдир.

а) тәрси олан ики елементин һасили $\widetilde{K}$ -да тәрси оландыр.

б) әҝәр ε $\widetilde{K}$-да тәрси олан елементдирсә, онда ε^{-1}-дә $\widetilde{K}$-да тәрси оландыр.

Тутаг ки, δ вә ε $\widetilde{K}$-да тәрси олан елементләрдир. Онда $\widetilde{K}$-да елә δ_1 вә ε_1 вардыр ки, $\delta\delta_1 = e$ вә $\varepsilon\varepsilon_1 = e$.

Лакин онда аларыг:

$$(\delta\varepsilon)(\delta_1\varepsilon_1) = (\delta\delta_1)(\varepsilon\varepsilon_1) = e\,e = e$$

Демәли, $\delta\varepsilon$ һасили $\widetilde{K}$ -да тәрси оландыр.

б) һөкмү һаггында белә дејә биләрик; Әҝәр $\varepsilon\varepsilon_1 = e$ -дирсә, онда нәинки, ε һәм дә $\varepsilon_1 = \varepsilon^{-1}$ елементи дә $\widetilde{K}$ -да тәрси оландыр. Бу да б) һөкмүнүн доғру олдуғуну ҝөстәрир.

$\widetilde{K}$ групу K һалгасынын тәрси олан елементләринин мултипликатив групу адланыр.

Тә"риф 3: Әҝәр K тамлыг областынын a елементи бу һалганын b елементинә вә b елементи a елементинә бөлүнәрсә, онда a вә b елементләринә ассосиривләнән елементләр дејилир.

$\mathbb{Z}$ там әдәдләр һалгасында m вә $-m$ ассосиривләнәндирләр. Бу һалгада $a \vdots b$ вә $b \vdots a$ мүнасибәтләриндән чыхыр ки, $a = b$ вә јахуд $a = -b$.

Теорем 3: Коммутатив, ваһидли һалгада ики a вә b елементләри о заман вә јалныз о заман ассосиривләнәндирләр ки, бу һалгада $a = b\varepsilon$ шәртини өдәјән тәрси олан ε елементи олсун.

Мисаллар: 1. Ҝөстәрәк ки, $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ һалгасында $a = 5+2\sqrt{3}$, $b = 4-\sqrt{3}$ елементләри ассосиривләнән елементләрдир.

Доғрудан да, a вә b әдәдләринин гаршылыглы бөлүнмәләрини јохлајаг.

$$\frac{a}{b} = \frac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} = \frac{(5+2\sqrt{3})(4+\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})} = \frac{26+13\sqrt{3}}{13} = 2+\sqrt{3}.$$

Ејни гајда илә $\frac{b}{a} = 2-\sqrt{3}$ тапырыг.

$a \vdots b$ вә $b \vdots a$ мүнасибәтләри ејни заманда өдәндијиндән a вә b ассосиривләнән елементләрдир.

Мисал 2: $3+\sqrt{-5}$ вә $2-\sqrt{-5}$ әдәдләри $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ һалгасында ассосиривләнән дејилдир.

Теорем 4: Әҝәр a K тамлыг областынын сыфырдан фәргли елементидирсә, онда $ab = ac$, $b, c \in K$ бәрабәрлијиндән чыхыр ки, $b = c$.

Башга сөзлә, тамлыг областында бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини сыфырдан фәргли елементә ихтисар етмәк олар.

Исбаты: $ab = ac$ бәрабәрлијиндән чыхыр ки, $a(b-c) = 0$

$a \neq 0$ вә K сыфырын бөлөнләрини өзүндә сахламыр, онда $a(b-c) = 0$ бәрабәрлији јалныз $b-c = 0$, јә"ни $b = c$ олдугда мүмкүндүр.

Исбат етдијимиз бу теоремдән чыхыр ки, K тамлыг областынын a вә $b \neq 0$ елементләри үчүн $a = bq$ бәрабәрлијини өдәјән $q \in K$ варса јеҝанәдир. Доғрудан да, әҝәр $a = bq$ вә $a = bs$ оларса, онда $bq = bs$ олур. $b \neq 0$ олдуғу үчүн $q = s$ алырыг.

Теорем 5: Әҝәр a елементи a_1 илә, b елементи b_1 илә ассосиривләнәндирсә вә $a \vdots b$ -дирсә, онда $a_1 \vdots b_1$.

§ 5. ТАМЛЫГ ОБЛАСТЫНЫН САДӘ ВӘ МҮРӘККӘБ ЕЛЕМЕНТЛӘРИ.

