

Ə.A.Quliyev

**X-XI SİNİFLƏRDƏ CƏBR VƏ
ANALİZİN BAŞLANĞICI**

BAKI-2014

Elmi redaktor:

Qurbanov V.M.

Fizika-riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor

Rəy verənlər:

Əliyev Ə.B.

Fizika-riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor

Mərdanov İ.C.

Fizika-riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor

Adıgözəlov A.S.

Pedaqoji elmlər üzrə doktor, professor

Ə.A.Quliyev. X-XI siniflərdə cəbr və analizin başlanğıcı. Bakı: «Elm» nəşriyyatı, 2014. 416 s.

ISBN 978-9952-495-37-9

Kitabda X-XI siniflərin cəbr və analizin başlanğıcı kursunun əsas mövzularının, onların tətbiqlərinin öyrənilməsi metodikası şərh olunur və bu fənnin yekunlaşdırılması, öyrənilənlərin möhkəmləndirilməsi, habelə sistemləşdirilməsində istifadə etmək üçün 500-ə yaxın məqsədəuyğun, düşündürücü məsələ, misallar araşdırılır.

Kitab orta məktəb şagirdləri, müəllimləri, abituriyentlər, ali məktəbin bakalavr və magistr pillələrinin tələbələri, yuxarı siniflərdə cəbr və analizin başlanğıcının tədrisini və şagirdlərin əqli fəaliyyətini inkişaf etdirməklə maraqlanan tədqiqatçı metodistlər üçün maraqlı və münasibdir.

© «Elm» nəşriyyatı, 2014

Giriş

Elm və texnikanın müasir inkişaf səviyyəsinə uyğun olaraq riyaziyyatın o, cümlədən cəbr və analizin başlanğıcının məktəbdə öyrənilməsinin metodik sisteminin qarşılıqlı əlaqədar problemlərinin həllində ümumiləşdirmə adlanan təfəkkür əməliyyatı xüsusi yer tutur. İnformasiya cəmiyyətinin müasir inkişaf mərhələsində onun qarşısına qoyulan əsas vəzifələrdən biri məktəb təlimin XXI əsrin elmi-texniki nailiyyətlərinə uyğunlaşdırmaqdan ibarətdir. Bu məsələni müvəffəqiyyətlə həll etməyin əsas bir yolu da riyazi fənlərin tədrisi prosesində şagirdlərin ümumiləşdirmə, xüsusiyləşdirmə, ümumiyyətlə elmi-məntiqi qabiliyyətlərini didaktik prinsiplərə əsaslanaraq inkişaf etdirməkdir.

X-XI siniflərin cəbr və analizin başlanğıcı kursu bütövlükdə məktəb riyaziyyatının üzvü hissəsi olub onun ayrı-ayrı mövzularının əlaqələndirilməsi və əsaslandırılmasında mühüm yer tutur. Odur ki, onun qurulmasına verilən əsas tələb bir tərəfdən I-IX siniflərdə riyaziyyatın öyrənilməsi zamanı həyata keçirilən ideyaların davamı və inkişaf etdirilməsi, digər tərəfdən isə orta siniflərdə planimetriyanın, yuxarı siniflərdə isə stereometriyanın nəzəri-praktik məsələlərinin həllində analitik-sintetik hesablamaların tətbiqlərini göstərməkdən ibarət vahid ideya əsasında məzmunu və dərk etmə metodunu müəyyənləşdirməkdir. Məktəb cəbr və analizin başlanğıcı kursunun əsas mövzularının öyrənilməsi metodikasına həsr edilmiş bu vəsait dörd fəsildən ibarətdir.

I fəsildə cəbr və analizin başlanğıcı kursunun məktəbdə öyrənilməsinin məqsədi, onun məzmununun əsas xətlərinin öyrənilməsi xüsusiyyətləri, toplama düsturlarının, qüvvət və üstlü funksiyaların, informatikada kəmiyyət anlayışının genişləndirilməsinin, Fermanın kiçik teoreminin, eyniçevirmələrin, funksiyalar arasında məsafənin, Bezu teoreminin, Kompleks ədədlərin, ən sadə sıraların, ədədlərin toplananların ayrılmasının, triqonometrik bərabərsizliklərin və tənliklərin, iki ekvivalent bərabərsizliyin, limit və kəsilməzliyin, törəmə, inteqral və onların tətbiqlərinin, ən sadə diferensial, funksional və fərqlər tənliklərinin öyrənilməsinin metodik xüsusiyyətləri, bunlarla əlaqədar şagirdlərin ümumiləşdirmə qabiliyyətinin inkişaf şərh olunur.

II fəsildə cəbr və analizin başlanğıcının yekun təkrarı üçün 500-ə yaxın məsələ, misal təklif olunur, III fəsildə onların müfəssəl təhlili verilir, IV fəsildə isə riyazi analiz elementlərinin məktəbdə öyrənilməsinin metodik problemlərinə müəllimlərin diqqəti cəlb edilir. Vəsaitə

o qədər də standart olmayan, şagirdlərin ümumiləşdirmə və xüsusişdirmə qabiliyyətlərinin inkişafına kömək edən cəbr və analizin başlanğıcına aid olan məsələ və misallar daxil edilmişdir. Həlləri ilə verilən belə məsələ və misallardan ali məktəblərə qəbul imtahanlarına hazırlaşanlar istifadə edə bilərlər. Bunu özünü yoxlamada, habelə unudulanları bərpa etməkdə mühüm vasitə hesab edirik. Lakin oxucular özünü sınamaq məqsədilə təqdim olunan məsələ və misalların müstəqil həllinə cəhd göstərməli, yalnız bundan sonra həll və cavablara müraciət etmək yaxşı olar.

Beləliklə, gənclər cəbr və analizin başlanğıcından məsələ və misalları burada göstərilənlərdən fərqli, özlərinə məxsus, bəzən də daha səmərəli üsullarla həll edə bilərlər. Bu vəsaitlə yanaşı, onun sonunda göstərilmiş ədəbiyyatda da istifadə etməklə cəbr və analizin başlanğıcından məsələ və misalların həllində müəyyən vərdiş, habelə bacarığa nail olmaq mümkündür.

Məzunlar bu vəsaitdən istifadə etməklə buraxılış, həmçinin test üsulu ilə orta ixtisas və ali məktəblərə qəbul imtahanlarına hazırlıq prosesində cəbr və analizin başlanğıcını yenidən öyrənə, habelə bu barədə özünü yoxlaya bilərlər. Son illərdə bəzi xarici ölkələrin ali məktəblərində qəbul imtahanı zamanı cəbr və analizin başlanğıcından təklif edilmiş bir sıra məsələ və misallar da bu vəsaitə daxil edilmişdir. Çalışmalar orta məktəbin cəbr və analizin başlanğıcı kursunun proqramını demək olar ki, əhatə edir. Habelə ölkəmizdə ümumi təhsil sisteminə aparılan islahatların tələblərinin yerinə yetirilməsi, yeni fənn kurikulumlarının həyata keçirilməsi, xüsusi halda cəbr və analizin başlanğıcı fəninin öyrənilməsinin metodik sisteminin təkmilləşdirilməsi üçün faydalıdır. Kitabdakı nəzəri və praktik materialı şüurlu mənimsədiyiniz və təqdim etdiyimiz məsələləri müstəqil həll edə bildiyiniz halda hər hansı şəraitdə cəbr və analizin başlanğıcı ilə əlaqədar məsələlər və misallar həllində müvəffəqiyyət qazanacağımıza əvvəlcədən təminat vermək olar.

Təlim prosesində ümumiləşdirmə və xüsusişdirmə şagirdlərin riyazi qabiliyyətinin yüksəldilməsində sistemləşdirici məntiqi əməliyyatdır, habelə tədris metodudur. Vəsaitdə verilən nəzəri və məsələ materialı həmin idrak əməliyyatından düzgün istifadə etmək və bununla da cəbr və analizin başlanğıcını daha dərinlən öyrənmək üçün olduqca faydalıdır. Şagirdlərin yaradıcı fəaliyyətinin inkişafında məsələlərin mühüm rolu vardır. Bu fikir mövcud metodik ədəbiyyatda və məqa-

lələrdə kifayət qədər geniş təhlil olunur və müəllimin şagirdlərlə məsələnin şərti üzərində (şərtin qısa yazılışı, bununla əlaqədar şəkillərdən və ya sxemlərdən istifadə) necə işləməsinə dair tövsiyələr verilir. Lakin yenə də şagirdlərin təqdim olunan məsələni, kənardan azacıq göstərişlə, müstəqil həlli bacarıqlarını təmin etmək üzərində düşünməyə ehtiyac vardır. Öz faydalı qeydləri və təkliflərilə vəsaitin daha da təkmilləşdirilməsinə kömək edəcək, xeyirxah oxuculara qabaqcadan minnətdarlığımızı bildiririk.

“Həyat iki şeylə zinətlənir: Riyaziyyat və onun tədrisi ilə məşğul olmaqla”

S.D.Puasson

I FƏSİL.

X-XI siniflərdə cəbr və analizin başlanğıcı

1.1a. Riyaziyyat və onun tədrisi metodikasına dair.

İnsan fəaliyyətinin (hüquqşünaslıq, iqtisadiyyat, geologiya, dilçilik, tibb, təbiətşünaslıq və s.) dəqiq ifadə olunmayan və düzgün təfəkkürsüz keçinmək mümkün olan sahəsi yoxdur. Düzgün, dəqiq fikirləşməyi isə yalnız zehni çətinliklərə üstün gəlməklə, məsələlər həll etməklə, müxtəlif növ hökmlərin isbatını düşünməklə, ümumiləşdirici mücərrədləşmələr aparmaqla öyrənmək mümkündür.

Ağlın, idrakın bu xüsusiyyəti ixtiyarı yaradıcılıqda lazımdır. Görkəmli ingilis filosofu və təbiətşünası Radjev Bekonun hələ 1267-ci ildə deyib ki, “Riyaziyyatı bilməyən digər elmlərin heç birisini bilməz, hətta özünün biliksizliyini də müəyyən edə bilməz”. Bəs riyaziyyat bəşəriyyətə nə üçün lazımdır? Bu suala cavab vermək üçün çox vaxt Qalileyin “Təbiət kitabı riyazi dildə yazılmışdır” sözləri sitat gətirilir və yəqin ki, riyaziyyatın bəşəriyyət qarşısındakı xidməti də bundan ibarətdir.

Riyazi təlim şəxsiyyətə nə verə bilər?

Riyaziyyatın ayrı-ayrı şəxslər üçün əhəmiyyəti haqqında 1956-cı ildə Cenevrədə YUNESKO-nun himayəsi altında keçirilən XIX Beynəlxalq Konfransın xalq maarif nazirlərinə tövsiyələrində olduqca önəmli sözlər deyilmişdir: “Riyaziyyat və ona xas olan təfəkkür tərzinə müasir adamın, o, dəqiq elmlər və ya texnika sahəsində fəaliyyətlə məşğul deyilsə belə, ümumi mədəniyyətinin mühüm elementi kimi baxmaq lazımdır; riyazi-təlim şagirdləri riyaziyyatın elm və fəlsəfi konsepsiyalarda rolunu başa düşməyə yönəltməlidir”. Bədən tərbiyəsi fiziki sağlamlığa xidmət etdiyi kimi, riyaziyyat da şəxsiyyətin zehni imkanlarını inkişaf etdirir. Riyaziyyat isbatlara əsaslanır, odur ki, şəxsiyyət onun köməyi ilə şeylərin mahiyyətini anlayır və müstəqil düşünmə qabiliyyətinə malik olur.

Məktəbdə riyaziyyatın tədrisinin mahiyyətinə və məqsədinə müxtəlif ardıcılıqda olmaqla aşağıdakılar daxil ola bilər:

1. Təhsili davam etdirməyə hazırlıq;
2. Gələcək peşəyə hazırlıq;

3. Zehni inkişaf;
4. Dünyagörüşün formalaşdırılması;
5. Ətraf aləmə bələdlilik;
6. Tədqiqatçılığa maraq oyatmaq;
7. Dünya (kainat) qanunlarını başa düşmək

Ayrı-ayrı adamlar bu fikirləri müxtəlif ardıcılıqda düzə bilər, hazırda birinci yerdə daha çox zehni inkişaf durur, xarici ölkələrin çoxunda isə gələcək peşəyə hazırlığa üstünlük verilir, yəni peşələrə hazırlanma birinci yerə qoyulur.

Bu problemlərin müzakirəsinə keçməzdən əvvəl riyaziyyatın özü haqqında mühakimə aparaq. Keçən əsrin böyük riyaziyyatçılarından biri İzrail Moiseviç Qelfonal (1913-2009) 15 yaşında analizə aid adi bir dərsləklə tanış olana qədər belə hesab etmişdir ki, iki müxtəlif riyaziyyat vardır; cəbr və həndəsə. O, yeni tanış olduğu kitabda Makloren düsturunu (bu düsturda funksiya sıra şəklində göstərilir) görəndə anlayır ki, bu elmlər arasında elə də ciddi fərq yoxdur. O yazır: “Riyaziyyat mənim qarşımda vahid şəkildə göründü. Həmin vaxtdan etibarən mən başa düşdüm ki, riyaziyyatın müxtəlif bölmələri riyazi fizika ilə birlikdə tam vahidlik əmələ gətirir”. N. Burbakinin “Riyaziyyatın elementləri” adlı silsilə əsərlərində də vahid riyaziyyatdan söhbət gedir.

Vahid riyaziyyat nəyi öyrənir və nə ilə məşğul olur?

Riyaziyyat- texnikanın, iqtisadiyyatın və təbiətinin dilidir; bunun üçün hər bir dil kimi onun öz quruluşu, “söz ehtiyatı” və “qrammatikası” vardır. Lakin onun habelə özünün “estetikası”, gözəlliyi var və çox vaxt riyaziyyat tətbiq edilməklə əlaqədar olmayan məsələləri həll edir.

Əvvəllər hamı praktikanın məqsədəuyğunluğunu izah etməyə çalışırdı. Həndəsə dərsləkləri belə sözlərlə başlayırdı: “Həndəsə yunan dilindən tərcümədə “yer ölçmə” deməkdir. O, Nilin deltasında torpaq sahələrinin ölçmək zərurətindən yaranmışdır” və s. Hazırkı dərsləklərdə də bu sözlərə təsadüf olunur. Məsələn, “Həndəsə - 7” dərsliyində oxuyuruq: “Həndəsə elmi qədim Misirdə torpaq sahələrini ölçmək zərurətindən meydana gəlmişdir” (səh 3, Bakı-2003).

Lakin Afina akademiyasının yaradıcısı Platonun müəllimi olan Sokratın Hippokratla riyaziyyatın mahiyyəti, tədqiqat predmeti, anlayışlarının necə yaranması və s. haqqında dialoqundan aydın görünür ki, bu elmin əsas xüsusiyyətləri hələ Qədim Yunanıstanda dərk olunmuş və qurulması istiqamətləri göstərilmişdir. Hətta riyaziyyatın öyrənilməsi metodunun əsası da adıçəkilən dialoqda qoyulmuşdur. Sokrat özü

haqqında təlimin ən yüksək metodlarından biri olan evristik müsahibə metodunu kəşf etmiş məharətli müəllim xatirəsinin yaratmışdır. F.En-gelsin məşur materialist adlanan tərifinə qarşı qoyulan B.Rasslin (1872-1970) idealist adlanan “Riyaziyyat – nə haqqında danışdığımızı, nə haqqında danışırıqsa, onun doğruluğunu heç zaman bilmədiyimiz elmdir” tərifində də riyaziyyatın mahiyyətinə yaxınlaşma vardır.

Göründüyü kimi, riyaziyyat yarandığı gündən dərhal ikilik meydana gəlmişdir: elmimizin inkişafını praktik və estetik səbəblər stimullaşdırır (həvəs yaradır).

XIX əsrdə iki görkəmli alim – Furiye və Yakobi arasında riyaziyyatda həm də təbiətşünaslıqda diqqəti çəkən iz qoymuş mübahisə olmuşdur. Furiye belə hesab edirdi ki, riyaziyyat – təbiətin təsvir edilməsinə xidmət etməlidir, Yakobi isə ona etiraz edərək deyirdi ki, riyaziyyat – görkəmli, tanınmış insan ağına xidmət edir. Riyaziyyatçıların bəziləri Furiyenin, digərləri isə Yakobinin fikrini müdafiə edir. Hər iki nöqteyi-nəzərdə həqiqət vardır: Riyaziyyatın yaranması və inkişaf etməsində praktikanın və onun daxili tələbatlarının rolu olmuşdur.

Deməli, riyaziyyat nəyi isə izah edir, öz-özlüyündə gözəldir və insan dərrakəsini gücləndirərək onu şöhrətləndirir. Furiyenin fikrincə, riyaziyyatın nəzəriyyəsi və metodları texnikaya, iqtisadiyyata, təbiətşünaslığa tətbiq olunur.

Məsələn, inşaatda və konstruktlaşdırmada statistik hadisələri izah etmək üçün riyaziyyat bir və ya çoxdəyişənli xətti və xətti olmayan tənlikləri həll edir. Təyyarənin və ya raketin uçması tipdə dinamik hadisələri təsvir etmək üçün diferensial tənlikləri həll etmək lazım gəlir. Dünyanın quruluşunu başa düşmək üçün bəşəriyyətin ən yüksək zehni nailiyyəti olan riyazi analiz yaradılmışdır. Məktəbdə də bu haqda danışmaq lazımdır. Tənliklər həlli ilə əlaqədar ədədlər haqqında şagirdlərə məlumat verilməlidir. Ədədləri natural, tam, rəşional, həqiqi, kompleks və onlar üzərində əməlləri şagirdlər lazımi səviyyədə öyrənməlidirlər. Müxtəlif prosesləri öyrənmək üçün funksiya, limit, kəsilməzlik, diferensial və inteqral hesabı ilə tanış olmaq lazımdır. Bütün tətbiqlərdə - zamanı, uzunluğu, sahəni, həcmi, sürəti ölçmək, onlar üzərində əməliyyat aparmaq lazım gəlir.

Ümumiyyətlə, çoxluq ədəd, funksiya, kəmiyyət, fiqur, tənlik, bərabərsizlik, onların sistemləri, limit, diferensial və inteqral hesabının elementləri – riyaziyyatın əsas anlayışları kimi həyatın bütün sahələrində tətbiq olunur. Odur ki, bu təlimdə də nəzərə alınmalıdır. Riyaziyyatın

strukturlar və onların modelləri əsasında ümumiləşdirilmiş mücərrədlikləri öyrəndiyi dərk olunmalıdır.

Yuxarıda iqtibas gətirdiyimiz Cenevrə qətnaməsinin birinci cümləsi belədir: “Riyazi təhsil milliyətindən, cinsindən, vəziyyətindən və fəaliyyətindən asılı olmayaraq hər bir insanın səadətidir”.

Bu tezis cəmiyyət, dövlət və şəxsiyyət səviyyəsində dərk edilərək həyata keçirilməlidir. Hər bir şəxs başa düşməlidir ki, riyazi təlim xoşbəxtlikdir. İnsan ondan tam istifadə etməyə bilər, lakin bu həqiqətən səadət olduğundan hər bir şəxsin bunu başa düşməsinə kömək etmək lazımdır. Bunu valideynlər, müəllimlər və dövlət özü etməlidir. Həmin qətnamədə deyilir: “Riyaziyyat müəllimi – müasir cəmiyyətdə ona elmi təhsil və tərbiyə etmək vəzifəsi hüququnu verən hörmət və mövqeyindən istifadə etməlidir”. Ümumiyyətlə, ibtidai təlimdə iki açar fənn olmalıdır: bir tərəfdən ana dili və ədəbiyyatı, digər tərəfdən isə təbiətşünaslığın, texnikanın və iqtisadiyyatın dili olan riyaziyyat və ona aid olan isbat etmək prinsipi isə şeylərin mahiyyətini anlamağa kömək edir.

Lakin heç də həmişə təlimdə riyaziyyatın əhəmiyyəti başa düşülmür. Bertrana Russellin (1872-1970) öz dövrü üçün aktual olan bu fikrinə diqqət edək: “Biz zehnin və müstəqil fikrin inkişafında təhsilin başlıca mane olduğu hazırkı vaxtda paradoksal vəziyyətlə qarşılaşırıq... Deyilir ki, təhsil – bilik vermək və müstəqil düşünmək qabiliyyətini inkişaf etdirməkdən ibarət iki vəzifəni yerinə yetirməlidir. Biliyin lehinə nəzəriyyə və praktika qəbul edilir, intellektin lehinə isə yalnız nəzəriyyə qəbul olunur. Çünki müstəqil düşünən insanlar arzu edilən təsir altına asanlıqla düşümlər və inzibati çətinliklərin mənbəyi olurlar”. Bəşəriyyət isə başa düşür ki, riyazi təhsil səadətdir. Odur ki, konqreslərin, beynəlxalq elmi mərkəzlərin, mükafatların və s. təşkilinə vəsait ayırmaq lazımdır ki, bəşəriyyətin malı olan, bütün elmlərin inkişafına səbəb riyazi təlim səadətindən hamı bəhrələnsin.

Son illərdə çox şey dəyişmişdir. Hazırda ölkəmizdə və dünyada əsrin son dördüdə birindəki köklü dəyişiklikləri nəzərə almamaq mümkün deyil.

Bu dəyişikliklər nədən ibarətdir? Bunlardan üçü xüsusilə diqqəti cəlb edir: dövlət quruluşu, gənclərin mentallığının dəyişməsi və informasiya axınının son dərəcə güclənməsi.

Yeni quruluşda işlə təminətməyə, məzunların təyinatı məsələsinə, peşə məşğulluğunun planlaşdırılmasına daha diqqətlə yanaşmaq lazım gəlir. Bununla əlaqədar olaraq şəxsiyyətə müxtəlif bilik sahələrində yaradıcı fəaliyyətə daxil olmaq imkanı yaratmaq üçün riyazi təlimdə

başlıcanı, daha mühüm olanları ayırmaq əsas vəzifə kimi qarşıda durmalıdır. Təlimdə illərdən bəri sınaqdan keçmiş və müvəffəqiyyət qazanmış didaktik prinsiplərə riayət etmək lazımdır.

Son illər məktəblilərin müəyyən hissəsi fərdi hazırlığa üstünlük verərək məktəb məşğələlərində qismən və ya tamamilə iştirak etmirlər. Bu da məktəbdə nizam intizamın və sinif şəraitində kollektiv təlimin pozulmasına səbəb olur. Bununla əlaqədar olaraq ilk növbədə şagirdlərin müstəqil fəaliyyətlərini gücləndirmək məqsədilə müvafiq tədbirlər görmək, təlimdə məktəbin rolunu gücləndirmək faydalı olardı.

Pedaqoji universitetlərdə və institutlarda riyaziyyat müəllimləri və ümumiyyətlə, riyaziyyat üzrə kadrların tələb olunan səviyyədə hazırlıqlarını təmin etmək məqsədilə kafedralarda müəyyən dəyişiklik etməyi lazım bilirik. Hazırda məktəb riyaziyyat kursu ali riyaziyyatın elementləri hesabına xeyli genişlənərək zənginləşmişdir. Gələcəkdə qabaqcıl ölkələrdə olduğu kimi, bizim məktəblərdə də təhsilin 12 illik olması, məktəb riyaziyyat kursuna ali riyaziyyatdan başqa digər materialın da daxil olması gözlənilir. Odur ki, gələcəkdə pedaqoji universitetlərdə və institutlarda Cəbr və onun tədrisi metodikası, Həndəsə və onun tədrisi metodikası, İnformatika və onun tədrisi metodikası və s. adlı kafedraların yaradılması və riyazi kadrların bu istiqamətlər üzrə hazırlanması məqsəduyğun olardı.

Bütün elmlər – riyazi, təbiətşünaslıq və humanitar olmaqla üç qrupa bölünür. Deməli, riyaziyyat elmlər sırasında xüsusi yer tutur, onu nə humanitar, nə də təbiət elmlərinə aid etmək olmaz.

Görkəmli alman alimi Qaus (1777-1855) demişdir: “Riyaziyyat – elmlərin şahıdır”. Lakin indi başa düşürük ki, o, aləmdə daha fəxri yer tutur. O, bütün elmlərə xidmət edir. Belə də demək olar: riyaziyyat bütün elmlərin xidmətçisidir. Bundan əlavə, riyaziyyat – o xidmətçidir ki, onsuz elm ola bilməz, çünki bu və ya digər fənnin elmilik səviyyəsi ona tətbiq edilən riyazi mühakimənin, bu fənn üçün deduktiv nəticələrin dərinliyi və məzmunluğunun həcmi ilə ölçülür.

Təlimin ilk mərhələsindən başlayaraq təmiz riyaziyyatın mahiyyətini onu öyrənənlərə tədricən anlatmaq lazımdır. Bu, onların həmin fənnə olan marağını daha da artırır. Şagirdlərdə riyaziyyatın strukturlar və onların modelləri əsasında ümumiləşdirici mücərrəd aləmi öyrəndiyini və digər elmlərin inkişafında mühüm yer tutduğunu dərk etmək imkanı olmalıdır. Bu, həm də riyaziyyatın mahiyyətini başa düşmək əsasında şagirdlərdə ümumiləşdirici təfəkkürün inkişaf etdirilməsi üçün zəruridir.