Јухарыда дејилдији кими һалганын һәр бир a елементи истәнилән тәрси олан елементә вә a илә ассосиривләнән елементә бөлүнүр. Бу бөлөнләр a -нын тривиал бөлөнләри адланыр.

Тә"риф 1: a елементинин мәхсуси бөлөни онун тривиал олмајан бөлөнинә дејилир.

Мәсәлән, там әдәдләр һалгасында һәр бир a әдәдинин тривиал бөлөнләри јалныз ± 1, $\pm a$ мәхсуси бөлөнләри исә бунлардан фәргли бөлөнләридир.

Тә"риф 2: K тамлыг областынын сыфырдан фәргли елементи ики тәрси олмајан елементин һасили кими ҝөстәриләбилирсә, она K -нын мүрәккәб вә ја кәтирилән елементи дејилир.

Башга сөзлә, K тамлыг областынын сыфырдан фәргли елементи онун ики мәхсуси бөлөнинин һасили кими ҝөстәриләбилирсә она мүрәккәб вә ја кәтирилән елемент дејилир.

Тә'риф 3: K тамлыг областынын сыфырдан фәргли елементинин тәрси јохдурса вә онун јалныз тривиал бөләнләри варса, бу елементә K-нын садә вә ја кәтирилмәјән елементи дејилир.

Гејд етмәк лазымдыр ки, истәнилән мејданын нә садә, нә дә мүрәккәб елементи јохдур.

Там әдәдләр һалгасында 2,3,5,7,... садә әдәдләрдир. $\mathbb{Z}[x]$ там әмсаллы чохһәдлиләр һалгасында $x+1$, x^2+1, x^2-2 вә с. садә вә ја кәтирилмәјән елементләрдир.

Теорем: Фәрз едәк ки, K - тамлыг областы I исә онун ваһидидир. Онда истәнилән $a,b\in K$ үчүн:

1) $b|a$ онда вә јалныз онда олур ки, $(a)\subseteq(b)$ олсун.
2) $a|1$ онда вә јалныз онда олур ки, $(a)=(1)$ олсун.
3) a вә b онда вә јалныз онда ассосиривләнән олурлар ки, $(a)=(b)$ олсун.
4) b елементи a-нын мәхсуси бөләнидирсә, онда $(a)\subset(b)$
5) $(a)\subset(b)$ онда вә јалныз онда олур ки, $b|a$ вә a елементи b-нин бөләни олмасын.

Исбаты:

1) Фәрз едәк ки, $b|a$, јә'ни елә $c\in K$ вар ки, $a=bc$. Онда

$$(a)=\{ma\,|\,m\in K\}=\{mcb\,|\,m\in K\}\subseteq\{nb\,|\,n\in K\}=(b)$$

Демәли $(a)\subseteq(b)$. Тәрсинә, әкәр $(a)\subseteq(b)$, онда $a\in(b)$ вә демәли елә $c\in K$ вар ки, $a=bc$, јахуд $b|a$.

2) Әкәр $a|1$, онда $(1)\subseteq(a)$. Дикәр тәрәфдән $(1)=K$ олдуғу үчүн $(a)\subseteq(1)$, демәли $(a)=(1)$. Тәрсинә, әкәр $(a)=(1)$ оларса, онда $a|1$.

3) Әкәр $a|b$ вә $b|a$ оларса, онда $(b)\subseteq(a)$ вә $(a)\subseteq(b)$, она көрә дә $(a)=(b)$ олур. Тәрсинә, әкәр $(a)=(b)$ оларса, онда $a\in(b)$ вә $b\in(a)$, она көрә дә $b|a$ вә $a|b$.

4) Фәрз едәк ки, b елементи a-нын мәхсуси бөләнидир, јә'ни $b\nmid 1$, $b|a$, лакин $a\nmid b$. Онда $(b)\neq(a)$ вә $(a)\subseteq(b)$, демәли $(a)\subset(b)$.

5) Әкәр $(a)\subset(b)$, онда $b|a$, лакин $a\nmid b$.

Тәрси 1) вә 3)-дән чыхыр.

§ 6. БАШ ИДЕАЛЛАР ҺАЛГАСЫ.

Тамлыг областлары арасында баш идеаллар һалгасы хүсуси јер тутур. Бурада бөлмә нәзәријјәси там әдәдләр һалгасындакы әсас хассәләри өзүндә сахлајыр.

Тә'риф: I. Һәр бир идеалы баш идеал олан тамлыг областына баш идеаллар һалгасы дејилир.

Мисаллар: I. Ихтијари мејдан баш идеаллар һалгасыдыр.

2. Там әдәдләр һалгасы баш идеаллар һалгасыдыр.