1.1b. Bu kursun məktəbdə öyrənilməsinin məqsədi cəbrin 9 illik məktəbdə başlanmış məzmunlu xəttini tamamlamaq və şagirdləri riyazi analizin, funksiyanın araşdırılması və həndəsi, fiziki, digər praktik məsələlərin həlli aparatı kimi elementləri ilə tanış etməkdir. Təlimin orta məktəbdə tamamlanması ilə əlaqədar olaraq məqsədəuyğun təkrarlar əsasında şagirdlərin 9-illik məktəbdə cəbr kursunun öyrənilməsi zamanı aldıkları bilikləri ümumiləşdirmək, bacarıq və vərdişlərini möhkəmləndirmək məqsədini yerinə yetirmək nəzərdə tutulur. Kursun öyrənilməsi gedişində şagirdlər ədəd haqqında məlumatlarını genişləndirməli, qüvvət, üstlü, loqarifmik və triqonometrik funksiyaların daxil edilməsilə öyrənilmiş funksiya sinfini genişləndirməli, əsas elementar funksiya haqqında alınmış məlumatları sistemləşdirməli və tamamlamalıdır. Cəbr və analizin başlanğıcı kursunda əsas elementar funksiya habelə analiz aparatını tətbiq etməklə sistemə obyekt olmalıdır. Bu məktəb riyaziyyatı kursunun praktik tətbiqi imkanlarını əsaslı surətdə gücləndirməlidir. Funksional xəttin inkişafı differensial hesabı elementlərinin öyrənilməsilə yekunlaşır:

Şagirdlər, üstlü, loqarifmik və triqonometrik ifadələrin eyni çevrilməsini və bunların məsələ həllinə tətbiqlərini mənimsəməlidirlər. Əsas eyniliklərin müxtəlif növ məsələlər həlli zamanı (tənliklər, bərabərsizliklər və onların sisteminin həlli, törəmənin tapılması, triqonometriyanın tətbiqilə həndəsə məsələlərin həlli) inamla tətbiqi səviyyədə mənimsənilməsinə nail olmaq lazımdır. Elementar funksiyaları araşdırmaq və ən sadə həndəsi, fiziki və digər praktik məsələləri həll etmək imkanı həcmində riyazi analizin əsas anlayışları, nəticələri və metodları ilə tanış olmaq, mürəkkəb olmayan transendent tənliklər, bərabərsizliklər və onların sistemini həll etməyi və məktəbdə öyrənilən funksiyalardan istifadə etməklə onları tərtib etməyi öyrənmək şagirdlərin əvvəllər aldıkları uyğun biliklərin genişləndirilməsi və sistemləşdirilməsi məqsədilə də əhəmiyyətlidir.

Ümumiyyətlə, cəbr və analizin başlanğıcı kursunun öyrənilməsi ilə əlaqədar şagirdlərin ümumiləşdirmə, xüsusişdirmə, bacarıqlarının inkişafı və 9 – illik məktəbdə aldıkları biliklərin genişləndirilməsi və sistemləşdirilməsi, lazımı bacarıq və vərdişlərin möhkəmləndirilməsi üçün geniş imkanlar vardır.

Cəbr və analizin başlanğıcında ardıcıl olaraq ilk paragraflarda triqonometriya anlayışlarının ümumiləşdirilməsi işi başa çatır. Triqo-

nometrik funksiyalar ilə tanışlıq şagirdlərin funksiyalar sisteminin quruluşu haqqında olan təsəvvürlərini dərinləşdirir və genişləndirir.

Riyazi analizin başlanğıcı, kursun əsas hissəsini təşkil edir. Limit, törəmə, inteqral və onların tətbiqləri, kompleks ədədlər, kombinatorika elementləri, Bezu teoremi, riyazi induksiya metodu və s. Ümumiləşdirmə aparmaq baxımından maraqlıdır. Əsas məktəbdə limit haqqında məlumat olmadığından burada müstəvi fiqurların sahəsi anlayışı verilir, ona görə də, “inteqral” mövzusu öyrənilərkən istənilən müstəvi fiqurun sahəsi anlayışını dəqiqləşdirmək təbiidir. Bu kursda fəndaxili və fənlərarası əlaqənin yerinə yetirilməsi imkanlarının genişliyi müxtəlif ümumiləşdirmələr aparmaq üçün əhəmiyyətlidir.

1.2. Toplama düsturları (IX-XI). Ayrı-ayrı teorem və ya düsturların öyrənilməsi zamanı, onları daha ümumi şəkildə gətirmək üzərində şagirdləri düşündürmək faydalıdır. Bu məqsədlə hazırkı proqrama görə IX sinifdə öyrənilən iki arqument üçün toplama düsturlarının ümumiləşdirilməsi üzərində dayanacaq. Əvvəlcə iki arqument üçün toplama teoremlərinin müxtəlif isbatlarına diqqət edək. Bu teoremlərin ümumi isbatını vermək üçün ya koordinatlar metodundan, yaxud da proyeksiyalar nəzəriyyəsiindən istifadə edilir. [14] – də toplama teoremləri koordinat metodu ilə isbat edilir. Bundan sonra isə teoremin ümumiliyi əsaslandırılır. Triqonometriyadan bir çox dərslikdə toplama teoremlərin əvvəlcə iti bucaqlar üçün nisbətən sadə çıxarılışı təklif edilir. Sonra əlavə mühakimə aparmaqla alınmış düsturun ümumiliyi göstərilir. Bu isbatda üçbucaqların oxşarlığı əvəzində düzbucaqlı üçbucağın tərəfləri ilə bucaqları arasındakı asılılıqdan istifadə etməklə, bir qədər dəyişiklik aparmaq olar. Toplama teoremlərin ümumiliyini əsaslandırmağa aid bir çox kitablarda aparılan mühakimələr yorucu və çətindir. [23] –də iki bucaq fərqiinin kosinusunu teoremini isbat etmək

üçün şərhli sadələşdirmək məqsədi ilə bucaqlar (α və β) üzərinə aşağıdakı şərtlər qoyulur: 1) bucaqların hər bir müsbət və mütləq qiyməti 2π -dən kiçikdir; 2) $\alpha \geq \beta$; sonra iki bucaq fərqiinin kosinusunu düsturunun ümumiliyi ilə əlaqədar deyilir ki, izahatı sadələşdirmək üçün α, β bucaqlarının üzərinə qoyulmuş məhdudlaşdırmanı yada salmaq lazımdır. Bundan sonra düsturun ümumiliyi əsaslandırılır: α, β bucaqlarının müsbət olması tələbi əslində lazım deyil. Çünki, bu bucaqların hər birinin üzərinə 2π -nin misillərini əlavə etsək iki bucaq fərqiinin kosinusunu düsturuna heç bir xələl gəlməz. Eləcə də, həmin bucaqların hər birindən 2π -nin misillərini çıxmaq mümkündür. Odur ki,

$0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ hesab etmək olar. $\alpha \geq \beta$ şərti də olmaya bilər. Doğrudan da, $\alpha > \beta$ isə onda $\beta < \alpha$. Odur ki, $\cos \varphi$ funksiyasını nəzərə alsaq, $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha)$ yazarıq. Deməli $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ düsturu ixtiyari α , β bucaqları üçün doğrudur.

Şagirdlərdə ümumiləşdirmə qabiliyyətinin inkişafı üçün onları bu teoremin, habelə, iki bucaq fərqi $\cos$ -un ixtiyari α , β bucaqları üçün doğruluğunun daha ciddi aşağıdakı isabtı ilə də tanış etmək faydalıdır. Müvafiq cəbri çevrilmələrin köməyi ilə göstərmək olar ki, triqonometrik funksiyalara vektorlar vasitəsilə tərif verdikdə $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ ifadəsi

$\vec{a}, \vec{b}$ vektorları və onların cəmi $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ vektorunun modulundan

$$\text{asılıdır. Doğrudan da, } \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \cdot \frac{b_x}{|\vec{b}|} + \frac{a_y}{|\vec{a}|} \cdot \frac{b_y}{|\vec{b}|} =$$

$$= \frac{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 - (a_x^2 + a_y^2) - (b_x^2 + b_y^2)}{2|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{(\vec{c})^2 - (\vec{a})^2 - (\vec{b})^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|};$$

$$\text{Deməli } \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{(\vec{c})^2 - (\vec{a})^2 - (\vec{b})^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Göründüyü kimi alınmış bu bərabərliyi isbat etmək üçün triqonometrik funksiyaların tərifindən, cəm və toplanan vektorların koordinatları arasındakı asılılıqdan, vektorun modulu ilə onun koordinatları arasındakı

münasibətdən istifadə etdik. Bu bərabərlik göstərir ki, $\vec{a}, \vec{b}$ vek-

torlarının və onların cəminin $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ eyni zamanda dönməsi nəticəsində $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ ifadəsinin ədədi qiyməti dəyişmir. Be-

ləliklə, həmin ifadəni sadələşdirməkməqsədi ilə, $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarını eyni zamanda $-\beta$ bucağı qədər döndərmək olar. Onda

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) \cos 0^0 + \sin(\alpha - \beta) \sin 0^0 = \cos(\alpha - \beta) (1).$$

Vektorun modulunun onun koordinatlarından asılılıq düsturu vektorun ixtiyari vəziyyətindən doğru olduğundan izah etdiyimiz isbat ümumi xarakterlidir. (1)-də $\alpha = 0$ götürsək $\cos(-\beta) = \cos \beta$ alınır. Bilavasitə

ixtiyari bucağın sinusu və kosinusunun tərifindən $\sin \alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

alınır. $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ bərabərliyini cəbri olaraq isbat etmək

mümkündür. Yəni, $\sin(-\alpha) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$; İki bucaq

fərqlərin kosinusunu düsturundan istifadə etməklə iki arqument cəmi və fərqlərin qalan triqonometrik funksiyaları üçün düsturlar cəbri çevirmələrlə alınır. Bəzi ədəbiyyatda iki arqument fərqlərin kosinusunu düsturunun çıxarılması həndəsə kursunda baxılan iki vektorun skalyar hasilinin tərifinə və bu haqda teoremə əsaslanır. Buradakı xüsusi diqqət vermək lazım gələn əsas məsələ vektorlar arasındakı bucaq 0^0 ilə 180^0 arasında, $\alpha - \beta$ bucağı isə ixtiyari olduğundan, seçilmiş isbatda mühakimənin ümumiliyinin gözlənilməsidir. Burada vektorlar arasındakı bucağın $\alpha - \beta$, $2\pi - (\alpha - \beta)$ və ya bu qiymətlərdən dövrün tam sayı qədər fərqlənə bilməsi göstərilir. Bütün hallarda vektorlar arasındakı bucağın kosinusunun $(\alpha - \beta)$ - ın kosinusuna bərabər olduğu əsaslandırılır.

Toplama teoremləri ilə əlaqədar bu deyilənləri xatırladıqdan sonra iki arqument cəminin sinusu və kosinusunu düsturlarının ixtiyari sayda arqumentlər üçün doğru olması məsələsinə X-XI sinif şagirdlərinin diqqətini cəlb etmək məsləhətdir.

İxtiyari α və β arqumentləri üçün

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (C_2)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (S_2)$$

münasibətləri doğrudur. Həmin düsturlardan istifadə edərək üç arqument cəminin kosinusunu və sinusu düsturlarını yazaq.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta + \gamma) &= \sin[(\alpha + \beta) + \gamma] = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \\ &+ \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \end{aligned} \quad (S_3)$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos[(\alpha + \beta) + \gamma] = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \\ &- \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma\end{aligned}$$

(C₃)

İzahatımızı asanlaşdırmaq məqsədi ilə iki və üç arqument üçün toplama teoremlərini belə yazaq:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta (tg \alpha + tg \beta) \quad (S_2)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta (1 - tg \alpha tg \beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma (tg \alpha + tg \beta + tg \gamma - tg \alpha tg \beta tg \gamma) \quad (S_3')$$

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma [1 - (tg \alpha tg \beta + tg \alpha tg \gamma + tg \beta tg \gamma)] \quad (C_3')$$

Bu qanunauyğunluğun n arqument üçün doğruluğunu və bununla da toplama teoremlərinin ümumiləşdirilmiş formasını riyazi induksiya metodundan, yaxud triqonometrik şəkildə verilmiş kompleks ədədlərin hasilı qaydasından istifadə ilə isbat etmək olar.

1.3. Qüvvət və üstlü funksiyalar (VIII, XI). 0,001 addımlı adi antiloqarifmalar cədvəli mahiyyət etibarı ilə $q = \sqrt[100]{10}$ ortaq vuruqlu həndəsi silsilənin qiymətlər cədvəlidir. Belə cədvəldəki N ədədi özünün L loqarifmi ilə $N = q^{100L}$ (1) tənliyi ilə əlaqədardır.

Bunun loqarifması mində birin tam sayları ilə ifadə olunduğundan (1) düsturunda üst tam ədəddir. Beləliklə loqarifmlərin nəzəriyyəsi və təcrübəsi qüvvət anlayışının zəruri olaraq kəsr və ya irrasional üstlərlə ümumiləşdirilməsi ilə əlaqədar deyil. Şagirdlərə böyük kağız vərəqində koordinatları (L, N) olan min nöqtə göstərmək təklif edilərsə onda onlar $N = 10^L$ funksiyasının qrafikinə kəsilməzliyini aydın görə bilərlər. Bundan sonra $L = \lg N$ tərs funksiyasının qrafikinə və cədvəlinə baxmaqla loqarifmik hesablamaların bütün texnikasını izah etmək olar. İşə belə yanaşma loqarifmik hesablamalar texnikasının tarixən formalaşması gedişinə, üstlü və loqarifmik funksiyaların əvvəlki, daha dəqiq, riyazi göstərilməsinə uyğun ola bilərdi. Tədrisin məhz bu ardıcılıqda aparılmasını təkid etmirik, lakin kifayət qədər “sıx” ədədi və həndəsi silsilələrin müqayisəsi üstlü və loqarifmik funksiyaların əyani olaraq mənimsənilməsinin əsasıdır. Dərslikdə əlavə kimi $y = 2^x$ funksiyasının, əvvəl x-in tam, sonra isə $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ və s. addımla qiymətlərinə baxmaqla, qrafiki tədricən qurmaq məsləhətdir. Bununla kəsr üstlü

qüvvətlə üstlü funksiya əlaqələndirilir. Zənnimizcə qüvvətin kəsr üstünü $y = x^\alpha$ qüvvət funksiyasının α kəsr üstü ilə əlaqələndirmək məqsədəuyğun deyil. Bu funksiyanın nisbətən gec öyrənilməsinin, sonra göstərdiyimiz kimi, üstünlüyü vardır. Üstlü funksiya baxmaq isə kəsr üstün təyini və xassələrini başa düşmək üçün əyani əsasdır. Ümumiləşdirmədə əsasın deyil, üstün dəyişmə oblastı genişlənir. Bütün iş üstün dəyişməsi və əsasın sabitliyi ilə (tərsinə deyil) aparılır. Düzdür, $y = cx^n$ şəklində asılılığa təcrübədə çox təsadüf olunur. Lakin belə asılılığın qrafik öyrənilməsində loqarifmik setkada baxılır, bura düz xətti qrafikin meyli qüvvətin üstünü təyin etməyə imkan verir. Bu priyomun tətbiq edilmədiyi texnika sahəsi yoxdur. Bu da onu göstərir ki, üstlü funksiya və loqarifmi ixtiyari üstlü qüvvət funksiyasına baxana qədər öyrənmək məsləhətdir. İxtiyari dərəcəli köklərlə ilk tanışlıq zamanı yalnız natural üstlü $y = x^n$ funksiyasını və onun tərsini $y = \sqrt[n]{x}$ əvvəlcədən daxil etmək lazımdır. Üstün artması və azalması ideyasının müxtəlif tətbiqlərinə (radioaktiv parçalamadan inkişafda olan təsərrüfatın artma göstəricisinin qanunauyğunluğuna qədər) nisbətən daha trivial mühakimə ilə başladıq. Hazırkı proqrama görə mürəkkəb faiz haqda şagirdlərə müəyyən məlumat verilir, bəzən də o yalnız məsələ formada təqdim edilir. Mürəkkəb faizə aid məsələyə nisbətən, məhsulun ilk artımı neçə faiz olduqda on ildə iki dəfə artar məsələsinə daha çox fikir verilir. Düzdür burada həndəsi silsilə ilə ötürmək olar. Lakin həndəsi silsilənin şərhində üstlü funksiya gəlir. Üst artımının qrafik qanunauyğunluğu $y = ca^x$ funksiyasının qrafiki düzxətli olduqda yarım loqarifmik setkada öyrənilir. Loqarifmik və yarımloqarifmik setkaların çox geniş tətbiqləri vardır və geniş hədudda dəyişən kəmiyyətlərin dəyişmə gedişini əyani göstərməkdə əsas vasitədir. Bu deyilənlər həndəsi silsilədən sonra və ixtiyari üstlü qüvvət funksiyasına qədər üstlü və loqarifmik funksiyaların daxil edilməsinin zəruriliyini göstərir. Təklif etdiyimiz şərh variantı göstərir ki, kəsr üstlü qüvvətlə əvvəlcədən tanışlıq tələb olunmur, köklərlə əlaqədar lazımı vərdislər isə faydalı ola bilər.

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (2) tərifinin düzgünlüyü haqqında məsələnin aydın izahını belə aparmaq olar. İxtiyari kəsr x ədədini ixtisar olunmaz

$x = \frac{p}{q}$ kəsri şəkildə yazmaq mümkündür. Həmin x ədədi $x = \frac{m}{n}$ kəsri

ilə ifadə olunursa, onda $m = kp, n = kq$. İsbat etsək ki, həmişə $\sqrt[q]{a^{kp}} = \sqrt[q]{a^p}$ (3). Onda isbat edilmiş olacaqdır ki, (2) tərifinin tətbiqi x ədədinin kəsir şəkildə yazılması üsulundan asılı deyil. $\sqrt[q]{a^{kp}} = \sqrt[q]{\sqrt[k]{a^p}^k} = \sqrt[q]{a^p}$ (3)-ün isbatıdır.

Təklif edilən şərhlər sistemi, ixtiyari üstlü funksiyanın qiymətlərini səmərəli hesablamaqda $a^x = 10^{(\lg a)^x}$ (4) düsturundan istifadənin mümkünlüyü üçün, onluq loqarifmin tərifinə tez keçməyə imkan verir.

Bu düsturda $y = a^x$ götürməklə $\log_a y = \frac{\lg y}{\lg a}$ (5) alırıq. Məhz

sonuncu iki düstur müxtəlif əsaslı üstlü loqarifmik funksiyalarla işləməkdə “şagirdlərin fəal yaddaşının” elementləri olmalıdır.

$a^x = b^{(\log_b a)^x}$ (4a) düsturu vasitəsi ilə $\log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a}$ (5a) düsturuna

keçmək də, burada $y = a^x$, aydın və qısadır. Dərslikdə (4) düsturu verilməzsə onda bir sıra çalışmaların həllində şagirdlər çətinlik çəkərdilər. Burada verdiyimiz izahatda belə nəzərdə tuturuq ki, $\sqrt{2}$ -in irrasionallığı və irrasional ədələrin təqribi ədədi nəticələrinin aşağı və yuxarı sərhədlərinin qiymətləndirilməsi ilə hesablanması şagirdlərə məlumdur. Irrasional ədədlərin heç bir “nəzəriyyəsi”ni burada vermirik.

Nəticə olaraq onu da qeyd edək ki, məktəb riyaziyyatının öyrənilməsi prosesində şagirdlər ayrı-ayrı anlayışların ümumiləşdirilməsi ilə dəfələrlə qarşılaşırlar. Anlayışların nisbətən dar mənada başa düşülməsində doğru olan bəzi hökmlər onların ümumiləşdirilməsi zamanı qüvvəsini itirir və ya yenisi ilə əvəz olunur. Bu cəhətə təlimin müvafiq mərhələlərində fikir vermək lazımdır. Qüvvət və üstlü funksiyanın tədrisi ilə əlaqədar da belə imkanlar vardır. Odur ki, bu mövzu ilə əlaqədar ilk dərstdə şagirdlərin diqqətini həmin cəhətə yönəltmək lazımdır.

Mövzu ilə əlaqədar ümumiləşdirmə aparmaq məqsədi ilə məktəb dərslərinə aşağıdakıları əlavə etmək olar.

1) Tam üstlü qüvvət (təkrar). Natural x üstlü halında tərifə görə a^x qüvvəti a -ya bərabər vuruğun hasilidir. Qüvvətin əsası ixtiyari ədəd ola

bilər. Bir qədər sonra şagirdlər sıfır və mənfi tam üstlə tanış olurlar. Qüvvət anlayışının belə ümumiləşdirilməsində qüvvətin əsası üzərində məhdudlaşdırma qoyulur. O, sıfıra bərabər olmamalıdır. $0^0, 0^{-1}, 0^{-2}$ və s. ifadələrinin heç bir mənası yoxdur. $a \neq 0$ isə, onda tərifə əsasən $a^0 = 1, \forall n \in N$ üçün $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. a əsasını sabit hesab etdikdə

$y = a^x$ (6) qüvvəti x üstünün funksiyasıdır. $a \neq 0$ isə onda bu bütün x -lər üçün təyin olunmuşdur, başqa sözlə onun təyin oblası tam ədədlər çoxluğudur. Nümunə üçün dörd belə 1) $y = 2^x$, 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, 3)

$y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$, 4) $y = \left(-\frac{4}{3}\right)^x$ funksiyaların $-4 \leq x \leq 4$ aralığında

dəyişən argumentlər üçün qiymətlər cədvəlini, kompüterdən istifadə etməklə, tərtib edib bunun əsasında onların uyğun qrafiklərini nümayiş etdirmək mümkündür. Cədvəlləri və qrafikləri sağa və sola qeyri-məhdud davam etdirmək olar. Lakin aydın başa düşmək lazımdır ki, bu vaxta qədər olduğu kimi baxılan funksiyalar yalnız x argumentinin tam qiymətlərində təyin olunmuşdur. $x = 0,5$ və ya $x = \sqrt{2} = 1,414$ olduqda 2^x -in hansı qiymətlər almasını soruşmağın mənası yoxdur. Buna uyğun olaraq burada baxılan funksiyalar tam argumentli nöqtələrdən ibarətdir. Bu nöqtələri kəsilməz xətlə birləşdirməyə cəhd etməyin mənası yoxdur.

Nəticədə qüvvətin $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$ (A) düsturu ilə ifadə olunan xassəsini xatırlayırıq. Hər hansı $a \neq 0$ üçün bu bərabərlik ixtiyari tam x_1 və x_2 üçün doğrudur. Qüvvət anlayışını sıfır və mənfi tam üst halı üçün ümumiləşdirərkən (A) xassəsini rəhbər tuturuq. Mühakimənin ardıcılığı belə olur:

1) A xassəsi natural üst üçün doğrudur; 2) Qüvvət anlayışını sıfır və mənfi tam üstlər üçün (A) xassəsinin saxlanıldığını fərz edək. $a^1 \cdot a^0 = a^{1+0} = a^1$ -dan $a^0 = a^1 : a^1 = 1$ alırıq. İxtiyari natural n üçün $a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$ -dən $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ alırıq. 3) Beləliklə 2)

araşdırmasının nəticəsinə uyğun olaraq $a \neq 0$ olduqda $a^0 = 1$, ixtiyari

n üçün $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ tərifləri qəbul edildi. 4) “Qüvvət” anlayışının belə

genişlənmiş başa düşülməsində (A) xassəsinin ödənildiyini yoxlayırıq:

$$a^{-15} \cdot a^{10} = \frac{1}{a^{15}} \cdot a^{10} = \frac{1}{a^5} = a^{-5} = a^{-15+10}. \text{ Bu addımı da misal}$$

üzərində yoxlama ilə kifayətlənmirik. Bütün qurmanın tam yekunlaşması üçün (A) xassəsinin sıfır və mənfi üstlər üçün ümumi isbatını vermək lazımdır.

2) Qüvvət anlayışının sonrakı ümumiləşdirilməsi haqqında məsələnin qoyuluşu. Yuxarıda qeyd etdik ki, qüvvətin qəbul etdiyimiz tərifinə görə 1)-4) funksiyalarının qrafikini qurarkən nöqtələri kəsilməz xətlərlə birləşdirməyin mənası yoxdur. Belə məhdudlaşdırmanı nəzərə almayıb hər hansı belə xətti çəkməyi yoxlayaq. Aşkardır ki, 1)-3) funksiyaları üçün bunu etmək asandır. Burada yaxşı səlis əyri alınır. Bu xüsusən 3) funksiyasının qrafikindən aydın görünür. Lakin 1) və 2) funksiyalarının qrafikini qurarkən “səlis” əyri çəkməyə cəhd edən iki şagird demək olar ki, eyni bir əyri alırlar. $y = 2^x$ funksiyası üçün belə əyri üzərində $x = -0,5$ -ə təqribən $y \approx 1,4$, $x = \sqrt{2} \approx 1,4$ isə $y \approx 2,7$ uyğun olduğunu görmək mümkündür. Buradan belə nəticə çıxarmaq olarmı ki, $2^{0,5} \approx 1,4$ və $2^{\sqrt{2}} \approx 2,7$ dir?

Qüvvət anlayışının indiyə qədər qəbul edilmiş tərifinə əsaslanaraq onda cavab yalnız yox, tam olmayan x -lər üçün 2^x ifadəsinin mənası yoxdur. Lakin, sonra göstərdiyimiz kimi qüvvət anlayışını ümumiləşdirib hesablayırıq ki: $2^{0,5} = \sqrt{2} = 1,414$, $2^{\sqrt{2}} \approx 2^{1,414} \approx 2,665$. Beləliklə, əvvəlki baxımdan qrafik qurmada aldanmadıq. 4) funksiyasının qrafikinin qurulması halında iş başqa cür olur. Burada qrafikin nöqtələri növbə ilə absis oxundan yuxarıda və aşağıda yerləşir. Bütün nöqtələrdən bir səlis əyri keçirmək çətindir. Tezliklə absis oxundan yuxarıda və aşağıda yerləşən nöqtələrdən ayrı-ayrılıqda səlis əyrlər keçirmək arzusu yaranır. Bu onunla əlaqədardır ki, bu halda qüvvətin əsası mənfidir. Odur ki, indi üst cüt olduqda müsbət, tək olduqda isə mənfi qiymətlər alınır. Qüvvət anlayışının mənfi əsas halında ümumiləşdirilməsi üzərində dayanmırıq. Məktəb cəbrində mənfi əsaslı qüvvət yalnız tam üst üçün müəyyən hesab olunur. Əsası müsbət olan tam üstlü qüvvət həmişə müsbətdir: $a^x > 0$ (B). Müsbət əsaslı qüvvətin bu

xassəsi qüvvət anlayışını tam olmayan üst üçün ümumiləşdirdikdə təbii olaraq ödənilir. İndicə görəcəyik ki, müsbət əsaslı qüvvət anlayışını üstün bütün rəşional qiymətlərinə ümumiləşdirmək məsələsinin dəqiq qoyulmasında (A) və (B) xassələri kifayətdir. Sonrakı izahatdan göründüyü kimi onun yalnız bir həlli vardır. İrrəşional üst üçün də qüvvət anlayışının ümumiləşdirilməsini izah etməliyik. İrrəşional ədədlərin özü haqqında 9-illik məktəbdə təqribi təsəvvürlər verildiyindən burada təcrübədə lazım olanlarla kifayətlənmək olar.

3) Müsbət əsaslı və rəşional üstlü qüvvət. Xüsusi nümunələrdən başlayaq. $2^{\frac{1}{2}}$ qüvvəti hansı qiyməti ala bilər? (A) xassəsinə görə $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 2^1 = 2$. (B) xassəsinə görə $2^{\frac{1}{2}}$ müsbətdir.

Beləliklə, $2^{\frac{1}{2}}$ ifadəsi 2-nin hesabı kvadrat kökünə bərabərdir. $2^{0,5} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1,414$; Tamamı ilə analoji olaraq $2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}$ -

dən $2^{0,25} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2^{\frac{1}{2}}} \approx \sqrt{1,414} \approx 1,189$ alınır. Sonra (A) xassəsinə

əsasən $2^{0,75} = 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \approx 1,414 \cdot 1,189 \approx 1,681$. İndi $y = 2^x$ funksiyasının 0,25 addımla qrafikini qurmaq çətin deyil. Bunun üçün $2^{-2} = 0,25$ qiymətindən başlanılırsa ardıcıl olaraq $2^{-1,75}$, $2^{-1,5}$, $2^{-1,25}$, 2^{-1} , $2^{-0,75}$ və s. hesablamaq olar. Bundan sonra böyük miqyasla millimetrlı kağızda uyğun qrafik çəkilir. Yeni şəkildə bütün x-lər üçün təyin olunmuş $y = 2^x$ funksiyasının son qrafikinin necə alınması da daha aydın görünəcəkdir. Yeni çertyoj üzərində hesablanmış nöqtələrdən səlis əyri keçirmək və $2^{\sqrt{2}}$ -nin qiymətini əvvəlki çertyojdakına nisbətən daha dəqiq təyin etmək olar. Səliqəli işləməklə, indi təqribən $2^{\sqrt{2}} \approx 2,67$ alınır. (A) və (B)-dən bəzi ümumi

nəticələr çıxaraq. 1⁰) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$. Bu bərabərlik bilavasitə

$a^{-x} \cdot a^x = a^0 = 1$ dən alınır; Natural üst halı üçün $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

bərabərliyi mənfəi tam üstün tərəfi qəbul edilir. İndi görürük ki, ixtiyari rəşional üst üçün də analoji bərabərlik doğru olmalıdır. 2⁰) ixtiyari tam m üçün $(a^x)^m = a^{mx}$. Doğrudan da a) m natural ədəddirsə, onda

$$(a^x)^m = \underbrace{a^x \cdot a^x \dots a^x}_m = a^{\overbrace{x+x+\dots+x}^m} = a^{mx}, \text{ b) } m = -n \text{ isə, } n \in \mathbb{N}, \text{ onda}$$

$$(a^x)^m = \frac{1}{(a^x)^n} = \frac{1}{a^{nx}} = a^{-nx} = a^{mx}; \quad \text{c) } (a^x)^0 = 1 = a^0 = a^{0x}. \quad 3^0)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ üçün } \sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}; \text{ Doğrudan da } \left(a^{\frac{x}{n}}\right)^n = a^{\frac{x}{n} \cdot n} = a^x; \quad a^{\frac{x}{n}}$$

müsbət olduğundan bu a^x -in n-ci dərəcədn hesabı köküdür. 4⁰) m tam,

n isə natural ədəddirsə $\sqrt[n]{(a^x)^m} = a^{\frac{m}{n}x} = \left(\sqrt[n]{a^x}\right)^m$; bu bərabərlik 2⁰) və 3⁰) nəticələrinin bu və ya digər istiqamətdə ardıcıl tətbiqi ilə alınır:

$$\sqrt[n]{(a^x)^m} = \sqrt[n]{a^{mx}} = a^{\frac{mx}{n}}; \quad \left(\sqrt[n]{a^x}\right)^m = \left(a^{\frac{x}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}x}; \text{ xüsusi halda } x=1$$

olduqda 4⁰) nəticəsindən $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (6), $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^m$ (7) alınır.

Təbii olaraq (6) və ya (7) bərabərliklərindən birini kəsir üstü qüvvətin tərfi qəbul etmək arzusu yaranır. (7) düsturunu əsas götürməklə tərf

belə olar: Müsbət a əsası və $x = \frac{m}{n}$ şəkildə göstərilən x kəsir ədədi

üçün, burada m tam, n natural ədəddir, a üstü x $a^x = a^{\frac{m}{n}}$ düsturu ilə ifadə olunur. Lakin, burada ehtiyatlı olmaq lazımdır. İki sual yaranır: 1) Tərf düzgündürmü? Başqa sözlə, x kəsir ədədini tam və natural ədədin $\frac{m}{n}$ nisbəti şəkildə müxtəlif üsullarla göstərməklə a^x -i hesablayarkən

həmişə eyni nəticə alınırırmı? 2) Qüvvət üstü anlayışının daxil etdiyimiz ümumiləşdirilməsi (A), (B) xassələrini ödəyirmi?

Bu sualların hər ikisinin cavabı müsbətdir. İkinci sualın müsbət cavabından alınır ki, ümumiləşdirilmiş qüvvət 1⁰)-4⁰) nəticələrini və (6)

düsturunu ödəyir. Bu deyilənin isbatı üzərində dayanmayıb yalnız onu misallar üzərində yoxlamaq məsləhətdir.

4) $y = 10^x$ funksiyası. İndi aşağıdakı cədvəldən istifadə etməklə $y = 10^x$ funksiyasının qrafikini çəkmək olar.

x	-1	-0,75	-0,50	-0,15	0	0,25	0,50	0,75	1
10^x	0,10	0,18	0,32	0,56	1	1,75	3,16	5,62	10

Koordinat oxları üzrə eyni miqyaslı qrafikdən əlavə böyük millimetrlı kağız üzərində ordinat oxu üzrə miqyası absis oxundakından on dəfə kiçik olan qrafik hazırlamaq yaxşı olar.

Kompüterdən istifadə etməklə müstəqil tərtib edilmiş cədvəl üzrə qurulmuş qrafiki $y = 10^x$ funksiyasının bəzi riyazi cədvəllərdəki “anti-loqarifmlər” adlanan cədvəllə tutuşdurmaq olar.

V.M.Bradisin cədvəlində $y = 10^x$ funksiyasının cədvəli x üçün $0 \leq x < 1$ aralığında verilir. Nə üçün belə edildiyini şagirdlər bilməlidir. Həmin cədvəl 10^x -in bu aralıqdan kənardakı qiymətlərini də tapmağa imkan verir. Cədvəldən görünür ki, x artanda $y = 10^x$ funksiyası da artır. Bu $y = a^x$ funksiyasının, $a > 1$ olduqda ümumi xassəsidir. $y = 10^x$ funksiyasının bu xassəsindən istifadə ilə onun rəşional x üçün də təyin olunduğunu fərz etməklə 10-un irrəşional üstlü qüvvətlərini qiymətləndirə bilərik. Konkret misallardan istifadə etməklə fərziyyəni praktik əsaslandıraraq deyirik ki, $y = 10^x$ funksiyası x irrəşional ədəd olduqda tamamı ilə müəyyən qiymətlər ala bilər.

5) İxtiyari müsbət əşalı üstlü funksiya. İndi müsbət əşalı qüvvətin əvvəl tam üstlü qüvvət üçün müəyyən edilmiş daha bir xassəsinə xatırlamağın yeridir. Qüvvətin x üstü artanda $a > 1$ isə a^x qüvvəti artır, $a = 1$ olduqda həmişə vahidə bərabər olur, $a < 1$ olduqda isə azalır. $x_1 < x_2$ -dən $a > 1$ isə $a^{x_1} < a^{x_2}$ (B1). $a = 1$ olduqda $a^x = 1$ (B2) $x_1 < x_2$ -dən $0 < a < 1$ isə $a^{x_1} > a^{x_2}$ (B3) alınır. Bu xassələr yuxarıdakı (A), (B) xassələrini əşalı şəkildə tamamlayır. Nümunələr üzərində görürük ki, bu xassələr qüvvətin kəsir üstü üçün də ödənilir. Onun isbatı hazırkı dərsləkdə də verilir. (B) xassələrini rəhbər tutaraq

qüvvət anlayışını irrasional üst hal üçün də ümumiləşdirmək olar. Əvvəlcə fərz etdik ki, $10^{\sqrt{2}}$ ifadəsinin mənası vardır, (B) xassələri isə qüvvətin ixtiyari üstü üçün dəyişmir, həm də müəyyən etdik ki, $10^{\sqrt{2}} \approx 2,59$ dur. Ciddi olaraq isbat etmək olar ki, (lakin irrasional ədədlər nəəriyyəsi əsasında) ixtiyari müsbət a əsası üçün x -in bütün həqiqi qiymətlərində təyin olunmuş (A), (B), (B) xassələrini ödəyən, x -in tam qiymətlərində isə əvvəldən məlum olan qiymətləri alan yeganə $y = a^x$ funksiyası vardır. Buna əsası a olan üstlü funksiya deyilir. İndi

$$y = 2^x, \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \text{və} \quad y = 10^x \quad \text{üstlü funksiyaların qrafikləri birlikdə}$$

müqayisə edilir. Onlar mahiyyət etibarı ilə artıq şagirdlərə tanışdır. Lakin ciddi desək yalnız indi onları kəsilməz xətlər şəklində çəkmək ixtiyarına malik oluruq. Müsbət əsaslı üstlü funksiya argumentin bütün həqiqi qiymətlərində təyin olunmuşdur və (A), (B), (B) xassələrini ödəyir. Üstlü funksiyanın aşağıdakı xassəsi də mühümdür: İxtiyari həqiqi c ədədi üçün $a^{cx} = (a^x)^c$ (Q). Rəşional c üçün bu sadəcə 4^0 nəticəsinin və (7) düsturunun yeni yazılışdır:

$$a^{\frac{m}{n}x} = \left(\sqrt[n]{a^x}\right)^m = (a^x)^{\frac{m}{n}}. \quad \text{İrrasional } c \text{ üçün (Q) düsturunu isbatsız}$$

qəbul etmək olar. Qüvvət anlayışına əsaslanmaqla belə bir mühüm faktı şagirdlərə bildirmək olar: eyni bir ədədin qüvvətlərinin vurulması, bölünməsi, tam qüvvət üstünə yüksəldilməsi üstlərin toplanması, çıxılması və vurulmasına uyğun olur. Bu uyğunluq rəşional, həqiqi üstə keçdikdə də saxlanılır. Bilmək lazımdır ki, praktikada $y = a^x$ funksiyası deyil, $y = e^{ax}$ daha çox istifadə edilir. Odur ki, məktəbdə ikincinin ümumiləşdirərək öyrənilməsi lazımdır.

1.4. İnformatikada kəmiyyət anlayışı. Bu kursun başlanğıcında “kəmiyyətlərlə işləmə alqoritmləri” mövzusunə baxılır. Burada “kəmiyyətlər” mövzusunun öyrənərkən şagirdlərin fizika və riyaziyyat kurslarında bu haqda aldıkları biliklərdən istifadə etmək lazımdır. İnformatika, fizika və riyaziyyat kurslarında istifadə edilən kəmiyyətlərin xüsusiyyətlərinə diqqət vermək məqsəduyğundur.

Fizika və riyaziyyatda əsasən ədədi kəmiyyətlərə baxılır. Bunlar isə iki qrupa bölünür: Vektorial və skalyar. Odur ki, çox vaxt şagirdlərdə belə təsəvvür yaranır: kəmiyyəti həmişə ölçmək mümkündür. Par-

çanın uzunluğu, fiqurun sahəsi və həcmi, cismin hərəkət sürəti, qüvvə və s. bunlar şagirdlərin tanıdıqları kəmiyyətlərdir. İnformatikanın öyrənilməsi zamanı kəmiyyət anlayışını genişləndirmək lazım gəlir. Yeni anlamda kəmiyyət təkcə ədədi deyil, qrafiklər, mətnlər, həndəsi fiqurlar, ümumiyyətlə müxtəlif təbiətli obyektlər də kəmiyyətdir. Belə kəmiyyətlərə baxmağın zəruriliyi kompüterin müxtəlif informasiyaların işləməkdə hərtərəfli imkanların olması ilə əlaqədardır. Bu informasiyalar xüsusi halda ədədlər (ədədi kəmiyyətlər), qrafiklər (qrafik kəmiyyətlər), mətnlər (liter kəmiyyətlər) ola bilər. Ədədi kəmiyyətlər arasındakı münasibətlər (kiçikdir, böyükdür, bərabərdir) şagirdlərə cəbr kursundan məlumdur, liter kəmiyyətlər arasındakı münasibətlər isə məktəblilər üçün yenidir. Qiymətləri sözlər və ya mətnlər olan kəmiyyətlər liter kəmiyyətlər adlanır. Şagirdlər sözlərlə və ya münasibət işarələri ilə ($a > b$, $x = 0$, $x \neq y$ və s.) ifadə edilmiş münasibətlərə baxdıqdan sonra dəyişən kəmiyyətlər arasındakı münasibət anlayışı ümumiləşdirmə nəticəsində yaranır. Belə ümumiləşdirmə üçün “informatika” və “riyaziyyat” fənlərinin sıx əlaqəli öyrənilməsini məqsədəuyğun hesab edirəm. Şagirdlər “casio” firmasının yeni təhsil kalkulyatorlarından istifadə etməyi bacarmalıdırlar.

1.5. Fermanın kiçik teoremi (X s). Asanlıqla isbat etmək olar ki, $n^2 - n$, $n^3 - n$, $n^5 - n$, ... fərqləri uyğun olaraq 2, 3, 5, ... sadə ədədlərinə bölünür. Fermanın məlum kiçik teoremini həmin sadə çalışmaların ümumiləşdirilməsi kimi daxil etmək olar: $n^m - n$ fərqi ixtiyari $n \in N$ və ixtiyari sadə m ədədi üçün m -ə bölünür. Teoremin isbatında n üzrə riyazi indukiya metodundan istifadə etmək olar. Belə ki, $n=0$ olduqda hökm doğrudur. $n=k$ üçün teoremin doğruluğunu qəbul edək. Onda $S_{k+1} = S_k + nA$, burada A – tam ədəddir, Nyuton binomunun açılışından istifadə etməklə bunu asanlıqla əsaslandırmaq olar. Beləliklə tələb ediləni alırıq. Bu teoremdən belə bir nəticədə alınır: n və p ədədləri qarşılıqlı sadədirsə, onda $n^{p-1} - 1$ ifadəsi p -yə bölünür. Doğrudan da $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$ -dən bu aydın görünür.

1.6. İnteqral (XI s). Keçmiş sovet dövründə istifadə etdiyimiz dərslikdə [15] “qeyri müəyyən inteqral” istilahı heç bir yerdə işlədilmir,

$$\int_a^b f(x)dx \quad (1) \text{ “müəyyən inteqrala” isə sadəcə inteqral deyilir və ibtidai}$$

funksiyanın $F(b) - F(a)$ artımı kimi tərif verilir. Həmin vəsaitin 1976-cı il nəşrində məcburi olmayan 104-cü bənddə və tarixdən məlumatda (b107), habelə 1991-ci il nəşrinin əyri xətliliyi trapesiyanın sahəsi (b29) anlayışı və tarixi məlumatla əlaqədar integralin cəmin limiti kimi alınma bilməsindən danışılır. Hazırkı dərslikdə “qeyri-müəyyən integral” işlənir. Lakin əsas fikir qalır. İşə belə yanaşma ali məktəbdə illərdən bəri olan yanaşmadan fərqlənir. Odur ki, A.N.Koloqorovun məktəb üçün münasib hesab etdiyi bu ideyaya etiraz edənlər də olmuşdur. Məsələn Doneski Dövlət Universitetinin bir qrup elmi işçiləri “Cəbr və analizin başlanğıcı” dərsliyində “integral” mövzusunun şərhini ətraflı təhlil edərək aşağıdakı nəticələrə gəlmişlər.

1) Mövzunun öyrədilməsində məqsəd şagirdləri diferensiallamanın tərsi olan ibtidai funksiya və müəyyən integral əməliyyatları ilə tanış etmək olmalıdır. Bu anlayışlar, onların mahiyyətini, müasir təbiətşünaslıqda yerini göstərməklə, az sayda hesablamalarla möhkəmləndirməklə, dəqiq verilməlidir. 2) Dərslikdə ibtidai funksiya anlayışı yaxşı şərh edilmişdir. Yalnız müəllif qeyri-müəyyən integral istilahından istifadə

etmir. $\int f(x)dx$ işarəsinin köməyi ilə ibtidai funksiyanın xassələrini asanlıqla ifadə etmək və hesablanması göstərmək olar. Zənnimizcə həmin istilahı XI sinifdə daxil etmək mümkündür. 3) Müəyyən integral anlayışı nəzəri və metodik cəhətdən təminədi verilməmişdir. Məlumdur ki, müəyyən integralin mahiyyəti integral cəmində limitə keçməkdən ibarətdir. Məktəbdə də əsas tərif belə verilməlidir. Çünki bu tərif integral anlayışının mahiyyətini ifadə edir, riyazi anlayışların təcrübənin tələbi nəticəsində necə yarandığını göstərir, terminologiyayı

(integratio) və $\int_a^b f(x)dx$ işarəsini izah edir, integralın tətbiqi üzrə məz-

munlu məsələlərin əksəriyyətinin həlli belə təriflə əlaqədardır. Baxılan vəsaitdə isə əksinə: müəyyən integralın mənası haqqında düzgün təsəvvür verilmir, onun mahiyyəti açılmır, nəzəri olaraq ciddi deyil, birbaşa təcrübəyə tətbiq üçün yaxşı uyğunlaşdırılmamışdır. Hər dəfə Nyuton-Leybnis düsturunun isbatına yaxın mühakimə aparmaq lazım gəlir. “Integral tipdə” bir çox məsələləri (ağırlıq mərkəzinin tapılması, fırlanma fıqurların səthinin sahəsi və s.) dərslikdə təklif edilən sxemlə

daxil etmək olduqca çətindir; bu tərifdə, elementlərini $\int_a^b f(x)dx$ -in

daxil edilməsilə sinifdən kənar məşğələdə vermək mümkün olan, ikiqat və əyri xətti inteqrallara ümumiləşdirməyə demək olar ki, imkan yaratmır. Müəlliflər mövzunu aşağıdakı sxemdə şərh etməyi məsləhət bilirlər: 1) İbtidai funksiya; 2) qeyri-müəyyən inteqral; 3) müəyyən inteqrala gətirilən məsələlər; 4) inteqral cəmin limiti kimi; 5) inteqrallanan funksiyalar sinfi; 6) Nyuton-Leybnis teoreminin ifadəsi; 7)

$\int_a^b f(x)dx$ -in hesablanması və onun tətbiqləri; 8) Əyri xətti trapesiyanın

sahəsi, yuxarı sərhəddi dəyişən inteqral, Nyuton-Leybnis teoreminin isbatı; 9) İnteqralın hesablanmasının üç qaydası və bunlara aid çalışmalar həlli.

Bu sxemdə ümumiləşdirməyə nisbətən xüsusişdirməyə daha çox üstünlük verilir. Lakin A.N.Kolmoqorovun onlara verdiyi cavabdan görünür ki, o ümumiləşdirməyə xüsusi diqqət vermişdir. İndi bu nöqtəyi nəzərə baxaq.

1) İbtidai funksiya və qeyri-müəyyən inteqral “Qeyri-müəyyən inteqral” anlayışı riyazi istilahlara hazırda verilən tələblərdən uzaq dövrlərdə yaranmışdır. Anlaşılmazlıq ali məktəblərin hazırkı dərsliklərində də qalır. Çox vaxt ibtidai funksiyada qeyri-müəyyən inteqral deyilir. Bəzən bunun əvəzində bütün ibtidai funksiyaların ümumi şəkli olan $F(x)+C$ ifadəsinə (F ibtidai funksiyalardan biridir) $\int f(x)dx$

(2) qeyri müəyyən inteqralı deyilir. Göründüyü kimi sonuncu halda ibtidai funksiyalar çoxluğu əvəzində yeganə bir ifadənin alındığı nəzərdə tutulur. Nahaq belə ümumiləşdirmə aparılır, çünki həmin tərifə əsaslandığında iki müxtəlif $(x-1)^2 + C$ və $x^2 - 2x + C$ ifadələrinin hər ikisi eyni bir $f(x) = 2(x-1)$ funksiyasının “qeyri müəyyən inteqralı” olar. Şübhəsiz (2) hesablamalarda ixtiyari ibtidai funksiyanın işarəsi kimi faydalıdır. O, “additiv sabitə qədər dəqiqliklə” aparılan hesablamalarda yararlıdır. Lazımı şərtləşmə ilə $\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C$ yazılışı doğrudur. Lakin nəzərə almaq lazımdır ki, buradakı bərabərlik “additiv sabitə qədər dəqiqliklə bərabərlik” kimi başa düşülür və $f(x) = \ln x$ -in bütün ibtidai funksiyalarını almaq üçün yalnız axırda C

sabiti yazılır. Lakin hazırda məktəbdə “çoxqiymətli funksiya” işarəsindən istifadə edilmir. Məsələn, əvvəllər kvadrat kökün $\sqrt{\quad}$ işarəsi belə idi. “İbtidai funksiyanın tapılması çoxqiymətli əməliyyat üçün işarə daxil etməkdə xüsusi izahat tələb olunardı bunu, məktəbdə ibtidai funksiyaların hesablanmasında cəld texnikanı mənimsətmək tələb olunmadığından, artıq hesab edirik. Bu zaman “qeyri müəyyən inteqralın” sadəcə ibtidai funksiyanın başqa adı olduğunu, (2) işarəsinin isə hesablamalarda işlədilməsi üsullarını izah etməklə ixtiyari ibtidai funksiyanın yazılışı olması fikrinə əsaslanmağı lazım bilirik.

2) Tərifin seçilməsinə gəldikdə bilmək lazımdır ki, şagirdlər sistematik olaraq riyaziyyatda eyni bir anlayışın müxtəlif tərifləri ola bildiyini anlamalıdır. Odur ki, (1) inteqralına ibtidai, funksiyanın artımı və cəmin limiti kimi baxmağın, zərərli olmasını demək doğru deyil. Müəllim isə cəmin limitindən istifadə olunmayan müəyyən inteqralın və bilavasitə diferensiallama əməlinin tərsi kimi inkişaf edən inteqrallamanın geniş ümumiləşdirmələri olduğunu bilməlidir. İxtiyari sayda ölçü-fəzasında və ixtiyari μ ölçüsündə $F(A) = \int_A f(x)dx$ inteqralına

törəməsi $f(x) = \frac{dF}{dx}$ olan additiv funksiyalar çoxluğu kimi tərif

vermək olar. İnteqral anlayışının ən ümumi vəziyyətdə belə yanaşma texnikası üzərində dayanmağa ehtiyac yoxdur. Tamamı ilə elementar şəkildə ali texniki məktəblər üçün baxılan törəmə sahəsində additiv funksiyalar kimi çoxqat inteqrallar daxil edilə bilər. Məsələn, A.F.Bermantın analiz kursunda belə yanaşma vardır.

İnteqrala cəmin limiti və törəməsi verilmiş additiv funksiya kimi baxmaq olar. Bu inteqral anlayışının iki eyni mənalı cəhətləridir. Bir ölçülü halda və ikinci konsepsiya parçasında məhdudlaşmada (1) inteqralının ibtidai funksiyanın artımı kimi tərifini alırıq. İnteqral anlayışının tərifinin əsaslandırılması bu deyilənlərlə əlaqədardır. İnteqral cəminin limitinə keçmək yanaşması kimi dərslikdəki ibtidai funksiyanın artımı kimi verilən tərifindən ilk addım olaraq gələcəyi vardır. Belə yanaşmada inteqralın əsas xassələri olduqca sadəliklə isbat edilir. İnteqrala cəmin limiti kimi baxmağı şagirdlərə öyrətmək məsləhətdir. İnteqralın tətbiqləri ilə əlaqədar dəyişən qüvvənin işi üçün düsturun çıxarılışı ona cəmin limiti kimi baxmaq nöqtəyi nəzərdən verilir. Aşkardır ki, bu düsturu inteqralın ibtidai funksiyanın artımı kimi tərifinə əsasən sahə

düsturunun çıxarılması nümunəsi üzrə də almaq olar. Dərslikdəki fizika və mexanikadan götürülmüş digər məsələlər üçün də işə belə yanaşmaq mümkündür. Dərsliyin son variantında baxılan mövzu bu ardıcılıqda izah edilir: ibtidai funksiya onun əsas xassələri və tapılmasının üç qaydası, əyrixətli trapesiyanın sahəsi, integral cəmin limiti kimi, Nyuton-Leybnis düsturu, integralın tətbiqləri, tarixi məlumat. Beləliklə əsas tənqidi qeydlər və ümumiləşdirmə .

3) Kəsilməyən funksiyanın integrallanması haqda. İbtidai funksiyanın artımı kimi (1) müəyyən integralı kəsilməyən funksiya halında integral cəminin limiti tərfi ilə birgüclüdür.

Bir tərəfdən Rimana görə integrallanmayan dəqiq törəmə vardır. Onun üzərində, ümumiyyətlə yalnız Danjua integralının köməyi ilə, ibtidai funksiya additiv sabitə qədər birqiymətli bərpa olunur. Digər tərəfdən Rimana görə integrallanan, dəqiq törəməsi olmayan, funksiyalar vardır. İki tərəf arasında uzlaşmanın elementar vasitələrlə bərpa olunan kəsilməyən funksiyalar sinfini göstərək. Bu sonlu sayda kəsilməyən olan birinci növ funksiyalardır. Bir çox elementar məsələlərin həlli ilə əlaqədar belə funksiya yaranır. Məsələn [16]-də $F'(x) = f(x)$ bərabərliyini, sonlu sayda nöqtələr çoxluğu müstəsna olmaqla, ödəyən ixtiyari kəsilməyən F funksiyasına f funksiyasının ümumiləşdirilmiş ibtidai funksiyası deyil. (1) integralına ümumiləşdirilmiş ibtidai funksiyasının artımı kimi tərif verilir. Diferensial anlayışının öyrənilməsi zamanı integralın daxil edilməsi üçün müəyyən hazırlıq görmək və bu zaman müqayisədən istifadə etmək mümkündür. Diferensiallanmanın öyrənilməsi zamanı, integrallama haqqında heç nə demədən, müəyyən çalışmalardan istifadə etməklə, bu haqda hazırlıq işi aparmaq olar. Bununla da XI sinifdə “integral”ın öyrənilməsi üçün zəruri olan bacarıq və vərdislər yaradılır. X sinifdə qüvvət funksiyasının törəməsi ilə əlaqədar: “hər hansı funksiyanın törəməsi $2x$ -dir, bu funksiyanı tapın” kimi tapşırıqlar vermək məqsəduyğundur. Bu zaman $2x = ()'$ yazılışından istifadə etmək olar. $3x^2 = ()'$; $\frac{1}{x^2} = ()'$; $5x = ()'$ yazılışları ilə analoji çalışmalar tərtib edilə bilər. Triqonometrik funksiyaların törəməsi ilə əlaqədar olan bu iş davam etdirilir: $\cos x = ()'$; $\sin x = ()'$; $\sin 3x = ()'$ və s. Belə çalışmalar törəmənin öyrənilməsi üzrə məşğələlərin müxtəlifliyini təmin edir, düşüncənin inkişafına səbəb olur, başlıcası integrallama işinə

şagirdləri hazırlayır. “İbtidai funksiya” istilahı da asanlıqla mənimsənilir.