Хатырладаг ки, коммутатив K һалгасынын гејд олунмуш a вә b елементләри үчүн $(a,b)=\{ax+by\,|\,x,y\in K\}$ чохлуғу бу һалганын идеалыдыр. Хүсуси һалда $x=0$ вә ја $y=0$ ола биләр. Бу дә көстәрир ки, (a) вә (b) баш идеаллары (a,b)-јә дахилдир.

Теорем: I. Фәрз едәк ки, K там әдәдләр һалгасы, a онун ихтијари, p исә садә елементидир. Әкәр $p\nmid a$, онда $(p,a)=(1)$.

Исбаты: K-да ихтијари идеал баш идеал олдуғуна көрә елә $c\in K$ вар ки, $(p,a)=(c)$. $(p),(a)\subseteq(p,a)$ олдуғуна көрә c елементи p вә a-ны бөлүр. p садә елемент олдуғуна көрә ја $c|1$, ја да c вә p ассосиривләнән елементләрдир, јә'ни $p|c$ вә $c|p$. Икинҹи һалда $c|a$-дан чыхыр ки, $p|a$. Бу исә шәртә зиддир. Демәли $(c)=(1)$ вә она көрә дә $(p,a)=(1)$.

Теорем 2: Фәрз едәк ки, K баш идеаллар һалгасы, p исә онун садә елементидир. Әкәр һәр һансы $a,b\in K$ елементләри үчүн $p|ab$, онда p елементи a вә b елементләриндән һеч олмаса бирини бөлүр.

Исбаты: Әкәр $p\nmid a$, онда $(p,a)=(1)$. (p,a) идеалынын тә'рифинә әсасән елә $u,v\in K$ елементләри вар ки, $up+va=1$. Бу бәрабәрлијин һәр тәрәфини b-јә вураг. $upb+vab=b$. Бурадан чыхыр ки, әкәр $p|ab$, онда $p|upb+vab$ вә $p|b$, демәли әкәр $p\nmid a$, онда $p|b$.

Ријази индуксија усулу иле ашағыдакы теореми де исбат етмек олар.

<u>Теорем 3:</u> Фәрз едек ки, p елементи K баш идеаллар һалгасынын садә елементи, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ исә ихтијари елементләридир. Әкәр $p \mid a_1 a_2 \ldots a_n$, онда p елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n$ елементләриндән һеч олмаса бирини бөлүр.

<u>Тә"риф 2:</u> Ашағыдакы шәртләр өдәндикдә дејирләр ки, K тамлыг областынын a елементи јеҝанә гајдада садә вуругларa ајрылыр:

1) Елә $p_i \in K$ $(i = \overline{1,m})$ садә елементләр вар ки,

$$a = \prod_{i=1}^{m} p_i ;$$

2) Әкәр $a = \prod_{i=1}^{n} q_i$ белә ки, q_i $(i=\overline{1,n})$ - садә елементләрдир, онда $m=n$, p_i вә q_i $(i=\overline{1,m})$ ассосиирләнән елементләрдир.

<u>Теорем:</u> Баш идеаллар һалгасынын һәр бир сыфырдан фәргли тәрс олмајан елементи јеҝанә гајдада садә вуругларa ајрылыр.

Бу теоремин исбаты мүхтәлиф әдәбијјатларда верилмишдир.(бах: [7] с 450)

§ 7. ЕВКЛИД һАЛГАЛАРЫ.

<u>Тә"риф:</u> K - тамлыг областынын N - натурал әдәдләр чохлуғуна ашағыдакы шәртләри өдәјән h ин"икасы варса K -ја евклид һалгасы дејилир:

1) K -нын ихтијари $a, b \neq 0$ елементләри үчүн онун елә q, r елементләри вар ки, $a = bq + r$ вә $h(r) < h(b)$.

2) Ихтијари $a \in K$ елементи үчүн $h(a) = 0$ мүнасибәти онда вә јалныз онда доғру олур ки, $a = 0$ олсун.

<u>Мисаллар: 1.</u> Фәрз едек ки, $\mathbb{Z}$ -там әдәдләр һалгасыдыр. Ихтијари $a \in \mathbb{Z}$ үчүн $h(a) = |a|$ ҝөтүрек. $\mathbb{Z}$ -дә галыглы бөлмә теоремине әсасән h ин"икасы 1), 2) шәртләрини өдәјир.