4) Məktəbdə $\int_a^b f(x)dx$ müəyyən inteqral anlayışına əsasən $a < b$

halında baxılır. İndi bu anlayışı ümumiləşdirək və tərifə əsasən

$$\int_a^b f(x)dx = 0, \quad a > b \quad \text{olduqda} \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad \text{yazmaq olar.}$$

Bu təbiidir, çünki, oturacağı bir a nöqtəsindən ibarət əyrixətli trapesiyanın sahəsi sıfıra bərabərdir. a və b nöqtələri yerlərini dəyişdikdə isə

$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ fərqlərinin işarəsi dəyişir, odur ki, inteqralın da işarəsi dəyişir. Fərz edək ki, $y = f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməyəndir və c bu parçanın daxili nöqtəsidir. Onda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \text{bərabərliyi doğrudur. } a, b, c \text{ nöq-}$$

tələrinin ixtiyari vəziyyətində bu bərabərlik ödənilir. Məsələn, $a < b < c$

$$\text{isə} \quad \text{onda} \quad \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx.$$

$$\text{Odur ki,} \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad \text{Eyni qayda ilə qalan hallar}$$

araşdırılır. İbtidai funksiya aid məsələ həlli ilə əlaqədar şagirdlərin diqqətini bir çox ümumiləşdirmələrə yönəltmək olar. Dərslikdəki [3] mətində həlli ilə verilən 5, sonra çalışma kimi təqdim olunan 35/, 352 N li məsələlər bu baxımdan maraqlıdır. Bundan əlavə ibtidai funksiyanın $F(x) + C$ şəkildə yazılışı C -in tamamı ilə konkret, lakin ixtiyari qiymətlər ala bilməsini göstərir. Riyazi analiz kursunda f funksiyasının bütün ibtidai funksiyaları çoxluğuna sonra daxil edilən müəyyən inteqraldan fərqli olaraq f -in qeyri müəyyən inteqralı deyilir. Məktəb riyaziyyatında isə “ibtidai funksiya” istilahı işlədilir. Beləliklə, baxılan mövzunun öyrənilməsi zamanı müəyyən inteqralın qeyri müəyyən inteqralın (ibtidai funksiyanın) xüsusi halı olmasına şagirdlərin diqqətini cəlb etmək lazımdır. Ümumi və xüsusi halları şagirdlərə öyrətmək üçün inteqral

hesabından və diferensial tənliklərin həlli nümunələrindən istifadə etmək məqsəduyğundur.

1.7.Eyniçevirmələr (X-XI s.). Məktəbdə təlimin bütün mərhələlərində eyniçevirmələrə təsadüf olunur. İbtidai məktəbdə hesab əməllərinin yerinə yetirilməsi alqoritmlərindən və əməllərin xassələrindən bir və ya daha çox əməlli ədədi ifadələrin eyni çevrilməsi lazım gəlir. V-VI siniflərdə ədəd anlayışı və onlar üzərində əməllərin genişlənməsi ilə əlaqədar olaraq eyniçevirmə anlayışı daha da güclənir. VII sinifdə eyniçevirmələrin sistematik öyrənilməsi onun tərifinin verilməsi ilə başlayır. Bu zaman həmin əməliyyatın ifadəyə daxil olan dəyişənlərin mümkün qiymətləri çoxluğunda aparılmasına xüsusi fikir verilir. Təlimin əvvəlki mərhələlərində toplanmış eyniçevirmə aparatı VII sinifdə genişlənilir. Bu genişlənmə eyni əsaslı qüvvətlərin vurulması xassəsini ifadə edən eyniliyin daxil edilməsi ilə başlanır. Bu xassəyə və vurmanın qanunlarına əsasən birhəddlinin standart şəklə gətirilməsi yerinə yetirilir. Sonra göstərilən çevirmələrə, toplamanın yerdəyişmə və qruplaşdırma, vurmanın toplamaya və çıxmaya nəzərən paylama qanunlarına əsasən ixtiyari tam ifadə standart şəkildə çoxhəddliyə çevrilir. Müxtəsər vurma eynilikləri daxil edilir və vuruqlara ayırmaya aid misallara baxılır. VIII sinifdə iki çoxhəddlinin nisbətindən ibarət rəasional ifadələrin çevrilməsi, cəbri kəsrlərin ixtisarı öyrənilir. Kəsr ifadələrin daxil olması ilə əlaqədar eynilik anlayışının məzmununun genişlənməsi zərurəti yaranır. Eyniliyə artıq dəyişənin ixtiyari mümkün qiymətlərində doğru olan bərabərlik kimi tərif verilir. IX sinifdə cəbri və transendent ifadələrlə əlaqədar çevirmələrin daha çox növləri öyrənilir. X-XI sinifdə bu iş davam etdirilir, həm də riyazi analiz elementləri ilə əlaqədar müxtəlif çevirmələr aparmaq lazım gəlir. Burada törəmə və inteqralın bəzi eyniçevirmələrə, habelə bərabərsizliyin isbatına tətbiqindən bəhs edilir. Məqsəd isə X-XI siniflərdə diferensial və inteqral hesabının tətbiqi ilə eyniçevirmələr aparmağı şagirdlərə öyrətməklə onların bu haqda biliklərini müəyyən qədər genişləndirmək və ümumiləşdirməkdir. Hesab əməllərinin xassələrinə əsaslanan ən sadə çevirmələr artıq ibtidai və V-VI siniflərdə aparılır. Lakin çevirmələr aparmağa aid bacarıq və vərdişlərin formalaşdırılması işi üzrə əsas yük cəbr kursunun üzərinə düşür. Bu çevirmələrin sayı və müxtəlifliyinin artması, habelə onların əsaslandırılması və ümumiləşdirilmiş eynilik, eyni çevirmə, eyni güclü çevirmə, məntiqi alınma anlayışlarını ayırmaq və öyrənməklə tətbiqləri şərtlərini müəyyənləşdirməklə əlaqədardır.

Cəbr kursunda birhədli və onun ümumiləşməsi çoxhədlilərin eyni çevrilməsi əsas yer tutur.

1) Törəmənin eyniçevirmələrə tətbiqi. Hazırda şagirdlərin X-XI siniflərdə öyrəndiyi riyazi analiz aparatı məktəbdə başqa ənənəvi üsullarla həll edilən bir çox məsələlərin tamamı ilə səmərəli, qısa həllini tapmağa imkan verir. Göstərilən aparatın belə tətbiqi, artıq başlanğıc mərhələdə onlarla tanışlıq diferensial və integral hesabının ideyaları və metodlarının faydalı və qiymətli olduğu barədə şagirdlərdə inam yaradır. Şagirdlərə vaxtında demək lazımdır ki, riyazi analizin eyniçevirmələrinin nisbətən daha məzmunlu, geniş tətbiqləri vardır. Belə məlumatı verərkən qeyd edilməlidir ki, bu “yeni” üsul hec cür “ənənəvi” üsuldan əl çəkməyi tələb etmir, bəzən isə ona üstünlük verir və bir-birini tamamlayır. Müxtəlif çevirmələrin sadəliklə aparılmasında çox vaxt iki aşkar faktdan istifadə olunur: 1) hər hansı intervalda funksiya eyniliklə sabitə bərabədirsə, onda həmin intervalda onun törəməsi eyniliklə sıfıra bərabərdir, tərsinə 2) hər hansı intervalda iki funksiya eyniliklə bərabədirsə, onda onların törəmələri də həmin intervalda eyniliklə bərabərdir. Qeyd: $F(x) \equiv G(x)$ o deməkdir ki, x dəyişəninin verilmiş çoxluqdan götürülmüş hər bir qiymətində sağ və sol tərəfdəki funksiyaların qiymətləri bərabərdir (və ya konkret çoxluq göstərilmişdirsə dəyişənin bütün mümkün qiymətlərində). Bu faktların eyniçevirmələrə aid müxtəlif çalışmalar həllinə tətbiqini göstərməklə şagirdlərin ümumiləşdirmə qabiliyyətlərini inkişaf etdirmək faydalıdır.

$$1. A(x) = \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) \text{ və}$$

$$B(x) = \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) \text{ ifadələrin hər birini}$$

sadələşdirmək üçün əvvəl şagirdlərə məlum olan çevirmələrlə müəyyən edilir ki, $A(x) = 0$. Sonra görünür ki, $B(x) = A'(x)$, deməli $B(x) = 0$.

2. Şagirdlər silsilənin cəmlənməsi üsulları ən sadə triqonometrik cəmlərin tapılması ilə tanışdırlar. Bunlara və törəmə haqqında əsas məlumatlara görə şagirdlərlə cəmin tapılmasına aid tamamı ilə müxtəlif çalışmalara baxmaq olar. $\sigma = 1 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2 + 7 \cdot 4^3 + \dots + (2m-1)4^{m-1}$ cəmini hesablamaq üçün şagirdlərə deyilir ki, həmin cəm $B(y) = 1 + 3y^2 + 5y^4 + 7y^6 + \dots + (2m-1)y^{2m-2}$ cəminin $y = 2$ olduqda xü-

susi halıdır. Lakin $B(y) = C'(y)$, burada $c(y) = y + y^3 + y^5 + \dots + y^{2m-1}$,
 $c(y) = \frac{y^{2m+1} - y}{y^2 - 1}$ Odur ki, $B(y) = \frac{(2m-1)y^{2m+2} - (2m+1)y^{2m} + y^2 + 1}{(y^2 - 1)^2}$

sonuncu bərabərlikdə $y=2$ olduğunu nəzərə alıb $\sigma = \frac{1}{9}[5 + (6m-5)4^m]$ nəticəsinə gəlirik.

3. Törəmənin bir çox tətbiqləri 1)-in tərsinə əsaslanır. Məsələn,
 $\sin^4 x + \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{3}{8}$ eyniliyini isbat etmək üçün onun sağ
və sol tərəfinin fərqi bərabər olan $f(x)$ funksiyasına baxmaq kifayətdir:

$$f(x) = \sin^4 x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{3}{8}, \text{ buradan}$$

$$f'(x) = 4\sin^3 x \cos x - \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 4x = 0; \quad f'(x) = 0, \text{ onda}$$

$f(x) = c$, $f(0) = c = 0$, deməli $f(x) = 0$, bu işə baxılan eyniliyin isbatı deməkdir.

4. Şagirdlər arcsinu, arccosu, arctgu, arctgu funksiyalarının törəmələri düsturları ilə tanış olduqdan sonra onların daxil olduğu ifadələrin eynicəvrilməsinə aid çalışmalara baxmaq məqsədəuyğundur. Burada diferensiallama aparatının tətbiqinin üstünlüyü daha qabarıq görünür.

“ $f(x) = \arctg x + \arctg \frac{1-x}{1+x}$ funksiyasının eyniliklə sabitə bərabər

olduğu interval varmı? Varsa belə intervalı və sabiti tapın” çalışması bu baxımdan maraqlıdır. Aşkardır ki, $x=-1$ dən başqa $f(x)$ funksiyasının təyin olduğu hər yerdə $f'(x) = 0$. Odur ki, $(-\infty, -1)$ və $(-1, \infty)$ intervallarında $f(x) \equiv c_1$ və $f(x) = c_2$, burada c_1, c_2 sabitlərdir və ümumiyyətlə desək müxtəlif ədədlərdir. Əvvəl c_2 -ni

tapmaq: $c_2 = f(1) = \arctg 1 + \arctg 0 = \frac{\pi}{4}$. c_1 -i cədvəlsiz tapmaq bir

qədər çətin olduğundan bunun üçün belə etmək olar: Bilirik ki, ixtiyari $x < -1$ üçün $c_1 = f(x)$, fərz edək ki, $x \rightarrow -\infty$ onda $\arctg x \rightarrow -\frac{\pi}{2}$,

$\frac{1-x}{1+x} \rightarrow -1$, $\arctg \frac{1-x}{1+x} \rightarrow -\frac{\pi}{4}$, $c_1 \equiv f(x) \rightarrow -\frac{3\pi}{4}$. Lakin c_1 sabit

olduğundan bu yalnız $c_1 = -\frac{3}{4}\pi$ şərtində mümkündür. Beləliklə,

$x < -1$ olduqda $f(x) \equiv -\frac{3}{4}\pi$ və $x > -1$ olduqda $f(x) = \frac{\pi}{4}$.

5. Məktəbdə törəmə anlayışının öyrənilməsindən əsas məqsəd onu funksiyanın araşdırılmasına tətbiq etməkdən ibarətdir. Lakin bu anlayışın tətbiq sahəsi olduqca genişdir. Məktəb riyaziyyatının funksiyanın araşdırılması ilə əlaqədar olmayan müxtəlif məsələlərinin həllində törəmənin faydalı tətbiqlərini göstərmək olar. Cəbri və trigonometrik ifadələrin vuruqlara ayrılmasına törəmənin maraqlı tətbiqləri vardır. Bu priyom ona əsaslanır ki, çox vaxt törəmə funksiya əsas funksiya ilə nisbətən daha sadə şəkildə olur. Buna görə də o sadə inteqrallandır ki, bu da ifadənin axtarılan çevrilməsini tapmağa imkan verir. Bu zaman verilmiş ifadəyə bir qayda olaraq bir neçə dəyişən daxil olur, odur ki, diferensiallama zamanı faktik olaraq xüsusi törəmələrdən söhbət gedir.

Formal olaraq məktəb proqramına daxil olmayan bu anlayışın metodik əhəmiyyəti vardır. Budur $x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y)$ ifadəsini vuruqlarına ayıraraq y və z -i sabit hesab edərək verilmiş ifadəni $f(x)$ -lə işarə etsək $f'(x) = 3x^2(y-z) - y^3 - z^3$ və buradan $f(x) = x^3(y-z) - (y^3 - z^3)x + C$ alırıq, C yalnız y və z -dən asılıdır. Onu tapmaq üçün

$$x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) = x^3(y-z) - (y^3 - z^3)x + C$$

eyniliyində $x=0$ götürüb $C = y^3z - z^3y$ alırıq. Onda

$$f(x) = x^3(y-z) - (y^3 - z^3)x + yz(y^2 - z^2) =$$

$= (y-z)(x^3 - xy^2 - xyz - xz^2 + y^2z + yz^2)$. Burada ikinci vuruğa

yenə həmin üsulu tətbiq etməklə vuruqlarına ayıraraq. Lakin bu dəfə dəyişən olaraq y -i götürək. Çünki bu dəyişənin üstü kiçik qüvvətlə ifadəyə daxildir. x və z -i sabit götürüb ifadəni $\varphi(y)$ -lə işarə etsək

$$\varphi'(y) = -2xy - xz - 2yz - z^2 = 2y(z-x) + z^2 - xz \quad \text{və} \quad \text{buradan}$$

$$\varphi(y) = y^2(2-x) + 2(z-x)y + C_1 \quad \text{alırıq.} \quad c_1 = \varphi(0) = x^3 - xz^2,$$

$\varphi(y) = (z - x)(y - x)(y + z + x)$. Beləliklə, verilmiş ifadə $(x + y + z)(x - y)(x - z)(y - z)$ -ə bərabərdir.

6. Bəzi eyniçevirmələrdə və bərabərsizliklərin isbatında integral hesabından istifadə etmək olar. Dərslük və müəllimə kömək kitablarında belə tətbiqə təsadüf edilmir. Odur ki, bu cəhətə diqqət verməyi əhəmiyyətli hesab edirik. Bununla da şagirdlər integral anlayışının əhəmiyyətli olmasına inanırlar və onun dərinədən mənimsənilməsinə ehtiyac hiss edirlər. Lakin müəllim tədris prosesində belə çalışmalara baxarkən integralin daha geniş mühüm tətbiqləri olduğunu unutmamalıdır. Bununla əlaqədar verdiyimiz materialı Bakıdakı 21, 53, 158 sayılı məktəblərdə pedaqoji təcrübədə olarkən XI sinifdə sınaqdan keçirmişik. Bu iş təcrübəçi tələbələrin və şagirdlərin böyük marağına səbəb olmuşdur. İlk dəfə 1985/86-cı dərs ilində V kurs tələbələri Nəbiyeva Arzu və Çərkəzova Balaxanım XI sinif şagirdləri ilə bu mövzuda xüsusi məşğələ aparmaq üçün hazırlamışlar və pedaqoji təcrübə müddətində yerinə yetirmişlər. Bundan sonra demək olar ki, hər il məktəbdə “Integral” mövzusunu keçərkən habelə XI sinif materialının təkrarı dövründə təcrübəçi tələbələr tədqiqatın digər materialları ilə yanaşı həmin mövzuda məşğələlər aparmışlar.

Qeyri müəyyən integralın eyniçevirmələrdə tətbiqi üçün əvvəlcə uyğun törəməni sadələşdirmək lazımdır. Bununla əlaqədar ən sadə çalışmaların yerinə yetilməsində əsas fakt ondan ibarətdir ki, hər bir funksiya onun törəməsinin ibtidai funksiyası kimi baxmaq olar. Daha doğrusu iki F və f funksiyaları $F'(x) = f(x)$ $a < x < b$ (1) asılılığı ilə əlaqədardırsa, onda onlar $F(x) = \int f(x)dx$ (2) münasibəti ilə də bağlıdır. Sonuncu bərabərliyi başa düşmək lazımdır: $F(x)$ funksiyası $f(x)$ -in integrallanmasından alınan funksiyalardan biridir, başqa sözlə $F(x)$ funksiyası $f(x)$ -in ibtidai funksiyalarından biridir. Buradan aydındır ki, F funksiyasının yazılışını sadələşdirmək çətindirə onda əvvəlcə onun $f(x) = F'(x)$ törəməsinə baxmaq faydalı ola bilər: f funksiyasının yazılışını sadələşdirə bilirsə, onda sonra F funksiyası üçün də kifayət qədər sadə düstur tapa bilərik. Məsələn, $F(x) = \sin 3x \cos^3 x + \cos 3x \sin^3 x$ (3) funksiyasını sadələşdirmək üçün triqonometriyadan məlum aparatı tətbiq etsək bir qədər mürəkkəb

çevirmələr aparmaq lazım gəlir. Bəs əvvəlcə bu funksiyanın törəməsini sadələşdirmək asan olarmı? Cavab:

$$f(x) = F'(x) = 3\cos 3x \cos^3 x - 3\sin 3x \cos^2 x \sin x - \\ - 3\sin 3x \sin^3 x + 3\cos 3x \sin^2 x \cos x = 3\cos 4x$$

çevirməsindən aydın görünür. Beləliklə, $f(x) = 3\cos 4x$ alırıq.

Lakin $F(x) = \int f(x)dx = \int 3\cos 4x dx + C = \frac{3}{4}\sin 4x + C$ (4), burada

c hər hansı sabitdir. (3) və (4) –dən $c=0$ alınır, deməli baxılan funksiyanın sadə şəkili $\frac{3}{4}\sin 4x$ -dir. Bu çalışmanın həlli ilə əlaqədar

belə eksperiment apardıq: Göstərilən funksiyanı sadələşdirməyi 2 qrup şagirdlərdən tələb etdik. 1-ci qrupdan həmin ifadəni trigonometrik aparatın, 2-ci də isə integralın tətbiqi ilə sadələşdirməyi qarşıya qoyduq. 2- ci qrup çalışmanı 5 dəqiqəyə həll etdi. 1-ci qrup isə 45 dəqiqəyə dərs müddətində bir nəticəyə gələ bilmədi. Sonra onlara göstəriş verdik ki, $\sin 3\alpha$ və $\cos 3\alpha$ - in ifadələrindən istifadə edin. Bundan sonra çalışmanı 20 dəqiqəyə

$$F(x) = (3\sin x - 4\sin^3 x)\cos^3 x + (4\cos^3 x - 3\cos x)\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin 4x$$

yazmaqla həll etdilər. Məlum olmuşdur ki, I qrup əvvəlcə $\sin 3x$ və $\cos 3x$ -in ifadələrini yada sala bilməmişlər, sonra isə

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \quad \text{və} \quad \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x \quad \text{olduğunu müəy-}$$

yənləşdirməkdə çətinlik çəkmişlər. Onu da bilmək lazımdır ki, törəmənin tətbiqi ilə eyni çevirmə aparmaq əsasən göstərilən növdə funksiyalar üçün faydalıdır.

7. Bəzən eyni bir priyomu bir deyil bir neçə dəfə tətbiq etmək lazım gəlir. Budur $F(x) = (x+a+b)^3 - (x+a-b)^3 - (x-a+b)^3 - (-x+a+b)^3$ çoxhədlisinin sadələşdirilməsi üçün belə olur:

$$f(x) = F'(x) = 3(x+a+b)^2 - 3(x+a-b)^2 - \\ - 3(x-a+b)^2 + 3(-x+a+b)^2;$$

$$\varphi(x) = f'(x) = 6(x+a+b) - 6(x+a-b) - 6(x-a+b) - 6(-x+a+b)$$

; Aşkardır ki, $\varphi(x) \equiv 0$ odur ki, $f(x) = \int 0 \cdot dx = c_1$, yəni $f(x) = c_1$;

$$c_1 = f(0) = 24ab, \quad f(x) = 24ab, \quad \text{onda } F(x)\text{-ə baxaq:}$$

$$F(x) = \int f(x)dx = \int 24abdx = 24abx + C, \quad \text{beləliklə } c = F(0) = 0,$$

$$\text{beləliklə } F(x) = 24abx.$$

8. Bəzən əvvəl ibtidai funksiyanı sadələşdirmək əlverişli olur. Fərz edək ki, hər hansı verilmiş f funksiyasının yazılışını sadələşdirmək lazım gəlir. İki eynigüclü (1) və (2) münasibətləri göstərir ki, f funksiyasının yazılışını o vaxt sadələşdirmək mümkün ola bilər ki, onun F ibtidai funksiyasının yazılışını kifayət qədər sadələşdirmək imkanı olsun. Buradan alınır: verilmiş f funksiyasının yazılışını sadələşdirmək çətin olduğu hallarda əvvəlcə onun F ibtidai funksiyasına baxmaq faydalı (və sadə) ola bilər. $f(x) = F'(x)$ eyniliyindən istifadə edərək f -in daha sadə ifadəsini almaq bəzən münasib olur.

Fərz edək ki, $tgx + 2tg2x + 4tg4x + 8tg8x = ctgx - 16ctg16x$ (5) eyniliyini isbat etmək tələb olunur. Bunun üçün həmin eyniliyin sol tərəfini $f(x)$ -lə işarə edək. Bu funksiyanı sadələşdirməyin yolu görünmürsə onda “ibtidai funksiyanı tapmaq və sadələşdirmək daha sadə ola bilməzmi?” Cavab:

$$F(x) = \int f(x)dx = -\ln|\cos x| - \ln|\cos 2x| - \ln|\cos 4x| - \ln|\cos 8x| =$$

$$= -\ln|\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{\sin 2x}{2 \sin x} \cdot \frac{\sin 4x}{2 \sin 2x} \cdot \frac{\sin 8x}{2 \sin 4x} \cdot \frac{\sin 16x}{2 \sin 8x}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{\sin 16x}{16 \sin x}\right| + C = -\ln|\sin 16x| + \ln|\sin x| + \ln 16 + C$$

hesablamasından görünür. İndi $f(x)$ -i asanlıqla hesablamaq olar: $f(x) = F'(x) = -16ctg16x + ctgx$. Bununla da (5) eyniliyi isbat oldu.

9. Qeyri müəyyən inteqralın tətbiqi ilə həll edilən yuxarıda baxdığımıza oxşar məsələlərin onun xüsusi halı olan müəyyən inteqralın tətbiqi ilə də həll edilə bilər. Məlum Nyuton-Leybnis düsturunun aşağıdakı müvafiq ifadəsini nəzərə alsaq bu elə bir gözlənilməz hal deyil. (a, b) -də kəsilməyən F və f funksiyaları yalnız və yalnız

$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$, $x \in (a, b)$ (2') münasibəti ilə əlaqələndikdə

$F'(x) \equiv f(x)$, $x \in (a, b)$ (1') asılılığı ilə əlaqədardır. Buradan aydındır ki, F funksiyasının yazılışını sadələşdirmək lazımdırsa, onda əvvəlcə onun f törəməsini sadələşdirmək, sonra isə (2') düsturuna əsasən F -i tapmaq faydalı ola bilər. Eyni çevirmələr üçün faydalı ola bilən başqa sadə mühakimə “hər hansı $[a, b]$ yarım intervalında kəsilməyən f və g funksiyaları həmin yarım intervalda $f(x) \equiv g(x)$ şərtini ödəyirsə, onda

ixtiyari $x \in [a, b]$ üçün $\int_a^x f(t)dt = \int_a^x g(t)dt$ faktıdır. Bu faktın tətbiqini

Nyuton binomu düsturunun çıxarışı üzərində nümayiş etdirmək olar. [14] də bu düstur çoxxədlinin əmsallarını onun törəmələrinin sıfır nöqtəsindəki qiymətləri vasitəsi ilə ifadə düsturundan istifadə etməklə çıxarılır. Ümumiləşdirmə üçün əhəmiyyətli olan hər iki yanaşmanın məktəb proqramında olması məqsədəuyğundur.

10. İnteqralın tətbiqi ilə bəzi bərabərsizlikləri isbat etmək mümkündür. Bərabərsizliklərin isbatına müəyyən inteqralın bir çox tətbiqləri belə bir sadə teoremə əsaslanır: f və g funksiyaları hər hansı yarım intervalda kəsilməyəndirsə və $[a, b]$ - in hər yerində $f(x) \leq g(x)$ bərabərsizliyi ödənirsə, onda $x \in [a, b]$ üçün

$$\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt \quad (6).$$

Əlavə olaraq $[a, b]$ -dən götürülmüş hər hansı x_0 üçün $f(x) < g(x)$ ciddi bərabərsizliyi ödənirsə, onda $x > x_0$

olduqda $\int_a^x f(t)dt < \int_a^x g(t)dt$ ciddi bərabərsizliyi ödəyir. Bu teoremdən

bərabərsizliyin doğruluğunun bilavasitə yoxlanılmasının belə priyomu alınır: $F(x) \leq G(x)$ ($a \leq x < b$) (7) bərabərsizliyini yoxlamaq tələb olunursa, onda əvvəlcə bu funksiyaların f və g törəmələri ($f = F'$, $g = G'$) analoji bərabərsizliyi yoxlamağın faydalı olduğu alına bilər, başqa sözlə $f(x) \leq g(x)$ ($a \leq x < b$) (8) bərabərsizliyini

yoxlamaq olar. (8) doğrudursa, onda $\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt$ (9) da doğrudur. (9) bərabərsizliyinin sol və sağ tərəfləri isə ya uyğun olaraq $F(x)$ və $G(x)$ ilə üst-üstə düşür, yaxud da onlardan hər hansı sabitlə fərqlənir. Bir misal göstərməklə kifayətlənək: $\sin x \leq x$ ($0 \leq x < \infty$) (10) bərabərsizliyindən istifadə edərək həmin x -lər üçün $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ (11), $\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!}$ (12), $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ (13) bərabərsizliklərinin doğruluğunu yoxlayın.

(10) bərabərsizliyinin hər tərəfini 0-dan x -ə qədər sərhəddə ($0 \leq x < \infty$) inteqrallayaq. Baxılan teoremə əsasən $\int_0^x \sin t dt \leq \int_0^x t dt$ və ya və ya $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$, bu isə (11)-in isbatıdır, buradan yenə həmin

teoremə əsasən $\int_0^x \cos t dt \geq \int_0^x \left(1 - \frac{1}{2}t^2\right) dt$ və ya (12)-i və $\int_0^x \sin t dt \geq \int_0^x \left(t - \frac{t^3}{3!}\right) dt$ -dən (13) alınır.

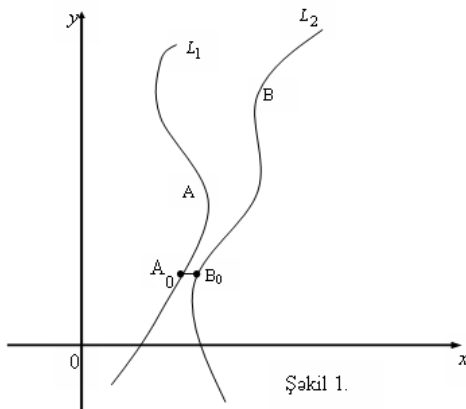
Eyniçevirmələrə aid deyilənləri müvafiq çalışmalar vasitəsilə möhkəmləndirmək şagirdlərin ümumiləşdirmə qabiliyyəti və vərdislərinin inkişaf etdirilməsinə çox kömək edir.

1.8. Funksiyalar arasında məsafə (XI s). Məktəbdə riyazi analizin elementləri öyrənildiyindən burada funksiya anlayışı xüsusi yer tutur. Bununla əlaqədar olaraq müəllimin müasir riyazi analizin əsas anlayışları ilə daha dərinlən tanışlığı zəruridir. Bu baxımdan əvvəlcə ümumiyyətlə məsafə sonra isə onun ümumiləşdirməsi kimi funksiyalar arasındakı məsafə haqda müəyyən məlumatın şagirdlərə verilməsini məqsəduyğun sayırıq. “A və B şəhərləri arasında məsafə” konkret şərtədən asılı olaraq müxtəlif mənə kəsb edir. Təyyarəçi bu məsafəni daha çox düz xətt boyunca ölçür, maşının sürücüsü isə onu düz xətdən fərqli şossə yolu hesab edir. Müstəvidə iki nöqtə arasındakı məsafə $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (1) düsturu ilə hesablanır. Buna Evkilid

məsafəsi deyilir. Bu məsafədən fərqli məsafəyə misal olaraq, düzgün planlaşdırılmış şəhərdə iki məntəqə arasındakı ən qısa yolla gedilən məsafəni göstərmək olar. “A evindən B məktəbinə qədər 200 m sonra dönərək 100 m get” riyazi olaraq o deməkdir ki, XOY koordinat müstəvisində, oxlar şəhərin küçələrinə iki istiqamətdə paralel olmaqla, $A(x_1, y_1)$ və $B(x_2, y_2)$ nöqtələri arasındakı məsafə (Şəkil 1.) $S(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ (2) düsturu ilə hesablanır. Göstərilən nöqtələr arasındakı məsafə dedikdə $|x_2 - x_1|$ və $|y_2 - y_1|$ ədədlərindən ən böyüyünü, yəni $m(A, B) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$ (3) götürməyin münasibliyi halları da vardır. Buna isə çox vaxt Minkovski məsafəsi deyilir. (1), (2), (3) düsturlarına analoji olaraq üç ölçülü fəzanın $A(x_1, y_1, z_1)$ və $B(x_2, y_2, z_2)$ nöqtələri arasındakı $d(A, B)$, $S(A, B)$, $m(A, B)$ məsafələri daxil edilə bilər.

Müstəvinin və fəzanın nöqtələri arasında hər hansı $\rho(A, B)$ məsafəsi müəyyəndirsə, onda göstərilən məsafələr mənada “dairələrə və kürələrə” baxmaq olar:

m məsafəsi mənada mərkəzi A_0 nöqtəsində radiusu r olan dairə müstəvi üzərində mərkəzi A_0 nöqtəsində və koordinat oxlarına paralel tərəflərinin uzunluğu $2r$ olan kvadrat, mərkəzi A_0 nöqtəsində olan kürə isə mərkəzi A_0 nöqtəsində və koordinat oxlarına paralel tillərinin



Şəkil 1.

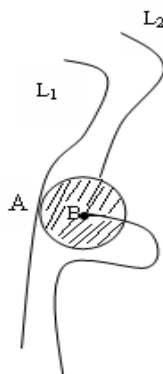
uzunluğu $2r$ olan kubdur. d məsafəsinə görə dairə və kürə elə onların özüdür. S məsafəsinə görə dairə və kürənin nədən ibarət olmasını müəyyənləşdirməyi şagirdlərə tapşırmaq olar. Şagirdlərin diqqətini nöqtələr arasındakı məsafə ilə yanaşı, nöqtələr çoxluqlarının, məsələn, ayrılərin, xüsusi halda funksiyaların qrafikləri arasındakı məsafənin hesablanmasına yönəltmək maraqlıdır. Bu zaman hər bir əyriyə və ya funksiya vahid obyekt, ayrılə və funksiyalar çoxluğunun ünsürləri

kimi baxılır. Bu mənada funksiyaları yenidən “nöqtələr” adlandırmaq olar. Lakin bu adi üç ölçülü fəzanın deyil, mücərrəd funksional fəzanın nöqtələridir. Belə funksional fəzanın həndəsi xassələri bu fəzanın “nöqtələri” funksiyaları arasındakı məsafəni necə daxil etməkdən asılıdır. Yenə iki əyri arasındakı məsafənin daxil edilməsinin məqsədəuyğunluğunu nümayiş etdirən konkret misaldan başlayaq. Fərz edək ki, iki əyri xəritə üzərində, kanalla birləşdirmək lazım gələn, iki çayı təsvir edir. Belə hesab edək ki, kanal çayların ən çox yaxın olduqları yerdə çəkilməlidir. Göstərilən yanaşmada L_1 və L_2 ayriləri arasındakı δ məsafəsini belə hesablamaq məqsədəuyğundur: 1) düsturu ilə müxtəlif A və B nöqtələri arasındakı məsafənin hesablanmasına baxmalı, burada $A \in L_1$, $B \in L_2$ onlardan ən kiçiyini, yəni $\delta(L_1, L_2) = \min_{\substack{A \in L_1 \\ B \in L_2}}(A, B)$ (4) götürməli.

1-ci şəkildə (4) düsturuna görə evklid məsafəsinin minimum olduğu A_0 və B_0 nöqtələri göstərilir. (4) düsturu ilə müstəvi üzərində ixtiyari iki nöqtələr çoxluğu arasındakı məsafəni təyin etmək olar, lakin bu ümumi halda min yerində inf yazılmalıdır, çünki ola bilər ki, minimuma çatılmaz. (4) –dən alınır ki, L_1 və L_2 çoxluqlarının ortaq nöqtələri varsa, onda $\delta(L_1, L_2) = 0$. Ümumiyyətlə bunun tərsi doğru deyil. Ox oxu ilə

$y = \frac{1}{x}$ funksiyasının qrafiki arasındakı məsafəyə

diqqət etməklə bunu görmək olar. Lakin, çox vaxt baxılan haldan fərqli olaraq ayrilər heç yerdə bir-birindən aralanmırsa, yaxın hesab edilirlər. Əlbəttə bu ifadəni bir qədər dəqiqləşdirmək lazımdır. Bu haqda bir qədər sonra. Hələlik belə bir misala da baxaq. Fərz edək ki, L_1 və L_2 ayriləri asfaltlanmış iki yolu təsvir edir və bunları maşınla sulamaq lazımdır (Şəkil 2). Bunun üçün maşın quruluşuna görə mərkəzi dayandığı nöqtədə olan R radiuslu dairəni sulaya bilər. Maşının R təsir radiusu elə olmalıdır L_2 əyrisi üzrə hərəkət etməklə L_1



Şəkil 2.

yolunu da sulaya bilsin. Ən kiçik belə radius L_1 -in və L_2 -dən məsafəsini xarakterizə edir. Bu məsafə riyazi olaraq necə ifadə olunur? L_1 əyrisinin A nöqtəsini qeyd edək. Bu nöqtənin L_2 -in B nöqtəsindən sulanması üçün maşının təsir radiusu $d(A, B)$ -dən kiçik olmamalıdır. Onun L_2 -in heç olmasa bir nöqtəsindən sulanması üçün maşının təsir radiusu $R(A, L_2) = \min_{B \in L_2} d(A, B)$ olmalıdır. B radius A nöqtəsinin

dəyişməsi ilə dəyişir. Lakin L_2 -dən bütün A nöqtələri sulanmalıdır. Bunun üçün müxtəlif A nöqtələri üçün tapılmış $R(A, L_2)$ radiuslarından ən böyüyü götürülməlidir. Bu isə L_1 əyrisinin L_2 -dən məsafəsini göstərən axtarılan ifadədir, yəni $R(L_1, L_2) = \max_{A \in L_1} \min_{B \in L_2} d(A, B)$ (5).

Eyni qayda ilə maşının L_1 yolu boyunca hərəkət etməklə L_2 yolunu suladığı radiusu tapmaq olar: $R(L_2, L_1) = \max_{B \in L_2} \min_{A \in L_1} d(A, B)$.

Bir qayda olaraq $R(L_1, L_2)$ və $R(L_2, L_1)$ bərabər deyil, yəni R məsafələri L_1 və L_2 ayrılırlarına nəzərən simmetrik deyil. Maşın iki yoldan hansı biri ilə gedirsə təsir radiusu elə olmalıdır ki, qonşu yolu sulaya bilsin, onda bu halda maşının hərəkətinin minimum təsir radiusu $R(L_1, L_2)$ və $R(L_2, L_1)$ kəmiyyətlərindən ən böyüyü olacaqdır.

$$D(L_1, L_2) = \max \left\{ \begin{array}{l} \max_{A \in L_1} \min_{B \in L_2} d(A, B) \\ \max_{B \in L_2} \min_{A \in L_1} d(A, B) \end{array} \right\} \quad (6) \text{ kəmiyyəti } L_1 \text{ və } L_2$$

əyrilərinin bir-birindən qarşılıqlı uzaqlığını xarakterizə edir və L_1, L_2 -yə nəzərən simmetrik məsafələrdir. Yalnız və yalnız L_1 və L_2 tamamı ilə üst-üstə düşdükdə $D(L_1, L_2) = 0$. (Bunu (4) düsturu ilə daxil edilən məsafə ilə müqayisə etməli). (6)-da fiqurlu mötərizədəki max və min, sup və inf ilə əvəz edilsə onda onu müstəvidə ixtiyari iki çoxluq arasındakı məsafəni ölçmək üçün tətbiq etmək olar. Bu anlayışın müəllifi alman riyaziyyatçısı Hausdorfdur. Odur ki, ona Hausdorf məsafəsi deyilir. (6) – da $d(A, B)$ -ni $m(A, B)$ ilə əvəz etsək onda çox

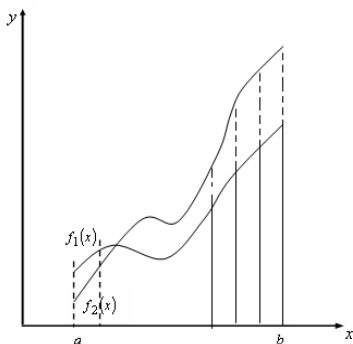
vaxt Hausdorf – Evklid məsafəsi adlanan $D(L_1, L_2)$ -dən fərqli, L_1 və L_2 çoxluqları arasındakı Hausdorf-Minkovski məsafəsi adlanan başqa $M(L_1, L_2)$ Hausdorf məsafəsini alırıq. Əyrilər arasında Hausdorf məsafəsi anlayışının riyaziyyatda göstərilən tətbiqləri ilə yanaşı onun faktik tətbiqlərinə aid çoxlu misallar göstərmək olar. Şagirdlərin fizikadan tanış olduqları iki şüalı elektron assiolqrafin ekranında elektron siqnallarının yaxınlığını qiymətləndirmədə hər hansı real cihazın xarakteristikasının çıxarılmasında və s. Hausdorf məsafəsindən istifadə edilir ki, bu da ümumiləşdirmə ilə yanaşı fənlər arası əlaqə üçün də faydalıdır. Baxılan misallar belə fikir yaradır ki, funksiyalar arasındakı məsafəni onların müstəvidəki qrafiklərindən ibarət uyğun əyrilər arasındakı məsafə kimi başa düşmək olar. Həqiqətən də çox vaxt belə edilir. Xüsusi halda əyrilər və çoxluqlar arasındakı yuxarıda baxılan məsafə növlərindən funksiyalar arasındakı məsafəni ölçmək üçün də istifadə edilə bilər. Lakin, məlumdur ki, funksiyanın qrafiki müstəvi üzərində, x və y koordinatlarının rolu eyni olmayan, (x, y) nöqtələrinin spesifik çoxluğu. Xatırlayaq ki, koordinat müstəvisində əyri və ya ümumiyyətlə nöqtələr çoxluğu hər hansı f funksiyasının qrafikidir, başqa sözlə yalnız x və yalnız Ox oxunun hər bir x nöqtəsindən qaldırılmış perpendikulyar bu çoxluğu birdən çox olmayan nöqtədə kəsirsə f funksiyası qrafik verilir. Bu zaman uyğun perpendikulyarların verilmiş qrafiklə kəsişməsi boş olmayan x -lər alınmış funksiyanın təyin oblastını əmələ gətirir. Funksiya üçün qrafiklərin göstərilən spesifikasiyinə görə, ümumi halda müstəvi çoxluqlarına tətbiqi münasib olmayan, xüsusi məsafə anlayışı da daxil edilir. Çox vaxt təyin oblastı ədədi çoxluqlar deyil, daha mürəkkəb təbiətli obyektlər olan ədədi funksiyalar arasındakı məsafəni ölçmək lazım gəlir. Bu halda qrafik anlayışı kifayət qədər mürəkkəbləşir və əvvəlki mühakimələr ümumiyyətlə tətbiq olunmayan görünə bilər. $[a, b]$ parçasında verilmiş iki kəsilməyən f_1 və f_2 funksiyaları arasındakı məsafə daha əənənəvi $C(f_1, f_2) = \max_{x \in [a, b]} |f_1(x) - f_2(x)|$ (7) düsturu ilə təyin edilir. Məsafənin

belə verilmə üsulu təyin oblastı parçaya nisbətən daha mürəkkəb olan, hətta argumenti ədəd olmayan, funksiyalara tətbiq edilir. (7) ilə daxil edilən məsafəyə bərabər ölçülü metrika deyilir. Riyaziyyatda məsafəyə, ümumiyyətlə o, hər hansı xassəyə malikdirsə, metrika deyilir. Bu haqda sonra qeydimiz olacaqdır. Bu metrikaya ona görə bərabər ölçülü deyilir

ki, $c(f_1, f_2)$ məsafəsinin kiçikliyi eyni zamanda bütün $|f_1(x) - f_2(x)|$, $x \in [a, b]$ fərqlərinin dərhal kiçik olmasını göstərir. Bu məsafə simmetrikdir, yəni $c(f_1, f_2) = c(f_2, f_1)$ və yalnız və yalnız f_1, f_2 funksiyaları eyniliklə sıfır bərabər olduqda o, sıfır bərabərdir. Üç ölçülü fəzaya analogi olaraq bütün kəsilməz və verilmiş $[a, b]$ parçasında kəsilməyən $f(x)$ funksiyalar “fəzasında” bərabər ölçülü metrikə köməyi ilə “kürə” anlayışını daxil etmək olar. Belə ki: (7) məsafəsi mənada verilmiş f_0 funksiyasından r -dən çox olmayan məsafədə yerləşən, yəni bütün f -lər üçün $c(f, f_0) \leq r$ olan f funksiyaları

çoxluğuna mərkəzi f_0 nöqtəsində,

başqa sözlə f_0 funksiyasında olan r radiuslu kürə deyilir. Bu anlayışı həndəsi şərh etmək çətin deyil. $[a, b]$ parçasının nöqtələrindən OX oxuna qaldırılmış hər bir perpendikulyar üzərində ucları bu perpendikulyarların

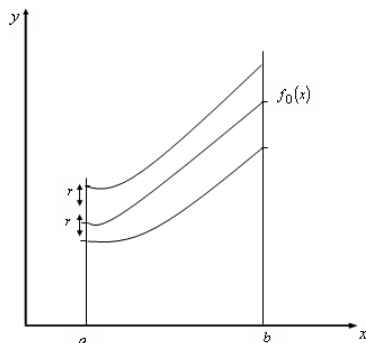


Şəkil 3.

f_1, f_2 funksiyalarının qrafikləri ilə kəsişmə nöqtələrində olan parçaları göstərək (Şəkil 3). Belə parçalardan ən böyüyünün uzunluğunu f_1, f_2 funksiyaları arasındakı məsafə qəbul

edirik. Mərkəzi f_0 nöqtəsində olan r radiuslu kürəni uyğun olaraq belə almaq olar: f_0 funksiyasının qrafikini

özünə paralel r qədər yuxarı və aşağı çəkək. Müstəvidə eni şaquli xətt üzrə $2r$ -ə bərabər əyri xətti zolaq alırıq (Şəkil 4). Qrafikləri bu zolaqdan kənara çıxmayan bütün kəsilməz



Şəkil 4.

funksiyalar baxdığımız mərkəzi f_0 nöqtəsində olan r radiuslu kürədir.

Bərabər ölçülü məsafəni Hausdorf metrikasının köməyi ilə ölçülən məsafə ilə müqayisə etdikdə aydın olur ki, bəzi hallarda ikinci məsafənin birinciyə nisbətən üstünlüyü vardır. 3-cü şəkildən görünür ki, qrafiklərin dik hissələrində şaquli xətt üzrə onlar arasındakı, funksiyalar arasındakı bərabər ölçülü məsafəni də verən, məsafə bu funksiyalar arasındakı Hausdorf məsafəsinə nisbətən kifayət qədər böyük ola bilər. Hələlik söhbət yalnız kəsilməyən funksiyalardan gedir. Hausdorf məsafəsi bütün məhdud (o cümlədən kəsilən) verilmiş $[a, b]$ parçasında təyin edilmiş funksiyalar üçün də münasib metrika daxil etmək imkanı yaradır. Səbəbi odur ki, bu halda funksiyalar arasındakı Hausdorf məsafəsinə onların qrafikləri arasındakı məsafə kimi deyil, necə deyirlər tamamlanmış qrafikləri arasındakı məsafə kimi başa düşmək münasibdir. “Tamamlanmış qrafik” anlayışının mənasını izah etmək

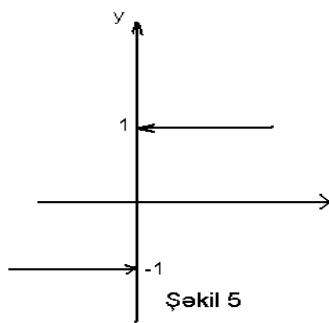
üçün $\text{sign}x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ olduqda. Bu

funksiyanın qrafiki (Şəkil 5) kəsilən əyridir. Lakin şagirdlər onu çox vaxt səhvən 6-cı şəkildəki kimi təsvir edirlər. Səhv ondan ibarətdir ki, yeni əyri funksiyanın qrafiki ola bilməz, çünki burada $x=0$ nöqtəsinə y -in bir qiyməti deyil parçanın bütün nöqtələri qarşı qoyulmuşdur. Lakin səhvin psixoloji səbəbi onunla əlaqədardır ki, bütün qrafiklər karandaş kağızdan ayırmadan çəkilməlidir. Burada “tamamlanmış qrafik” anlayışının dəqiq tərfi, ixtiyari funksiya üçün deyil yalnız birincinöv kəsilməsi olan, başqa sözlə hər bir x_0 nöqtəsində

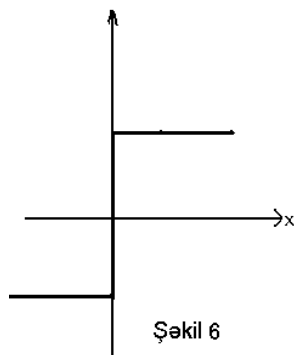
$x \rightarrow x_0$ isə sağ və sol tərəfli limiti olan funksiyalar üçün yəni $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x < x_0)}} f(x)$ və

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x > x_0)}} f(x)$ limitləri varsa, göstərilir. Bu

limitlər uyğun olaraq $f(x_0 + 0)$ və $f(x_0 - 0)$ ilə işarə edilir. Yalnız və

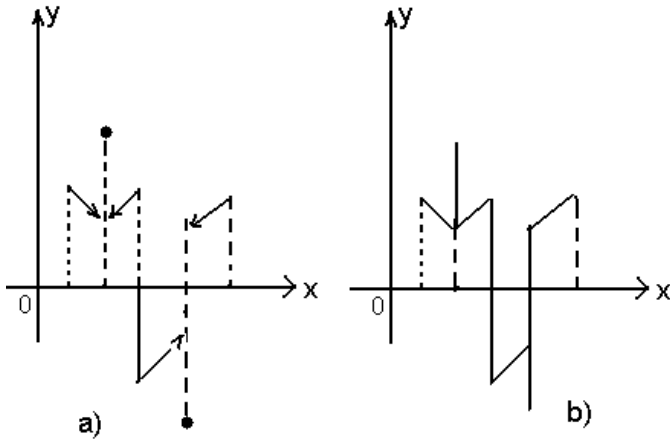


Şəkil 5



Şəkil 6

yalnız $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$ olduqda $f(x_0)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməyəndir. Kəsilmə nöqtələrində isə $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ limitlərindən heç birisi, xüsusən, $f(x_0)$ ilə üst-üstə düşməyə bilər. Hər hansı $x_0 \in [a, b]$ nöqtəsi götürək və $M(x_0) = \max\{f(x_0), f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)\}$,

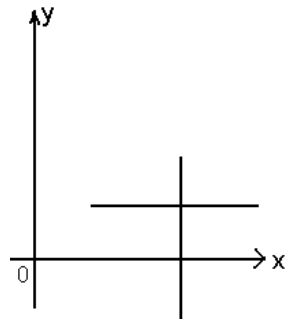


Şəkil 7

$m(x_0) = \min\{f(x_0), f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)\}$ işarə edək. x_0 kəsilmə nöqtəsidirsə, onda $f(x)$ funksiyasının qrafikinin ucları $(x_0, m(x_0))$ və $(x_0, M(x_0))$ nöqtələrində olan şaquli parça ilə tamamlayırıq.

Kəsilməzlik nöqtələrində tamamlanmanın bu üsulu qrafiki dəyişmir. Nəticədə müstəvidə alınmış nöqtələr çoxluğu baxılan funksiyanın tamlanmış qrafiki olur. 7 a şəklində hər hansı kəsilmə funksiyasının qrafiki 7 b – də isə tamlanmış qrafiki göstərilir. Kəsilməyən funksiyalar üçün tamamlanmış qrafik adı qrafiklə eynidir.

Tamamlanmış qrafikin tərifindən alınır ki, Ox oxuna perpendikulyar hər bir düz xətt ya onu kəsmir, yaxud nöqtəyə



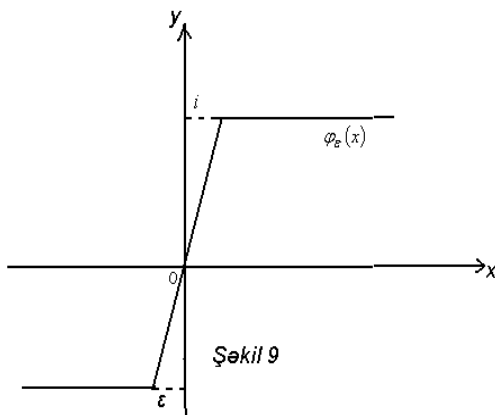
Şəkil 8

çevrilə bilən qapalı parça üzrə kəsir. Lakin belə xassəyə malik hər bir çoxluq hər hansı funksiyanın tamamlanmış qrafiki olmaz. Məsələn, 8-ci şəkildə göstərilən xaçvari çoxluq heç bir funksiyanın tamamlayıcı qrafiki deyil. İndi belə bir tərif vermək olar: f_1 və f_2 funksiya-larının tamamlanmış qrafikləri arasındakı Hausdorf məsafəsinə onların arasında Hausdorf məsafəsi deyilir. Adi qrafiklə yanaşı tamamlanmış qrafikdən istifadənin məqsədəuyğunluğu kəsilməyən funksiyanı təqribən kəsilməyən qəbul etdikdə meydana çıxır. Yenə $\text{sign} x$ funksiyasına baxaq. Bunu hər hansı mənada yaxın olduğu kəsilməyən funksiya ilə əvəz etmək istədikdə təbii ki, onun sıçrayışı dik xətlə, lakin kəsilməz qalxma ilə, “əvəz edilir”, yəni $\varphi_\varepsilon(x)$ funksiya-sına (Şəkil 9) baxılır. Aşkardır ki, ε nə qədər kiçik olarsa $\varphi_\varepsilon(x)$ o qədər $\text{sign} x$ -ə yaxın olar. Lakin bununla $\text{sign} x$ funksiya-sının adi qrafiki Hausdorf məsafəsi mənada $\forall \varepsilon$ üçün $\varphi_\varepsilon(x)$ funksiya-sının qrafikindən uzaq olacaqdır.