2. $\mathbb{Z}[i] = \langle \{m + ni \mid m, n \in \mathbb{Z}\}; +, \cdot \rangle$ - там гаусс әдәдләри һалгасынын евклид һалгасы олдуғуну ҝөстәрек. $a = m + ni$ елементи

үчүн $h(a) = |a|^2 = m^2 + n^2$ гәбул едек. $\forall a, b \in \mathbb{Z}[i]$ вә $b \neq 0$ елементләри үчүн $\frac{a}{b} = \sigma + \tau i$ гәбул едек, белә ки, $\sigma, \tau \in \mathbb{Q}$ -расионал әдәдләрдир. Онда елә s, t там әдәдләри вар ки,

$$|s - \sigma| \leq \tfrac{1}{2}, \quad |t - \tau| \leq \tfrac{1}{2}.$$

$\alpha = \sigma - s$, $\beta = \tau - t$ гәбул едек. Онда

$$a = b(s + \alpha + (t + \beta)i) = bq + r$$

белә ки, $q = s + ti$, $r = b(\alpha + \beta i)$. Ајдындыр ки,

$q = s + ti \in \mathbb{Z}[i]$ вә $r = a - bq \in \mathbb{Z}[i]$. Бундан әләвә

$$h(r) = |r|^2 = |b|^2(\alpha^2 + \beta^2) \leq \tfrac{1}{2}|b|^2 = \tfrac{1}{2} h(b).$$

Демәли, там гаусс әдәдләри һалгасы евклид һалгасыдыр.

<u>Теорем 1:</u> Евклид һалгасы баш идеаллар һалгасыдыр.

<u>Исбаты:</u> Фәрз едек ки, K - евклид һалгасы, $h: K \longrightarrow N$ исә 1), 2) шәртләрини өдәјән ин"икасдыр. Сыфыр идеал баш идеалдыр.

Фәрз едек ки, $M \subseteq K$ сыфырдан фәргли идеалдыр. $M \setminus \{0\}$ бош олмадығына ҝөрә $h(M \setminus \{0\}) \subseteq N \setminus \{0\}$ бош олмајан алт чохлуғдур. $h(M \setminus \{0\})$ -ун ән кичик елементини $h(b)$ илә ишарә едек. Исбат едек ки, $M = (b)$.

Ихтијари $a \in M \setminus \{0\}$ елементи ҝөтүрек. Онда елә $q, r \in K$ елементләри вар ки,

$$a = bq + r; \quad h(r) < h(b).$$

M - идеал олдуғуна вә $a, b \in M$ олдуғуна ҝөрә $r = a - bq \in M$. $h(b) \in h(M \setminus \{0\})$ ән кичик елемент олдуғуна ҝөрә, әкәр $h(r) \in h(M \setminus \{0\})$ олса, онда $h(b) \leq h(r)$ оларды. Одур ки, $h(r) \notin h(M \setminus \{0\})$. Одур ки, $r \notin M \setminus \{0\}$. Биз алдыг ки, $r \in M$ вә $r \notin M \setminus \{0\}$. Демәли, $r = 0$ вә $a = bq$. Бу исә ҝөстәрир ки, $M = (b)$.

<u>Нәтиҹә:</u> Евклид һалгасы факториал һалгадыр.

ӘДӘБИЈЈАТ:

I. Б.Л.ван дер Варден "Алгебра", М. "Наука" - I976г.

2. Курош А.Г. "Курс высшей алгебры". М."Наука".I97I

3. Курош А.Г. "Теория групп". М."Наука" I974

4. Мальцев А.И. "Основы линейной алгебры" М."Наука" I970

5. Окунев Л.Я. "Высшая алгебра". М."Просвещение" I966

6. А.И.Кострикин "Введение в алгебру" М."Наука" I977

7. Куликов Л.Л. "Алгебра и теория чисел". "Наука"

8.Гельфанд И.М. "Лекции по линейной алгебре" "Наука" I97I.

9.Чавадов М.һ.,Еjјубов Р.Ә.,Әфендијев Ф.һ. "Чәбр вә әдәдләр нәзәријјәси" I һ. АПИ-нәшријјаты,I989.

IО.Чавадов М.һ.,Еjјубов Р.Ә.,Әфәндијев Ф.һ. "Чәбр вә әдәдләр нәзәријјәси" II һис. АПИ-нәшријјаты - I99I.

II.Чавадов М.һ.,Абдулкеримов Л.Ш.,Бахшәлијев Ј.Р. "Чәбр вә әдәдләр нәзәријјәси" III һис. АДПУ-нун нәшријјаты-I993.

МҮНДӘРИЧАТ

Чапа имзаланмыш 26.05.1995-ҹи ил.
Кағыз форматы 60х84 1/16. Чап вəрəги 5.
Сифариш 351. Сайы 100. Гијмəти 30000 ман.
Н. Туси адына АДПУ-нун мəтбəəси.
Бакы, У. Һаҹыбəјов күчəси, 34.

2000 ман.