Çünki $\varphi_\varepsilon(x)$ funksiya-sının qrafiki üzərində $\text{sign} x$ funksiya-sından məsafəsi $\frac{1}{2}$ - dən böyük və ya bərabər nöqtə vardır. Eyni zamanda $\varepsilon \rightarrow 0$ da $\text{sign} x$ funksiya-sının tamamlanmış qrafiki ilə $\varphi_\varepsilon(x)$ funksiya-sının qrafiki arasındakı Hausdorf məsafəsi sıfıra yaxınlaşacaqdır. Funksiyalar arasında məsafənin daha bir, integral və ya Lebeq metrikası adlanan, verilmə üsuluna toxunaq:

$$J(f_1, f_2) = \int_a^b |f_1(x) -$$

(8). Bu tərifdən görü-nür ki, $J(f_1, f_2)$ həndəsi olaraq f_1, f_2 funksiya-larının qrafikləri və $x = a$, $x = b$ nöqtə-lərindən Ox oxuna qaldırılmış perpendikulyar-ların əmələ gətirdiyi müstəvi fiqurun sahə-

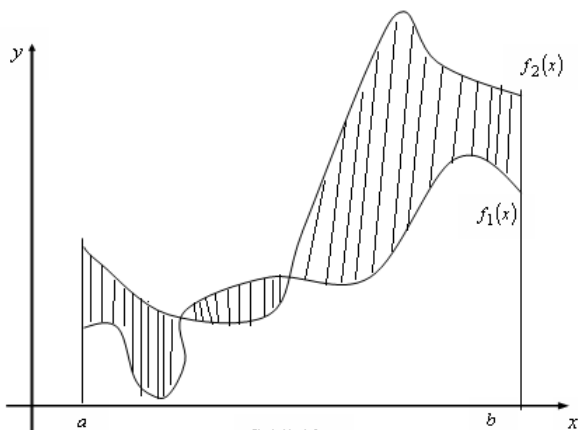


Şəkil 9

sindən ibarətdir (Şəkil 10). Aşkardır ki, bərabər ölçülü məsafə mənadə yaxın olan funksiyalar integral metrikası mənadə da yaxındır, lakin tərsi doğru deyil.

$J(f_1, f_2)$ -in

əvvəlcədən verilmiş kiçik müsbət d ədədindən kiçik olması və eyni zamanda hər hansı $x_0 \in [a, b]$ nöqtəsində $|f_1(x) - f_2(x)|$ fərqinin əvvəlcədən verilmiş böyük müsbət D ədədinə bərabər olması üçün iki kəsilməz



Şəkil 10.

f_1, f_2 funksiyalarının qrafikini neçə çəkmək lazım gəldiyini asanlıqla hiss etmək olar. Lakin integral metrikası mənadə iki funksiyanın yaxınlığı $[a, b]$ parçasının əksər nöqtələrində hər halda $|f_1(x) - f_2(x)|$ fərqinin kiçikliyinə təminat verir; daha doğrusu $f_1(x)$ - i $f_2(x)$ - dən nisbətən çox fərqlədirsə onda bu yalnız nisbətən az davamda yaranan $x \in [a, b]$ nöqtələri çoxluğunda ödənilir. Ümumiyyətlə iki funksiya arasındakı integral məsafəsinin kiçikliyindən onlar arasındakı Hausdorf məsafəsinin kiçikliyi alınmır. Habelə, Hausdorf məsafəsi kiçikdirsə, onda integral məsafəsinin də kiçik olması məcburi deyil. Yuxarıda daxil edilən məsafə anlayışlarının bəzi ümumi cəhətlərini də göstərək. Qeyd etdik ki, (5) halında $R(L_1, L_2)$ məsafəsi simmetrik deyil. Lakin bu müstəsna haldır. Qalan bütün hallarda X_1 və X_2 elementləri arasındakı məsafə (ümumi halda onu $\rho(X_1, X_2)$ ilə işarə edirik) $\rho(X_1, X_2) = \rho(X_2, X_1)$ (9) xassəsini ödəyir. Məsafə anlayışının tətbiqi üçün başqa bir xassə olduqca mühümdür: ixtiyari üç X_1, X_2, X_3 elementləri üçün $\rho(X_1, X_2) \leq \rho(X_1, X_3) + \rho(X_2, X_3)$ (10). Bu xassə üçbucaq bərabərsizliyi adlanır. Ona görə ki, ən sadə halda müstəvinin nöqtələri arasındakı məsafə (1) düsturu ilə verildikdə,

bu xassə belə bir faktı ifadə edir ki, təpələri X_1, X_2, X_3 nöqtələrində olan üçbucağın bir tərəfinin uzunluğu qalan iki tərəfin uzunluqları cəmini aşmır. (10) xassəsini (4) düsturu ilə veriləndən başqa yuxarıda göstərilən bütün məsafələr ödəyir. Nəhayət məsafənin daha bir xassəsi belədir: Yalnız və yalnız $X_1 = X_2$ olduqda $\rho(X_1, X_2) = 0$ (11). Bu xassəni yuxarıda daxil edilən məsafələrin üçündən başqa qalanları ödəyir. Belə ki, artıq qeyd etdiyimiz kimi həmin xassə (4) məsafəsində habelə inteqral metrikasında yoxdur. Buna inanmaq üçün bütün

$$x \in [a, b] \quad \text{üçün} \quad f_1(x) = 0 \quad \text{və} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 \text{ olduqda} \\ 1, & x = 1 \text{ olduqda} \end{cases}$$

funksiyalar arasındakı məsafəyə baxmaq olar. Hausdorf məsafəsinə bütün müstəvilər ailəsində baxılırsa bu xassə burada da ödənilmir. Məsələn, hər hansı sərhədsiz və sərhədli iki eyni dairə arasındakı məsafə sıfır bərabərdir. Lakin Hausdorf metrikasına yalnız qapalı, yəni tərkibinə bütün sərhəd nöqtələri də daxil olan çoxluqlar sinifində baxılırsa o (11) xassəsini ödəyir. İnteqral metrikası isə baxılan $[a, b]$ parçasında kəsilməyən funksiyalar sinfində, habelə daha geniş funksiyalar sinfində, tərəflərdən birində hər bir $x \in [a, b]$ nöqtəsində (məsələn sağda) bir tərəfli kəsilməyən funksiyalar sinfində (11) xassəsini ödəyir. Beləliklə, ρ məsafəsində (11) xassəsinin olması tək-cə onun daxil edilməsi üsulundan deyil, habelə ρ -un baxıldığı elementlər çoxluğundan asılıdır. Deməyəsən, ρ məsafəsinin göstərilən (9), (10), (11) xassələri, elementləri arasındakı məsafə müəyyən edilən, məzmunlu ümumi çoxluqlar nəzəriyyəsini qurmaq üçün kifayətdir.

Hər bir X_1, X_2 cütləri arasında (9), (10), (11) xassələrini ödəyən mənfə olmayan $\rho(X_1, X_2)$ məsafəsi təyin edilən ixtiyari təbiətli ünsürlərin M çoxluğuna (məsələn, müstəvinin nöqtələri çoxluğu, funksiyalar çoxluğu, ayrılır çoxluğu) metrik fəza, ρ - məsafəsinə isə bu fəzanın metrikası deyilir. Metrik fəza anlayışı funksional analizdə, müasir funksional nəzəriyyəsində, topologiyada, riyazi fizikada və digər riyazi elmlərdə mühüm yer tutur.

1.9. Bezu teoremi (XI s.). Fərz edək ki, $f(x)$ həqiqi ədədlər sahəsində (R) $n \geq 1$ dərəcəli bir dəyişənli çoxhədlidir. Onda $f(x)$ - in

R-də n -dən az olmayan sayda kökləri vardır, a yalnız və yalnız $f(x)$ çoxhədli $(x - a)$ - ya bölündükdə həmin çoxhədlinin köküdür.

XX əsrin 60- cı illərinə qədər bu teorem məktəbdə isbatı ilə birlikdə öyrənilmişdir. Lakin sonrakı illərdə 2003-cü ilə qədər ümumtəhsil məktəblərinin proqramında o olmadı. Çoxhədlilərin öyrənilməsində müxtəlif ifadələrin eyni çevrilməsində, eynilik və bərabərsizliklərin isbatında, tənliklərin və bərabərsizliklərin həllində istər istəməz Bezu teoremindən və daha çox onun ümumiləşdirilmiş formasından istifadə etmək lazım gəlir. Odur yaxşı olar ki, dərs prosesində ümumiləşdirilmiş Bezu teoremi və onun tətbiqləri də öyrənilsin. Ümumiləşdirilmiş Bezu teoremi belədir: Fərz edək ki, $f(x, y, \dots, z)$ R həqiqi ədədlər sahəsində $k > 1$ dərəcəli $n \geq 1$ dərəcəli, $g(y, \dots, z)$ isə R-də $K - 1$ dərəcəli çoxhədlilərdir. $f[g(y, \dots, z), y, \dots, z]$ sıfır çoxhədlirsə, onda $f(x, y, \dots, z)$ çoxhədli $[x - g(y, \dots, z)]$ - ə bölünür.

Bu teoremi, habelə onun tətbiqlərini mənimsəmək üçün onunla əlaqədar olan bir sıra anlayışları da öyrənmək lazımdır.

Fərz edək ki, $f(x, y, \dots, z)$ R həqiqi ədədlər sahəsində çox dərəcəli çoxhədlidir. Yeri gəlmişkən qeyd edək ki, şagirdlər çox dərəcəli funksiyalarla əlaqədar müxtəlif əməliyyatlarla qarşılaşdıqları halda bu haqda da onlara ümumi məlumat verilmir. Belə funksiyaların şagirdlərə öyrədilməsi işinin metodik sistemini hazırlamaq ayrıca tədqiqatın mövzusu ola bilər.

Verilmiş R həqiqi ədədlər sahəsindən götürülmüş sıfırdan fərqli hər bir ədəd, habelə $\frac{R}{\{0\}}$ - dən olan verilmiş çoxhədlidən ədədi vuruqla fərqlənən hər bir çoxhədli baxılan çoxhədlinin R-də trivial çoxhədli bölmə adlanır. Verilmiş çoxhədlinin bütün başqa bölmələrinə R-də onun qeyri-trivial bölmələri deyilir. $f(x, y, \dots, z)$ çoxhədli R -də trivial olmayan bölmələri yoxdursa ona R-də gətirilməyən çoxhədli deyilir. Həqiqi R ədədlər sahəsində trivial olmayan bölmələri olan $f(x, y, \dots, z)$ çoxhədli R -də gətirilən çoxhədlidir. R sahəsində ortaq bölmələri yalnız sıfırdan fərqli ədəd (yəni sıfır dərəcəli çoxhədli) olan R-də verilmiş $f(x, y, \dots, z)$ və $g(x, y, \dots, z)$ çoxhədlilərinə qarşılıqlı sadədir deyilir. Çoxdərəcəli funksiyanın və ümumiləşdirilmiş Bezu teoreminin mək-

təbdə tətbiqinə aid çoxlu sayda nümunələr göstərmək olar. Məsələn,

“həqiqi R ədədlər sahəsində $\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac}{a^2 - b^2 - c^2 - 2bc}$

ifadəsini sadələşdirin” çalışmasını yerinə yetirmək üçün şagirdlərin cəbri kəsrin surət və məxrəcinin $(a + b + c)$ -ə bölündüyünü, hər iki həddin üç dəyişənli funksiya olmasını bilmələri tələb olunur.

Görünür ki, gələcəkdə məktəb riyaziyyat kursunun məzmununu müəyyənləşdirərkən çoxdəyişənli funksiyanın, birdəyişənli üçün Bezu teoremindən sonra (indiki proqramda XI sinifdə öyrənilən) onun ümumiləşdirilmiş formasının təlimin hansı mərhələsində öyrənilməsi üzərində düşünmək lazım gələcəkdir. Bu riyazi təlimin məzmununun müəyyən edilməsinin əsas tələblərinə, xüsusən ümumiləşdirmə meyarına uyğundur.

1.10. Kompleks ədədlərin öyrənilməsi məktəb riyaziyyatında ədədi sistemlərin qurulmasının sonuncu mərhələsidir. Odur ki, gələcək müəllimlər bilməlidirlər ki, yeni ədədlər sisteminin daxil edilməsinin zəruriliyinə gətirən praktik tələblərlə yanaşı belə genişlənməni tənliklər həlli əsasında nümayiş etdirmək faydalıdır. Məlumdur ki, əksər hallarda tənliklər də real proseslərin və vəziyyətlərin ideallaşdırılmış riyazi modelinin qurulması nəticəsində alınır. Təsədüfi deyil ki, $x + a = b (a, b \in N, b < a)$, $ax = b (a, b \in Z, b/a)$, $ax^2 = b (a \neq 0, \frac{b}{a} \geq 0, \frac{b}{a}$

tam kvadrat olmadıqda), $ax^2 + bx + c = 0 (b^2 - 4ac < 0)$ olduqda, $a^x = b (a > 0, b < 0)$ şəkildə tənlikləri həll edərkən uyğun olaraq tam, rəşional, həqiqi və kompleks ədədlər sistemini alırıq.

Diskriminantı mənfi olan kvadrat tənliyə gətirilən məsələyə ilk dəfə İtaliya alimi Cerol Kardano (1501-1576) baxmışdır. Sonra kub tənlikləri həll edərkən N.Tartal sofist ədədlərlə qarşılaşmışdır. R.Dekart isə göstərmişdir ki, k dərəcəli cəbri tənliyin “onun dərəcəsidəki vahidlərin sayı qədər kökü vardır” və bu köklər içərisində “təsəvvür edilən” və ya “xəyali” olanlar vardır. Həqiqi ədədlərin kifayət olmadığı hala aid daha bir misalı xatırlayaq: həqiqi ədədlər sahəsində müsbət əsasdan mənfi ədədin loqarifmi yoxdur. Müxtəlif məsələlərin təhlili riyaziyyatçıları ədədlər sahəsini, bir hissəsi xəyali ədədlərdən ibarət, kompleks ədədlər sahəsinə qədər genişləndirməyin zəruriliyinə gətirmişdir. XIX əsrin əvvəlində kompleks ədədlərin həndəsi şərhı və koordinat müstəvisində onlar üzərində əməllər daxil edilmiş və geniş yayılmışdır.

Həqiqi ədədləri nəzərdən keçirmək bu şərhin yekunlaşdırılmasına kömək edir. Həqiqi ədədlər, koordinat düz xətti üzərindəki nöqtələr, başlanğıcı koordinat düz xətti üzərində O nöqtəsində - koordinat sisteminin başlanğıcında olan vektorlar çoxluqlarını uyğun olaraq M_1, M_2, M_3 ilə işarə edək. Bu üç çoxluq arasında təbii qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq vardır. $M_1 \sim M_2 \sim M_3$ və ya $x \leftrightarrow M_x \leftrightarrow OM_x$. Eyni zamanda hər hansı nöqtənin vəziyyətini müəyyən etmək üçün müstəvi üzərində düzbucaqlı koordinat sistemində (x, y) ədədlər cütünün verilməsi lazımdır və tərsinə. Deməli həqiqi ədədlərlə koordinat düz xəttinin nöqtələri, habelə həqiqi ədədlər cütü ilə koordinat müstəvisinin nöqtələri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq vardır. Kompleks ədədlər $x + y\sqrt{-1}$ şəkildə olduğundan, yəni həqiqi ədədlər cütü ilə müəyyən olduğundan onları koordinatları (x, y) olan müstəvi nöqtələri ilə təsvir etmək olar.

İrlandiya riyaziyyatçısı Ueyam Hamilton 1831-ci ildə vektor haqda anlayışı daxil etdikdən sonra kompleks ədədlərin vektor şərhı mümkün oldu. Bu şərhə əsasən də kompleks ədədlər, müstəvinin nöqtələri cütü və vektorlar çoxluqları arasındakı qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq müəyyən edilmiş, bunlarla əlaqədar əsas anlayışlar (modul, argument, kompleks ədədlər üzərində əməllər) daxil edilmişdir, kompleks ədədlərin müxtəlif tətbiqləri göstərilmişdir. Kompleks ədəd artıq qeyd etdiyimiz kimi məktəbdə həqiqi ədədi sistemlərin son genişləndirilməsi olaraq daxil edilir, sonra onunla əlaqədar əsas anlayışlar verilir, iki həddli və diskriminantı mənfi olan kvadrat tənliklərin həllinə tətbiqi öyrədilir. Bu ədədləri və onunla əlaqədar əsas anlayışları daxil etdikdən sonra triqonometrik funksiyaların kompleks ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş üstlü funksiya ilə əlaqəsini şagirdlərə öyrətmək olar. Bu əlaqə $y = \cos \varphi + i \sin \varphi$ funksiyası üzərində aparılan müəyyən əməliyyat əsasında alınan Eyler düsturları ilə ifadə olunur. Belə ki, göstərilən funksiyanı diferensiallayıb $\frac{dy}{d\varphi} = -\sin \varphi + i \cos \varphi = i^2 \sin \varphi + i \cos \varphi = i(\cos \varphi + i \sin \varphi) = iy$ və bur-

adan $\ln y = i\varphi$ və ya $y = e^{i\varphi}$ alırıq. Deməli $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ (1), bu kompleks ədədlər çoxluğunda eynilikdir. Doğrudan da $\varphi = 0$ olduqda bərabərlik doğrudur. Onun hər tərəfini e əsasdan loqarifmləyib və törəməsini tapsaq sağ və sol tərəfdəki funksiyaların eyniliyini

isbat etmiş olarıq. $\cos \varphi$ və $\sin \varphi$ funksiyasının dövrülüyündən üstlü funksiyanın $(e^{i\varphi})$ dövrülüyü alınır. (1)-də φ - in yerində $-\varphi$ yazıb $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$ (2) alırıq. (1) və (2) - dən $\cos \varphi$ və $\sin \varphi$ -in üstlü funksiya ilə ifadələri $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}$

müəyyən olunur ki, bunları ilk dəfə L.Eyler çıxarmışdır.

Kompleks ədədlərin məktəb proqramında olması şagirdlərin bir çox başqa maraqlı çalışmaları yerinə yetirə bilmələrinə səbəb olur. Budur “ $x^2 + x + 1 = 0$ olduqda $f(x) = x^{60} + x^{51} + x^{45} - 3$ ifadəsinin ədədi qiymətini tapın” məsələsini kompleks ədəd haqqında məlumatı olmadan həll etmək mümkün deyil. Bunun üçün $(x^2 + x + 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow x^3 = 1$ olduğunu bildikdən sonra asanlıqla $f(x) = 0$ tapılır.

1960-cı ilə qədər kompleks ədədlər orta məktəbin X sinfində öyrənilmişdir. Lakin sonralar bu mövzunun yalnız fakültativ məşğələlərdə öyrənilməsi lazım bilindi.

Təcrübə göstərir ki, bu mövzunun yenə də əsas proqrama daxil etmək zəruridir. Hazırkı proqrama görə X sinifdə kompleks ədədlər öyrənilir. Məktəb Planimetriya kursunun bir çox məsələlərini kompleks ədədlərin tətbiqi ilə incə və sadə həllərini vermək olar. Lakin kompleks ədədlərin əhəmiyyəti təkcə bu və ya digər həndəsə məsələsinin səmərəli yolla həllini vermək deyil, baxmayaraq ki bu da olduqca mühümdür. Kompleks ədədlərin tətbiqi nəticəsində çox vaxt yeni faktlar müəyyənləşdirmək, alınmış düsturların və münasibətlərin təhlili ilə maraqlı ümumiləşdirmələr aparmaq, bu yolla alınmış nəticələri əsaslandırmaq və dəqiqləşdirmələr etmək imkanı yaranır. Məktəb planimetriya kursunda şagirdlər paraleloqramın diaqonallarının kvadratları cəmi haqqında teoremi öyrənilir. Bu teoremin ümumiləşdirilməsindən ibarət “Dördbucaqlının bütün tərəflərinin kvadratları cəmi onun diaqonalların kvadratları cəmi ilə diaqonalların orta nöqtələrini birləşdirən parçanın kvadratının dörd misli cəminə bərabərdir” teoremini kompleks ədədin tətbiqi ilə asanlıqla həll etmək olar.

Fərz edək ki, ABCD dördbucaqlısının diaqonallarının orta nöqtələri M, N – dir və A,B,C,D,M,N nöqtələrinə a, b, c, d, m, n kompleks

ədədləri uyğundur. $m = \frac{1}{2}(a + c)$ və $n = \frac{1}{2}(b + d)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 &= (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) + (b-c)(\bar{b}-\bar{c}) + (c-d)(\bar{c}-\bar{d}) + (d-a)(\bar{d}-\bar{a}) = \\
&= 2(a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d}) - (a\bar{b} + \bar{a}b + b\bar{c} + \bar{b}c + c\bar{d} + \bar{c}d + d\bar{a} + \bar{d}a), \\
|AC|^2 + |BD|^2 + 4|MN|^2 &= (a-c)(\bar{a}-\bar{c}) + (b-d)(\bar{b}-\bar{d}) + 4(m-n)(\bar{m}-\bar{n}) = (a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d}) - \\
&- (a\bar{c} + \bar{a}c + b\bar{d} + \bar{b}d) + (a+c-b-d)(\bar{a}+\bar{c}-\bar{b}-\bar{d}) = 2(a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d}) - \\
&- (a\bar{b} + \bar{a}b + b\bar{c} + \bar{b}c + c\bar{d} + \bar{c}d + d\bar{a} + \bar{d}a)
\end{aligned}$$

Burada $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ uyğun qoşma kompleks ədədlərdir. Teoremin bu isbatından əvvəl (onu IX sinifdə uyğun çertyojdan istifadə ilə isbat etmək olar). Koordinatları uyğun olaraq a, b kompleks ədədləri olan A, B nöqtələri arasındakı məsafənin $|AB|^2 = (a-b)(\bar{a}-\bar{b})$ (3) düsturu ilə hesablandığını əsaslandırmaq lazımdır. Bu çətin deyil. Belə ki, $z, \bar{z}$ qarşılıqlı qoşma kompleks ədədlədirsə $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $\bar{z} = x - iy = r(\cos \varphi - i \sin \varphi)$, burada $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z\bar{z} = r^2(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi - i \sin \varphi) = r^2$ deməli $z\bar{z} = r^2$ (4). Bu isə radiusu r və mərkəzi koordinat başlanğıcında olan çevrənin tənliyidir. Bundan sonra (3)-ün (4)-ə analoji alındığını demək olar.

Kompleks ədədin tətbiqi ilə planimetriya məsələlərinin həllinə (bunu ayrıca tədqiq etmək lazımdır) aid başqa nümunələr də göstərmək mümkündür.

1.11. Ən sadə sıralar (X-XI). Şagirdlərin silsilələrlə tanışlığı IX sinfin cəbr kursunda “ədədi və həndəsi silsilə” mövzusu ilə əlaqədar olur. Sonra X sinifdə “Cəbr və analizin başlanğıcı” kursunda “Sonsuz ardıcılıqlar və onların limiti” mövzusunda onların ən sadə sıralarla tanışlığı imkanı yaranır. Ən sadə ədədi sıraların öyrənilməsinin zəruriliyini sonsuz dövrü onluq kəsrin adi kəsre çevrilməsi, habelə sonsuz azalan həndəsi silsilənin hədləri cəmi haqqında məsələlər həlli zamanı göstərmək olar. Birinci həddi $a_1 = a \neq 0$ və orta q vuruğu q olan həndəsi silsiləyə baxaq: $a, aq, \dots, aq^{n-1}, \dots$, şagirdlər məlum düstur üzrə bu silsilənin ilk n həddi cəmini tapa bilirlər. Bu silsilənin bütün hədlərinin cəmini tapmaq olarmı, yəni $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$ cəmini tapmaq mümkündürmü? Bu cəm sonsuz sayda toplananlardan ibarətdir və ilk baxışdan məsələnin həll olunmazlığı görünür. Eyni zamanda sonsuz həndəsi silsilənin hədlər cəminin tapıla bilməsi belə fikir yaradır ki, məsələ realdır. Yalnız onu dəqiq ifadə etmək və uyğun an-

layışlara tərif vermək lazımdır. Müəllim qeyd edir ki, $x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$ şəklində ifadə sıra adlanır. İndi məsələ bu ifadənin ədədi qiymətini müəyyən etməyi və onu hesablamağı öyrətməkdən ibarətdir. Ədədi sıranın tərifini daxil etdikdən sonra şagirdlərə deyilir ki, ardıcılığın a_n ümumi həddi, sıra halında sıranın ümumi həddi adlanır.

Qısa olaraq ümumi həddi a_n olan sıra isə $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şəklində yazılır.

Sıranın xüsusi cəmi və onun limiti anlayışlarından istifadə edərək sıranın cəminin tərfi verilir, “yığılan” və “dağılan” sıra istilahlarının məzmunu açılır. Bunun üçün konkret misallardan istifadə olunur. Ədədi sıraları öyrəndikdən sonra onun xüsusi halı kimi sonsuz azalan həndəsi silsilənin hədləri cəminə qayıtmaq lazımdır. Şagirdlərin ən sadə sıralar və bununla əlaqədar anlayışları yaxşı başa düşmələri üçün ardıcılıq və onun limiti haqqında bilməlidirlər, bunlara aid müvafiq çalışmalar həll etməlidirlər. Sonra ən sadə sıralar haqqında nəzəri məlumatlar uyğun çalışmalar üzərində öyrədilməlidir.

Konkret misallar üzərində sıranın ilk n həddi cəminin tapılması, hədləri müsbət olan sıranın yığılan olmasını göstərmək üçün bütün xüsusi cəmlərin hər hansı eyni bir c ədədindən kiçik olduğunu göstərməyin kifayət olması, onun xüsusi cəmləri ardıcılığının yığılan “ixtiyari artan məhdud ardıcılığın limiti vardır” təklifindən alınması, sonlu cəmlər üçün doğru olan “hədlərin yerini dəyişdikdə cəm dəyişmir” qanununun ümumiyyətlə sonsuz sıraya aid olmaması, mütləq və şərti yığılan sıra anlayışları, yığılan sıra üçün $\{a_n\}$ ardıcılığının sıfıra yaxınlaşması şagirdlərə öyrədilir.

Bu zaman baxılan sıranın hədlərinin yerinin dəyişdirilməsi ilə əlaqədar ümumiləşdirmə və analogiya aşağıdakından ibarət olur:

Mötərizələrdən istifadə edərkən ehtiyatlı olmaq lazımdır. Ən sadə misal olaraq $1-1+1-1+\dots$ dağılan sırasında mötərizələri $(1-1)+(1-1)+\dots$ kimi qoymaqla o, sıfıra yığılan sıraya çevrilir. Lakin belə bir fakt diqqəti daha çox cəlb edir: elə dağılan sıra vardır ki, mötərizələrin müvafiq şəkildə qoyulması ilə o, əvvəlcədən verilmiş ixtiyari ədədə yığılan olur.

Ədədi sıraların təlimində Riman teoreminin (ixtiyari şərti yığılan sıranın hədlərinin yerini dəyişməklə dağılan və cəmi ixtiyari əvvəlcədən verilmiş ədədə bərabər olan yığılan sıralar almaq olar) mühüm

yer tutur. Bu teoremin isbatında, adətən, köməkçi təklifdən ($a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ sırası şərti yığılırsa, onda onun müsbət hədlərindən tərtib olunmuş sıra dağılandırsa, mənfi hədlərindən düzəlmiş sıra da dağılır) istifadə etmək lazım gəlir.

Riman teoreminin kompleks variantı ilə əlaqədar demək olar ki, bu vaxta qədər sıranın a_n hədlərini ixtiyari həqiqi ədəd hesab edirdik. Onlar kompleks ədədlər də ola bilər.

Riyazi analizdə $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ ədədi sırasının xüsusi cəmi adlanan $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ limiti varsa və sonludursa o verilmiş həmin sıranın cəmi adlanır. Bu tərifə əsasən “rəqs edən” dağılan sıranın cəmi olmadığı deyilir və belə sıralara çox vaxt sisteməlik olaraq baxılmaz. Lakin XVIII əsrin ikinci yarısında riyazi analiz sahəsində müxtəlif faktlar, məsələn iki yığılan sıranın hasilinin dağılması, hər hansı yeni mənada dağılan sıraların cəmlənməsinin mümkünlüyü qarşıya qoyuldu. Məlum oldu ki, belə “cəmləmənin” bəzi metodları olduqca lazımlı məsələdir. Həmin metodlar haqqında məktəbdə ətraflı məlumat vermək mümkün deyil. Lakin riyaziyyatda ümumiləşdirmə əməliyyatının əhəmiyyətli olduğunu göstərmək məqsədi ilə bir sıra qeydlər etməyi lazım bilirik. Demək lazımdır ki, Koşi tərəfindən limitlərin ciddi nəzəriyyəsinin yaradılmasına qədər (və onunla əlaqədar sıralar nəzəriyyəsinin) riyaziyyatda dağılan sıralara az təsadüf edilmişdir. Onların isbatlarda tətbiqi mübahisəli olsa da, ayrı-ayrı hallarda bunlara ədədi məna vermək cəhdləri olmuşdur. Məsələn, hələ Leybnisə qədər $1-1+1-1+\dots$ sırasının cəmi olaraq $\frac{1}{2}$ ədədi götürülmüşdür.

Eyler bunu belə əsaslandırmışdır ki, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$ ayrılışında (yalnız $|x| < 1$ olduqda doğru olan) x yerində 1 yazdıqda həqiqətən $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ alınır. Bununla artıq həqiqətən başlanğıcı vardır, lakin məsələnin qoyuluşunda aydınlıq yoxdur.

Müasir analizdə məsələ başqa cür qoyulur. Sıranın bu və ya digər dəqiq ifadə edilmiş “ümumiləşdirilmiş cəmi” – nin tərfi əsas götürülür.

Bu tərifin yalnız bu və ya digər konkret ədədi sıraya deyil belə sıraların tam sinfinə tətbiq edilməsi nəzərdə tutulur. Bunun qanuni olmasına heç bir şübhə yoxdur: oxucu xatırlamalıdır ki, hətta adi “sıranın cəmi” anlayışı, nə qədər sadə və təbii görünsə, yalnız məqsədəuyğunluqda özünü doğruldan, şərti qəbul edilmiş tərif əsasında daxil edilməlidir. “Ümumiləşdirilmiş cəmin” tərfi adətən, iki tələbi ödəməlidir. Birincisi $\sum a_n$ sırasının “ümumiləşdirilmiş cəmi” A, $\sum b_n$ sırasının “ümumiləşdirilmiş cəmi” B isə, onda $\sum (pa_n + qb_n)$ sırasının “ümumiləşdirilmiş cəmi”, burada p, q iki ixtiyari sabitdir, $pA + qB$ ədədi olmalıdır. Bu tələbi ödəyən cəmləmə metoduna xətti cəmləmə metodu deyilir. İkincisi, adi tərif yeniyyə xüsusi hal kimi daxil olmalıdır. Daha doğrusu, adi mənada A cəminə yaxınlaşan sıranın “ümumiləşmiş cəmi” də olmalıdır və o da A-ya bərabərdir. Bu xassəni ödəyən cəmləmə metoduna tənzimli (müntəzəm) cəmləmə metodu deyilir. Əlbəttə, adi cəmləmə metoduna nisbətən daha geniş sinifdə “cəmləmə” müəyyən etməyə imkan verən müntəzəm metod maraqlıdır: yalnız bu halda tam əsasla “ümumiləşdirilmiş cəmləmə” haqqında danışmaq olar. Sıranın “ümumiləşmiş cəmi” anlayışına uyğun olaraq dağılan inteqral üçün “ümumiləşdirilmiş qiymətdən” danışmaq mümkündür.

Riyaziyyatdan xüsusi qabiliyyətli şagirdlərə gələcəkdə göstərilən anlayışların əsas xüsusiyyətləri və tətbiqləri ilə ətraflı tanış olacaqlarının mümkünlüyünü demək lazımdır.

Məktəb riyaziyyat kursunda ardıcılığın monotonluğu və məhdudluğu anlayışlarına xüsusi diqqət verilməlidir. Riyazi analizlə ilk dəfə tanış olan şagirdlər üçün bir çox faktlar (ardıcılığın artması, azalması, məhdudluğu, funksiyanın kəsilməzliyi və s.) intuitiv olaraq aydın görünür. Eyni zamanda riyazi analizin məzmunu intuisiyanın göstərdiklərini məntiqi olaraq təsdiq və inkar etmək bacarığı tələb edir. İlk addımdan burada intuisiya və məntiqin dialektikasını hiss etdirmək, yeni mərhələdə müşahidələr əsasında ümumiləşdirmələr aparmağı, “aşkar” faktların formallaşdırılması ilə məntiqi olaraq nöqsansız və praktik tətbiqlər üçün faydalı nəticələrin qurulmasına necə keçirildiyini şagirdlərə anlatmaq lazımdır.

1.12. Ədədlərin toplananlarına ayrılması məsələsi kombinatorikanın maraqlı bölmələrindən biridir. Bu məsələdə verilmiş ədədi bu və ya digər şərtlərə əsasən neçə üsulla toplananlarına (məsələn, cüt və tək toplananlarına, bərabər olmayan toplananlarına və s.) ayırmağın

mümkünlüyü həll etmək lazım gəlir. Ədədlərin toplananlarına ayrılmasını L.Eyler ətraflı öyrənmişdir. Bir sıra müxtəlif məsələlər onun baxdığı: “Qiymətləri $n_1, n_2, \dots, n_k$ olan markalar satılır. Bu qiymətlər vasitəsi ilə, sırası ilə fərqlənən iki üsul müxtəlif hesab edilərsə, N manatı neçə üsulla xərcləmək olar” məsələsinin xüsusi hallarıdır. Məktəbdə birləşmələr nəzəriyyəsinin elementləri öyrənildiyindən X-XI siniflərdə bu məsələyə baxmaq olar.

N manatın qiymətləri $n_1, n_2, \dots, n_k$ olan markalara xərclənmə üsullarının sayını $f(N)$ – lə göstərek. Onda $f(N) = f(N - n_1) + f(N - n_2) + \dots + f(N - n_k)$ (1) münasibəti ödənilir. Doğrudan da fərz edək ki, N manatın verilmiş markalara xərclənməsi üsullarından hər hansı biri məlumdur və sonuncu markanın qiyməti n_1 - dir. Onda bütün qalan markaların qiyməti $N - n_1$ olar. Tərsinə, ümumi dəyəri $N - n_1$ olan markaların ixtiyari kombinasiyasına qiyməti n_1 olan bir markanı birləşdirməklə markaların dəyəri N manat olan kombinasiyalarını alırıq. Bununla dəyəri $N - n_1$ olan müxtəlif kombinasiyalardan dəyəri N manat olan müxtəlif kombinasiyalar alınır. Beləliklə, axtarılan kombinasiyaların sayı, axırıncı markanın qiyməti n_1 manat olduqda $f(N - n_1)$ - yə bərabərdir. Eyni qayda ilə isbat edilir ki, n_2 dəyərli marka ilə qurtaran kombinasiyaların sayı $f(N - n_2)$ -yə, $n_3, \dots, n_k$ dəyərli markalarla qurtaran kombinasiyaların sayı isə uyğun olaraq $f(N - n_3), \dots, f(N - n_k)$ - ə bərabərdir. İxtiyari kombinasiya göstərilən tip markaların biri ilə qurtardığından (1) münasibəti doğrudur. Bu münasibətdə, $N < 0$ isə, mənfi miqdarda pul xərcləmək mümkün olmadığından $f(N) = 0$. Habelə sadə hesablama göstərir ki, $f(0) = 1$ (1) münasibətinin köməyi ilə ardıcıl olaraq $f(1), f(2), \dots, f(N - 1)$ -i hesablamaqla ixtiyari N üçün $f(N)$ -i tapmaq olar. $n_1 = 1, n_2 = 2, \dots, n_k = k$ olduqda, bu məsələnin xüsusi hallarına baxaq. N ədədinin $1, 2, \dots, k$ toplananlarına, toplananların ardıcılığı ilə fərqlənən toplananları müxtəlif hesab etməklə, bütün mümkün ayrılışını alırıq. Bu ayrılışların sayını $\varphi(N, K)$ ilə işarə edək. (1) münasibətindən alınır ki,

$$\varphi(N, K) = \varphi(N-1, K) + \varphi(N-2, K) + \dots + \varphi(N-K, K) \quad (2).$$

Bununla $\varphi(0, K) = 1$ və $N < 0$ isə $\varphi(N, K) = 0$.

$\varphi(N-1, K) = \varphi(N-2, K) + \dots + \varphi(N-K, K) + \varphi(N-K-1, K)$ olduğunu nəzərə almaqla $\varphi(N, K)$ - nin hesablanmasını sadələşdirmək olar.

Odur ki, $\varphi(N, K) = 2\varphi(N-1, K) - \varphi(N-K-1, K)$ (3). Aşkardır ki,

k ədədi N-dən böyük ola bilməz. Odur ki, $\varphi(N, N)$ N-in bütün natural ayrılışlarının sayına bərabərdir. (N=N “ayrılığı” daxil olmaqla).

Toplananların sayı S-ə bərabər olarsa onda C_{N-1}^{S-1} ayrılış alırıq.

Doğrudan da N vahid götürüb onları bir sırada yazaq. Onlar arasında N-1 aralıq olacaqdır. Bu aralıqlardan S-1 seçək və orada “arakəsmələr” qoyaq. N ədədinin S natural toplananlarına ayrılışını alırıq ki, hər bir belə ayrılma şərh olunan üsulla yeganə qayda ilə alına bilər. N-1 aralıqdan S-1 aralığı C_{N-1}^{S-1} üsulla seçmək mümkün olduğundan ayrıl-

maların sayı C_{N-1}^{S-1} - ə bərabərdir. Odur ki,

$$\varphi(N, N) = C_{N-1}^0 + C_{N-1}^1 + \dots + C_{N-1}^{N-1} = 2^{N-1}.$$

Beləliklə, isbat etdik ki, N-i natural toplananların cəminə 2^{N-1} üsulla ayırmaq olar. Xatırlayaq ki, bu zaman toplananların ardıcılığı da nəzərə alınır. Məsələn, 5 ədədini $2^{5-1} = 16$ üsulla toplananlarına ayırmaq olar: 1) $5=5$; 2) $5=4+1$; 3) $5=1+4$; 4) $5=2+3$; 5) $5=3+2$; 6) $5=3+1+1$; 7) $5=1+3+1$; 8) $5=2+2+1$; 9) $5=2+1+2$; 10) $5=1+2+2$; 11) $2+1+1+1=5$; 12) $5=1+1+1+2$; 13) $5=1+1+3$; 14) $5=1+1+2+1$; 15) $5=1+2+1+1$; 16) $5=1+1+1+1+1$

Bu məsələnin yuxarıdakı ümumiləşməsi isə maraqlıdır.

1.13.Funksional tənliklər. Məktəb riyaziyyatında tənliklər mühüm yer tutur. Belə ki, tənliklər haqqında təlim məktəb riyaziyyatının bütün bölmələri ilə əlaqədardır, konkret məzmunlu məsələlər həllinin daha səmərəli üsullarını verir və bir sıra tip məsələlərin həllini ümumiləşdirməyə imkan yaradır. Şagirdlərin məktəbdə öyrəndikləri tənliklərlə əlaqədar biliklərini ümumiləşdirmək və genişləndirmək məqsədi ilə onlara riyaziyyat elminin mühüm nəliyyətlərindən biri olan “funksional tənliklər” haqqında bəzi anlayışlar verməyi faydalı hesab edirik. Elementar funksiyaların öyrənilməsində funksional tənliklərin böyük əhəmiyyəti vardır. Funksiyaların araşdırılması zamanı onların cüt və tək olması, dövrülüyü və s. ümumi xassələrini funksional tənliyi ödəməsi kimi də izah etmək olar. Funksiyanın cüt, tək və dövrü olması xassələri

uyğun olaraq $f(-x) = f(x)$ (1), $f(-x) = -f(x)$ (2), $f(x+a) = f(x)$ (3) bərabərlikləri ifadə edilir. Funksiyanın verilmə üsullarından biri də onu xarakterik xassələrinin göstərilməsi vasitəsi ilə izah etmək ola bilər. Funksiyanın bu üsulla verilməsində funksional tənlik anlayışından, yəni verilmiş funksiyanın, argumentin onun təyin oblastından götürülmüş bütün qiymətlərində, ödədiyi müəyyən münasibətdən istifadə edilir. Məsələn, $F(x) = kx$ xətti funksiyası $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (4) funksional tənliyini ödəyir. Doğrudan da $k(x+y) = kx + ky$. Deməli bu və ya digər funksiya müvafiq funksional tənliyin həlli kimi baxmaq olar. Onda, təbii olaraq, funksiyanı hər hansı funksional tənliyin həlli kimi təyin etmək məsələsi qarşıya çıxır. Məsələn, üstlü və loqarifmik funksiyaların xarakterik xüsusiyyətlərini aşağıdakı teoremlər vasitəsi ilə vermək olar: 1) Təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğundan ibarət, monoton və $f(x)f(y) = f(x+y)$ (5) funksional tənliyini ödəyən funksiya a^x üstlü funksiya, burada $a \neq 1$

Bu teoremin şərti $F(x) = a^x$ -in üç mühüm xassəsidir.

2) Təyin oblastı bütün müsbət ədədlər çoxluğundan ibarət, monoton və $f(xy) = f(x) + f(y)$ (6) funksional tənliyini ödəyən funksiya loqarifmik funksiya. Bu teoremin şərti isə $f(x) = \log_a x$ funksiyanın üç əsas xassəsindən ibarətdir.

Yuxarıda göstərdiyimiz altı funksional tənliklərin hər biri ayrılıqda konkret bir funksiyanı deyil, müəyyən funksiyalar sinfini təyin edir.

Tərif. Hər hansı funksiyalar sinfinin mənsub olduğu müəyyən xassəni ifadə edən münasibətə funksional tənlik deyilir. Belə tənliklərə ən sadə misal 1-6 münasibətləridir. Argumentin bütün mümkün qiymətlərində verilmiş funksional tənliyi ödəyən $f(x)$ funksiyası həmin tənliyin həlli adlanır. Məsələn, $f(x) = \cos x, ax^3, \sin x, kx, a^x, \log_a x$ uyğun olaraq (1, 2, 3, 4, 5, 6) tənliklərinin həlləridir. Funksional tənliyin həlli ilə əlaqədar aşağıdakı şərtləri qəbul edək:

1) $f(x)$ funksiyası mənsub olduğu funksiyalar sinfinin hər bir elementindən ixtiyari sabitlə fərqlənərsə, yaxud həmin sinfin bütün funksiyalarını özünə daxil etmərsə, ona funksional tənliyin xüsusi həlli deyilir.

2) $f(x)$ funksiyası müəyyən şərti ödəyən funksiyalar çoxluğunun ixtiyari elementini özünə daxil edirsə, o, ümumi həll adlanır.

3) İxtiyari xüsusi və ümumi həllərin $f(x)$ funksiyasına daxil olduğu isbat edildikdə ona tam həll deyilir. Habelə müəyyən əlavə şərtlər olmaqla $f(x)$ -in yeganəliyi isbat edildikdə onu da tam həll qəbul etmək olar. $\cos x, ax^3, \sin x$ funksiyaları uyğun olaraq (1, 2, 3) tənliklərinin xüsusi həlləridir. $f(x) = \phi(\sin x), f(x) = \phi(ax^3), f(x) = \phi(\sin x)$ isə uyğun olaraq həmin tənliklərin ümumi həlləridir. Burada ϕ - ilə göstərilən elementar funksiyalar daxil olan ixtiyari funksiya işarə edilmişdir. $f(x) = kx$ isə özünün kəsilməzlik şərti daxilində (4)-ün kəsilməyən tam həllidir. Hər hansı $\psi(x)$ funksiyasında x əvəzində $\psi(x)$ götürsək, onda $\psi(x)$ - in ikinci iterasiyasını, yəni $\psi[\psi(x)] = \psi_2(x)$ alırıq. Buna ikitərtibli funksiya da deyilir. Məsələn, $\psi(x) = ax + b$ isə $\psi_2(x) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$. Buna uyğun olaraq müxtəlif tərtibli funksional tənliklər vardır. Birtərtibli funksional tənliyə yalnız bir tərtibli funksiyalar daxil olur və s. Funksional tənliklər axtarılan funksiyanın ona hansı dərəcədə daxil olması ilə də fərqlənirlər. Funksional tənliyin tərtibi və dərəcəsi ona daxil olan ən yüksək tərtibli və dərəcəli funksiya ilə müəyyən edilir. Məsələn, $\psi_2(x) = x$ tənliyi iki tərtibli, bir dərəcəlidir. $\psi^2(x) - \psi(x) = \psi_2(x)$ iki dərəcəli və iki tərtibli tənlikdir. Funksional tənliklər dəyişənlərinin sayına görə də fərqlənirlər. (1, 2, 3) bir dəyişənli, (4, 5, 6) isə iki dəyişənli tənliklərdir. Funksional tənliklərə aid ümumi anlayış verdikdən sonra, onun yaranması, inkişafı və burada ümumiləşdirmələrin rolu haqqında şagirdlərə qısa məlumat vermək olar. Bu tənliklərin öyrənilməsinə başlandığı vaxtdan çox (200 ilə yaxın) keçmişdir. Buna baxmayaraq onun vahid nəzəriyyəsi, həllinin varlığı, yeganəliyi və ümumi metodları demək olar ki, yoxdur. Bir sıra funksional tənliklər isə bu vaxta qədər həll edilməmişdir. Dalanber, Eyler və laqranjin əsərlərində bu tənliklərə aid nümunələr vardır. Həmin tənliklərin nəzəriyyəsi ilə 1773-cü ildə Q.Monj və P.S.Laplas məşğul olmuşdur. Bir çox funksional tənliklərin elmə daxil edilməsi və həlli Koşinin adı ilə bağlıdır. (5), (6) və $f(x, y) = f(x)f(y)$ (7) tənliklərini o, daxil etmişdir. (7)-in həlli

$f(x, y) = x^\alpha$ - dır. Son vaxtlarda alimlər funksional tənliklərin nəzəriyyəsinə kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsini tətbiq etməyə başlamışlar. Bu tənliklərə Veyerştras, Bebec, Livensov, Sinsov və b. Mühüm əlavələr etmişlər. Bizim dövrümüzdə isə bu sahəyə Kolmoqorov və Atsel diqqət vermişdir.

Qısa tarixi məlumatdan sonra ən sadə funksional tənliklərin həlli üsulları ilə şagirdləri tanış etmək lazımdır. Funksional tənliyi həll etmək, bunun olub olmadığını müəyyənləşdirmək və varsa onu tapmaq deməkdir. Adətən xüsusi, ümumi və ya tam həllər axtarılır. Bu tənliklər limitə keçmə, diferensiallama, kompleks dəyişənli funksiyalar və sonlu fərqlər metodlarının köməyi ilə həll edilir.

Göstərilən metodlarla həll, axtarılan funksiyanın təbiəti üzərinə ciddi məhdudluq qoyur. Bu da verilmiş funksional tənliyin həllini axtarmağın süni üsullarını tapmağa imkan verir. Məsələn, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ tənliyinin, axtarılan funksiyanın kəsilməz olmaması şərti ilə, yeganə $f(x) = ax$ həlli vardır. Lakin kəsilməzlik şərtindən istifadə etməsək həmin tənliyi ödəyən kəsilməz funksiya da tapmaq olar. Deməli, bu üsulla həll daha geniş funksiyalar sinfini əhatə edir. Ona görə də qiymətlidir. Funksional tənliklərin həlli metodlarının lazımı səviyyəyə çatdırılması, bu həllin varlığını, ümumiliyini və yeganəliyini əsaslandırmaq ciddi tədqiqatlar tələb edir. Biz məktəbdə bu və ya digər mövzularla əlaqədar qarşıya çıxan elementar funksional tənliklərin bəzi həlli üsullarını verməklə kifayətlənirik.

(1, 2, 3) tənliklərinin həlli uyğun olaraq funksiyanın cüt, tək və dövrü olması xassələrinə əsasən müəyyən edilir. İsbat edilmişdir ki, (4, 5, 6, 7) tənliklərinin həlli isə uyğun olaraq $y = ax$, $y = a^x$ və $y = \log_a x$, $y = x^\alpha$ funksiyalarıdır. Aydındır ki, (1, 2, 3) tənliklərinin hər birinin sonsuz sayda həlləri vardır. (4, 5, 6, 7) tənliklərinin həlləri isə bir birindən onlara daxil olan parametrlərlə fərqlənən xətti, üstlü, loqarifmik və qüvvət funksiyalardır. (4, 5, 6, 7) funksional tənlikləri Koşinin tətbiq etdiyi eyni bir metodla həll edilir. Koşi metodunun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, (4, 5, 6, 7) funksional tənliklərin həlli (və ümumiyyətlə) tədricən arqumentin bütün natural, rəşional, daha sonra həqiqi qiymətləri üçün axtarılır. Bu metodla həll, axtarılan funksiya üzərinə kəsilməzlik şərti qoymaqla məhdudlaşdırılır.

Bəzi funksional tənlikləri həll etmək üçün əvəzləmə üsulundan istifadə edilir. Bu metod axtarılan funksiyanın təyin oblastı ilə məhdud-

laşdırılır. İstifadə edilən əvəzləmə yeni məchulun həmin oblastdan götürülmüş qiymətlərində mənalı olmalıdır. Funksional tənliyi əvəzləmə metodu ilə həll etməyin mahiyyəti belədir: verilmiş tənliyə daxil olan x -in (və ya y -in) əvəzində müvafiq qiymətlər götürülür. Alınmış yeni tənlik (və ya tənliklər) verilmiş tənliklə kombinasiya edilməklə axtarılan funksiya nəzərən cəbri tənlik alınır. Belə tənliyi isə məlum aradan çıxarma üsulu ilə asanlıqla həll etmək olar. Lakin müxtəlif funksional tənlik üçün aparılan əvəzləmənin xarakteri müxtəlifdir.

Məsələn, $a\psi(x) + \psi\left(\frac{1}{x}\right) = ax$ (8) funksional tənliyi həll etmək üçün x

yerində $\frac{1}{x}$ yazıb $\psi(x) + a\psi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a}{x}$ (9) alırıq. (8) və (9) – dan

$\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ - i kənar edib $\psi(x) = \frac{a(1-ax^2)}{x(1-a^2)}$ tapırıq. Sonra $\psi(x)$ -in

qiymətini (9)-də yerinə yazıb $\psi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a(x^2-a)}{x(1-a^2)}$ alırıq. İndi

$f(x) - f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) = x$ (10) tənliyini ödəyən $f(x)$ funksiyasının təyin

edilməsinə də şagirdlərin diqqətini cəlb etmək olar. $f(x)$ funksiyasını təyin edən (10) bərabərliyindən görünür ki, bu funksiya x -in hər hansı

qiymətində təyin olunmuşdursa o, $\frac{a^2}{a-x}$ qiymətində də təyin

olunmuşdur. Odur ki, x yerində həmişə $\frac{a^2}{a-x}$ yazmaq olar. Onda

$f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) + f\left(\frac{ax-a^2}{x}\right) = \frac{a^2}{a-x}$ (11) alırıq. Yenidən (11)-də x

yerində $\frac{a^2}{a-x}$ yazsaq $f\left(\frac{ax-a^2}{x}\right) + f(x) = \frac{ax-a^2}{x}$ (12) bərabərli-

yini yazırıq. (11) bərabərliyini -1 -ə vurub alınan bərabərliyə (10) və

(12) –i əlavə edib $f(x) = \frac{x^3 - a^2x + a^3}{2x(x-a)}$ tapırıq. Bilavasitə yoxlama

ilə şagirdlər alınmış funksiyanın verilmiş tənliyi ödədiyini müəyyən-ləşdirilər.

$$\text{Beləliklə, } f(x) = kx, a^x, \log_a x, x^a, \frac{a(1-ax^2)}{x(1-a^2)}, \frac{x^3 - a^2x + a^3}{2x(x-a)}$$

funksiyalarının uyğun funksional tənliklərlə verilməsi üsullarını izah etdik. Eyni zamanda həmin funksional tənliklərin həlli üsullarını da göstərdik. Funksiyanın, təkliyi, cütlüyü və dövrüliyünü ifadə edən bərabərliklərin funksional tənlik olduğunu xatırlatdıq. Məktəbdə öyrə-nilən funksiyanın hamısı haqqında belə məsələ qoymaq olar. Deməli, funksiyanın funksional tənliklər vasitəsilə verilməsi məsələsini daha ətraflı işləmək maraqlıdır.

(8) və (9) tənliklərinin həllindən sonra $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ funk-sional tənliyini, şagirdlər (8) dən istifadə ilə müstəqil həll edib $f(x) = \frac{1}{x} - 2x$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x}$ (12) olduğunu tapa bilərlər.

Funksional tənliklərin məktəb riyaziyyatına tətbiqinə də nümunə göstərmək olar. “Hansı diferensiallanan funksiyaların belə xassəsi vardır: a, b, c ədədləri ədədi silsilə əmələ gətirərsə, onda $f(a), f(b), f(c)$ ədədləri də ədədi silsilə əmələ gətirir”.

Üç həddən ibarət hər bir ədədi silsiləni $x, x + y, x + 2y$ şəkildə yazmaq olar. f funksiyası tələb olunan xassəni ödədiyindən ixtiyari $x, y \in R$ üçün $f(x) + f(x + 2y) = 2f(x + y)$ (13) bərabərliyi ödə-nilir. Bu isə funksional tənlikdir. Bəzi funksional tənlikləri törəmənin tətbiqi ilə də həll etmək olar. Bu üsulu (13)-ün həlli üzərində göstərmək olar. (13) funksional tənliyinin hər iki tərəfinə $y \in R$ dəyişəninin funksiyası kimi baxıb diferensiallasaq $2f'(x + 2y) = 2f'(x + y)$ eyni-liyini alırıq. Buradan alınır ki, $f'(x)$ sabit funksiyaadır. Odur ki, $f(x) = kx + b$, burada $k, b \in R$. Tərsinə, $f(x) = kx + b$ olduqda (13) bərabərliyi $(kx + b) + k(x + 2y) - b = 2[k(x + y) + b]$ şəklə düşür,

beləliklə, ixtiyari $k, b \in R$ üçün ödənilir. Deməli məsələnin şərtini yalnız və yalnız xətti funksiyalar ödəyir. Aşkardır ki, buradan daha ümumi hökm alınır: hər bir ədədi silsiləni ədədi silsiləyə yalnız xətti funksiyalar çevirir. Onu da bilmək lazımdır funksional tənliklərin həllində ixtiyari tərtibdən törəmədən istifadə edilə bilər.

Beləliklə, funksional tənlik anlayışına baxmaqla şagirdlərin tənliyin növləri haqqında məlumatlarını genişləndirmək və onların müvafiq ümumiləşdirmə imkanlarını artırmaq mümkündür. (1-6) tənlikləri haqqında deyilənlərdən aydındır ki, şagirdlər funksional tənliklərlə məktəbdə qarşılaşırlar, lakin belə istilahdan istifadə etmirlər.

1.14. Triqonometrik bərabərsizliklər və tənliklər (X s.). Belə bərabərsizliklərin həllində aşağıdakı ümumi priyomdan istifadə etmək olar. Fərz edək ki, $f(x) = 0$ (1) tənliyi həll edilmişdir, yəni onun bütün kökləri məlumdur və artma ardıcılığında yazılmışdır. Bu köklər $f(x)$ funksiyasının təyin oblastını sonlu və ya sonsuz sayda aralığlara bölür. Fərz edək ki, x_{i-1} və x_i (1) tənliyinin iki qonşu kökləridir; $f(x)$ funksiyası kəsilməyəndirsə, onda (x_{i-1}, x_i) intervalında, sıfıra çevrilmədiyindən, onun işarəsi sabitdir. Baxılan halda (1) tənliyinin kökləri $f(x)$ funksiyasının təyin oblastını sabit işarəli intervallara bölür. $f(x) > 0$ bərabərsizliyinin ümumi həlli $f(x)$ funksiyasının müsbət olduğu bütün intervallardır. $f(x)$ funksiyası $f = f_1 f_2 \dots f_k$ vuruqlarına ayrılmışdırsa və ayrı-ayrılıqda hər bir vuruq üçün işarə sabitliyi intervalları müəyyənləşdirilmişdirsə, onda bu intervalların hamısını bir çoxluqda birləşdirib $f(x)$ -in təyin oblastının sabit işarəli intervallara ayrılmasını alırıq.

$f(x) > 0$ (və ya $f(x) < 0$) bərabərsizliyi mənfi vuruqların sayı cüt (tək) olan intervallarda ödənilir. Məsələn, $\sin x > \sin 3x$ (2) bərabərsizliyinin həllinə baxaq. (2) bərabərsizliyi $\sin x - \sin 3x > 0, -2 \cos 2x \sin x > 0, \cos 2x \cdot \sin x < 0$ bərabərsizlikləri ilə birgüclüdür. $\sin 2x \sin x = 0$ tənliyinin $[-\pi, \pi]$ seqmentində sol tərəfin dövrünü əhatə edən köklərini tapaq. $\cos 2x = 0$ və $\sin x = 0$ tənliklərini

həll edib $x = \pm \frac{\pi}{4}$, $x = \pm \frac{3}{4}\pi$, $x = 0$ və $x = \pm \pi$ alırıq. Tapılan köklərin $[-\pi, \pi]$ seqmentini böldüyü intervalların hər biri üçün işarələrin paylanması cədvəlini tərtib edək.

x	$-\pi$	$<x<$	$-\frac{3\pi}{4}$	$<x<$	$-\frac{\pi}{4}$	$<x<$	0	$<x<$	$\frac{\pi}{4}$	$<x<$	$\frac{3\pi}{4}$	$<x<$	π
$\cos 2x$	+	+	0	-	0	+	+	+	0	-	0	+	+
$\sin x$	0	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	0
$\cos 2x$ $\sin x$	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0

Beləliklə (2) bərabərsizliyi $\left(-\pi, -\frac{3}{4}\pi\right), \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right)$ intervallarında ödənilir. Ümumi həll üç həllər seriyasından ibarətdir:

$$\left[(2k-1)\pi, \left(2k-\frac{3}{4}\right)\pi\right]; \left[\left(2k-\frac{1}{4}\right)\pi, 2k\pi\right]; \left[\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi, \left(2k+\frac{3}{4}\right)\pi\right]$$

Bu zaman cəbri bərabərsizliklərin həllində intervallar metodunun əhəmiyyətini və bu metodun ümumiləşdirilməsini xatırlatmaq lazımdır. Təcrübə göstərir ki, şagirdlər triqonometrik tənliklərə nisbətən triqonometrik bərabərsizliklərin həllində daha çox çətinlik çəkirlər. Xüsusən son nəticədə alınmış əsas bərabərsizliklərin həllini yazmaqda səhvlərə yol verirlər. Bu da əsas triqonometrik bərabərsizliklərlə birgüclü bərabərsizlikləri düzgün yazmamaqla əlaqədardır. Bununla əlaqədar müəllifin [14] kitabından istifadə etmək olar. Səhvlər triqonometrik funksiyaların və onların daxil olduğu bərabərsizliklərin əsas xassələri başa düşülmədiyi üçün yaranır. Yoxlamalarda buna kömək etmir. Aşağıda triqonometrik bərabərsizliklərin son mərhələsinə, şagirdlərə xüsusi tərtib edilmiş alqoritmik yazılışın köməyi ilə izah edilən, çatmağın ümumi metodikasını göstərək.

1) Bərabərsizliyi tərəflərindən biri (məsələn sağ tərəfi) sıfır olan şəkə gətirmək; 2) Bərabərsizliyin sol tərəfindəki funksiyanın sıfırlarını və kəsilmə nöqtələrini təyin etmək; 3) bütün tapılmalı nöqtələrin nümayəndələri olan nöqtələri vahid çevrə üzərində göstərmək; 4) Əvvəl alınmış ədədlərdən heç biri ilə üst-üstə düşməyən ixtiyari φ ədədini

seçmək (bərabərsizliyin sol tərəfindəki funksiyanın arqumentinin qiyməti; 5) Ox koordinat şüası ilə $\varnothing$ bucağı əmələ gətirən OX' şüasını çəkmək; 6) OX' şüası üzərində X_K yoxlama nöqtəsini almaq. Bunun üçün $\varnothing$ ədədini bərabərsizliyin sol tərəfində yerinə yazmaq və alınmış ifadənin işarəsini təyin etmək. İfadə sıfırdan böyükdürsə, onda X_K nöqtəsi OX' şüasının vahid çevrənin xaricində yerləşən ixtiyari nöqtəsidir, əks halda X_K həmin OX' şüasının vahid çevrənin daxilində yerləşən ixtiyari nöqtəsidir.

7. X_K nöqtəsindən başlayaraq vahid çevrə üzrə saat əqrəbinin əksinə hərəkət etməklə onu bütün qeyd olunmuş nöqtələrdə kəsən səlis xətt keçirmək. Bütün nöqtələrdən keçməklə bu xətt X_K nöqtəsinə qayıtmalıdır; 8) Çəkilmiş xəttin əmələ gətirdiyi fiqur kombinasiyasının lazımı hissələrini seçmək. Bunun üçün bərabərsizliyin sol tərəfindəki ifadə sıfırdan böyükdürsə, onda fiqurun vahid çevrə xaricindəki hissəsini, əks halda fiqurun vahid çevrə daxilindəki hissəsini götürməli. 9) vahid çevrənin götürülmüş hissələrə düşən qövslərinin müsbət istiqamətlərini oxlarla qeyd etmək. Bu qövslər bərabərsizliyin həlləri çoxluğuna uyğundur. Həllin sonunda alınmış əsas triqonometrik bərabərsizliklərlə birgüclü bərabərsizlik, yəni əsas bərabərsizliyin həlli yazılır.

Deyilənlər müvafiq çalışmalarla möhkəmləndirildikdə ümumiləşdirmə başa çatmış olar. Belə misallar işin həcmi artırıldığından onların üzərində dayanmırıq. Baxılan üsulun nəzəri əsası belədir. Fərz edək ki, $f(x) > 0$ triqonometrik bərabərsizlikdir, T isə x-in bütün seriyalarının yerləşdiyi ən kiçik düvrdür. (OX oxunun hissəsi)) Oxun bu hissəsində intervallar metodu üzrə $f(x)$ funksiyanının işarə sabitliyi sxemini quraq. O, dalğavari xətt üzərində $[O; T]$ parçasında olacaqdır. Uzunluğu T olan çevrə götürək və onun üzərində $[O; T]$ parçasını “qeyd edək”. Onda dalğavari xətt çevrəni “mənfi” hissəsi onun daxilində “müsbət” hissəsi isə xaricində olmaqla bürüyər. Çevrə üzərində uzunluğu $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$ və s. olan parçaları OX oxunun müsbət hissəsi boyunca “dolamağı” davam etsək mənzərə təkrar olunacaqdır.

Triqonometrik bərabərsizliklərin və tənliklərin həlləri seriyalarının birləşdirilməsinə xüsusi diqqət vermək lazımdır. Bu şagirdlərdə ümu-

miləşdirmə qabiliyyətini inkişaf etdirmək üçün yaxşı vasitədir. Triqonometrik tənliyin həlləri seriyalarını ümumiləşdirmək [18]-də yaxşı verilmişdir. Odur ki, onun üzərində dayanırıq.

1.15.İki ekvivalent bərabərsizlik (Xs.). Məsələ 1. Hər hansı üçbucağın tərəfləri uzunluqları a, b, c isə $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc$ (1) olduğunu isbat edin.

Məsələ2. İxtiyari üçbucağın A, B, C bucaqları üçün $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ (2) olduğunu isbat edin. Bu məsələlərdən

birisinin həlli məlumdursa onda digərini asanlıqla ona gətirmək olar. Fərz edək ki, 2 məsələsi həll edilmişdir. Bu halda 1-in necə həll edildiyini göstərək. (2) bərabərsizliyindən istifadə etməklə (1)-i isbat etmək lazımdır. Lakin əvvəlcə (2) –in başqa üsulla həllini bilmək yaxşı olar. (2)-in sol tərəfini belə çevirək:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos C. \text{ Şərtə görə}$$

$$A+B+C=180^0 \text{ olduğundan } \frac{A+B}{2} = 90^0 - \frac{C}{2}, \text{ Odur ki,}$$

$$\cos \frac{A+B}{2} = \cos \left(90^0 - \frac{C}{2} \right) = \sin \frac{C}{2}; \quad 0 \leq \cos \frac{A-B}{2} \leq 1 \text{ -dir; Onda}$$

$$\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq \sin \frac{C}{2},$$

Beləliklə,

$$2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos C \leq 2 \sin \frac{C}{2} + \cos C = 2 \sin \frac{C}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$; \sin \frac{C}{2} = x \text{ işarə etsək } 2 \sin \frac{C}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} = -2x^2 + 2x + 1 \text{ alırıq.}$$

$$\text{İndi } -2x^2 + 2x + 1 \leq \frac{3}{2} \text{ olduğunu isbat etsək, onda buradan (2)-in}$$

doğru olması alınır. $y = -2x^2 + 2x + 1$ tənliyi ilə verilən parabolaya

baxaq. Bu parabolanın təpəsi $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right)$ nöqtəsidir, onun qolları isə

aşağıya doğru yönəlmişdir. Deməli $\forall x$ üçün $-2x^2 + 2x + 1 \leq \frac{3}{2}$

bərabərsizliyi doğrudur. Beləliklə (2) bərabərsizliyi (1)-dən istifadə etmədən isbat edildi. İndi (2)-dən istifadə etməklə (1) – isbat edək. Bunun üçün nəzərə alaq ki,

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) =$$

$$= a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) \quad (3) \text{ Deməli isbat etmək}$$

$$\text{lazımdır ki, } \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \leq \frac{3}{2} \quad (4).$$

Kosinuslar teoreminə əsasən (4) dən (2)-ni alarıq, yəni (1) doğruluğunu fərz etdiyimiz (2) bərabərsizliyinə gətirildi.

Fərz edək ki, 1 həll edilmişdir. Bu halda 2-in necə həll edildiyini göstərək. (1)-dən istifadə etməklə (2)-i isbat etmək lazımdır. Kosinuslar

$$\text{teoreminə görə } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \text{ yazarıq. Deməli (2) –ni}$$

$$a(b^2 + c^2 - a^2) + b(a^2 + c^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) \leq 3abc \quad (5)$$

şəkildə yazmaq olar. (3) bərabərsizliyini nəzərə almaqla (5)-i (1) şəkildə yazmaq olar. Beləliklə (2) bərabərsizliyi, fərziyəyə görə isbat edə bildiyimiz (1) bərabərsizliyinə gətirildi. Bir sıra çalışmaları, xüsusi halda bərabərsizliklərin isbatını, göstərilən üsulla yerinə yetirmək olar ki, bu da müəyyən ümumiləşdirmədir.

1.16. Limit və kəsilməzlik

1. Ümumi qeydlər
2. Ardıcılığın limiti
3. Funksiyanın limiti
4. Funksiyanın kəsilməzliyi

1. Məktəb kursuna analizin başlanğıcının daxil edilməsi onun ideya məzmununu kifayət qədər zənginləşdirmiş və praktik cəhətdən genişləndirmişdir. Lakin bununla yanaşı məktəb riyaziyyatında yüksək dərəcədə mürəkkəb, əsasla sürətdə didaktik işlənmək tələb edən, anlayışlar əmələ gəlmişdir.

Tarixən törəmə anlayışı, riyaziyyatda funksiyanın limiti anlayışının dəqiq tərifinin hazırlanmasından əvvəl yaranmışdır. Bu məntiqi çatış-

mazlığa baxmayaraq XVII-XVIII əsr riyaziyyatçılarına o kifayət qədər aydın görünmüşdür. Funksiyanın kəsilməzliyi anlayışı da uzun müddət belə intuitiv qalmışdır. Odur ki, A.N.Kolmoqorov tarixi yanaşmanı tətbiq edərək funksiyanın limitinin dəqiq tərifini vermədən törəmə anlayışını daxil edir¹. O, funksiyanın limitini, funksiyanın kəsilməzliyi anlayışı ilə müasir ciddi formada şagirdləri tanış etdikdən sonra, izah edir.

Bu anlayışların daxil edilməsi ardıcılıqları haqqındakı məsələni mübahisəli hesab etmək olarsa, onda dəqiq tərifin yeri haqqındakı məsələ heç bir şübhəyə səbəb olmur. Funksiyanın kəsilməzliyi və limiti kimi mürəkkəb anlayışlardan söhbət getdikdə, mübahisəsizdir ki, hər şeydən əvvəl onları şagirdlər üçün intuitiv aydın etməli və yalnız bundan sonra dəqiq riyazi tərifə başlamaq lazımdır. Şagirdlərin öz sözləri ilə “dəqiq olmayan dildə” funksiyanın kəsilməzliyi və limiti anlayışlarının nə demək olduğunu izah etmək bacarığı aydındır ki, dəqiq tərfi ifadə edə bilmək bacarmaqdan (xüsusən bu ifadədə hər şey şagirdlərə aydın olmayan halda) az əhəmiyyətli deyildir. Bundan belə nəticə çıxarmaq olmaz ki, funksiyanın kəsilməzliyi və limiti anlayışlarının dəqiq təriflərini ifadə etməyin əhəmiyyəti yoxdur.

Ancaq belə nəticə çıxarmaq olar ki, aydın tərif, bu anlayışlar konkret misallar üzərində kifayət qədər izah edildikdən sonra, meydana gəlməlidir.

Aşağıda ardıcılığın limiti, funksiyanın limiti və kəsilməzliyi anlayışlarının daxil edilməsinin mümkün olan metodik yanaşmalarından birinə baxaq.

2.Ardıcılığın limiti

2.1. Ardıcılıq dedikdə natural arqumentli funksiya $f : n \rightarrow a_n, n \in N$ başa düşülür. Odur ki, mahiyyət etibarı ilə sonsuzluqda xüsusi halda funksiya N çoxluğunda təyin olduqda, funksiyanın limitindən söhbət gedir.

Pedaqoji nöqtəyi nəzərdən bu xüsusi halın ayrılması tamamı ilə özünü doğruldur, bir tərəfdən o intuitiv aydın və əyani, digər tərəfdən isə çoxlu tətbiqləri, o cümlədən riyaziyyat kursunun özündə (sonsuz silsilələr, çevrənin uzunluğu, cismin səthi və həcmi) vardır.

¹Колмогоров А.Н., функции, графики, непрерывные функции.
“математика в школе”, 1965, №6, ст 12-21

2.2.Ardıcılığın limiti məktəbdə çoxdan öyrənmə obyektidir. Pe-
daqoji – riyazi ədəbiyyatda ardıcılığın limiti anlayışının məktəbdə
öyrənilməsinə aid müxtəlif nöqteyi-nəzərləri əks etdirən metodik işlər
vardır¹. Bu fikirlərin müqayisəli təhlili tədrisə hazırlaşanlar üçün şüb-
həsiz ki, faydalıdır. Bunu onlara sərbəst iş kimi tapşırmaq olar.

2.3.Ardıcılığın limiti anlayışının daxil edilməsi prosesinin müm-
kün olan metodik sxemlərindən birini göstərək.

Ardıcılığa aid müxtəlif misalları və onların ədəd düz xətti üzərində
təsvirini nəzərdən keçirməklə işə başlamaq məsləhətdir.

$$(1) \quad 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

$$(2) \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

$$(3) \quad 1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$$

$$(4) \quad 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$$

$$(5) \quad -2, 4, -8, \dots, (-1)^n \cdot 2^n, \dots$$

$$(6) \quad \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2^n}, \dots$$

$$(7) \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

$$(8) \quad -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$$

$$(9) \quad \frac{1}{10}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{1}{10}, \dots$$

$$(10) \quad 1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \dots, (2n-1), \frac{1}{2n}, \dots \text{ və s.}$$

Bu ardıcılıqların “özünü aparmasındakı” mühüm fərqləri asanlıqla
görmək olar.

Onlardan bəziləri üçün ((2), (4), (6), (7), (8), (9)) ardıcılığın bütün
hədlərinin daxil olduğu ədəd düzxət parçasını göstərmək olar, başqaları
((1), (3), (5), (10)) üçün isə belə parça yoxdur.

¹ a) Ашкунидзе В.Т., Шоластер Н.Н. Алгебра и элементарные функции. b)
сəh 2-də çıxarış. c) Методика в школе və “Квант”jurnalları

Bu vəziyyət riyazi olaraq məhdud və qeyri-məhdud anlayışları vasitəsilə izah edilir. Məhdudluq və qeyri-məhdudluğun intuitiv başa düşülmələrindən (təsəvvüründən) istifadə edərək biz aşağıdakı dəqiq anlayışlara gəlirik.

$\{a_n\}$ - məhdud ardıcılıqdır: $(\exists l > 0)(\forall n)[|a_n| \leq l]$

$\{a_n\}$ - qeyri məhdud ardıcılıqdır: $(\overline{(\exists l > 0)(\forall n)[|a_n| \leq l]})$ və ya $(\forall l > 0)(\exists n)[|a_n| > l]$

(1)-(10) ardıcılıqlarından məhdud və qeyri-məhdud ardıcılıqları ayırdıqdan sonra məhdud ardıcılıqların özünü aparmasını daha ətraflı təhlil etmək təbiidir.

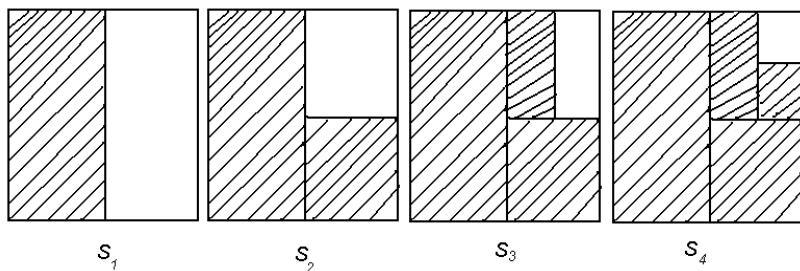
Bu təhlilə əsasən belə nəticəyə gəlirik ki, məhdud ardıcılıqlar da “özlərini” həmişə “eyni” aparmırlar.

Məsələn (2), (4), (6), (7) ardıcılıqlarının hər birinin özünü aparmasında (8), (9) məhdud ardıcılıqlarında olmayan mühüm xüsusiyyətlər müəyyən edilir, belə ki: bu ardıcılıqların hədləri ardıcılığın hədlərinin n nömrəsinin artması ilə bir nöqtənin ətrafına “yığılırlar”, hamısı bu nöqtəyə yaxınlaşır, hamısı bu nöqtə ilə təsvir olunan ədəddən çox az fərqlənir.

Bütün bu və başqa ifadə üsulları əlbətdə dəqiq deyil: onlar yalnız konkret vəziyyətlərin müşahidəsi nəticəsində yaranmış intuitiv anlayışları izah edir.

Hər hansı məhdud ardıcılığın özünü aparmasındakı müəyyən edilmiş xüsusiyyətlərin dəqiq riyazi şərhinə keçmək üçün hər hansı konkret misala ətraflı baxmaq lazımdır.

2.4.Nümunə olaraq aşağıdakı qayda ilə alınan cizgilənmiş sahələr ardıcılığına baxaq (Şəkil 11). Birinci kvadratın yarısı cizgilənir, hər bir sonrakında isə əvvəlki kvadratın cizgilənməsinin qalan hissəsinin yarısı cizgilənir.



Şəkil 11.

Bu prosesin sonsuz olduğunu təsəvvür edərək və bir kvadratdan digərinə keçdikdə cizgilənmiş sahələrin necə dəyişdiyini müşahidə edərək asanlıqla müəyyən etmək olar ki, cizgilənmiş $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ sahələri ardıcılığı 1) artandır (hər bir sonrakı cizgilənmiş sahə əvvəlkindən böyükdür); 2) $(\forall n)[S_n < 1]$ olduğundan məhduddur (cizgilənmiş ixtiyari sahə kvadratin 1-ə bərabər qəbul edilən sahəsindən kiçikdir); 3) Cizgilənmiş sahələr 1-ə istənilən qədər “yaxınlaşır”, yəni sahələrin cizgilənməsi prosesini kifayət qədər davam etdirməklə 1-dən istənilən qədər az fərqlənən sahə ala bilərik. Başqa sözlə desək, əvvəlcədən istənilən qədər kiçik müsbət ε ədədi versək, ardıcılığın elə həddini tapmaq olar ki, 1-dən fərqi ε -dan kiçik olar. Baxılan vəziyyəti digər analitik aspektdə öyrənmək məqsəduyğundur. Cizgilənmiş sahələrin qiymətlərini asanlıqla tapmaq olar: $S_1 = \frac{1}{2}; S_2 = \frac{3}{4}; S_3 = \frac{7}{8}; \dots; S_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$

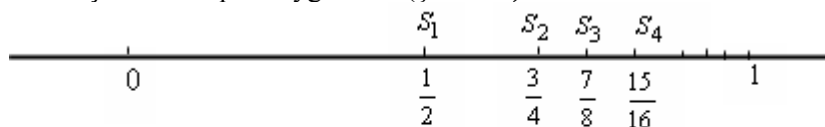
Beləliklə, $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}$ ardıcılığını öyrənirik.

1 ilə bu ardıcılığın ümumi həddi arasındakı fərqi tapaq:

$$1 - \frac{2^n - 1}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

Fərğin əvvəlcədən verilmiş ε ədədindən kiçik olmasını istəyiriksə, yəni $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ olmasını istəyiriksə, aydındır ki, $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ götürmək kifayətdir. Alınmış münasibət həmin ardıcılıq hədlərini 1-dən istənilən qədər az fərqlənməsi haqqındakı bizim intuitiv fərziyyəimizi təsdiq edir və dəqiqləşdirir.

Həmin vəziyyəti ardıcılığın hədlərinin düz xəttin nöqtələri şəklində təsviri nəticəsində alınan həndəsi mənzərə ilə göstərməklə də nəzərdən keçirmək məqsəduyğundur. (Şəkil 12)



Şəkil 12.

Ardıcılığın hədlərini təsvir edən nöqtələrin 1 nöqtəsi ətrafına “toplanması” müəyyən edilir, yəni hər hansı həddən başlayaraq sağ ucu 1 nöqtəsində olan ixtiyari kifayət qədər kiçik parçada ardıcılığın bütün hədləri, bu parçanın xaricində isə sonlu sayda hədlər yerləşir. Məsələn uzunluğu $\varepsilon = \frac{1}{10}$ bərabər parçanı götürsək, onda onun xaricində ardıcılığın birinci üç həddi, daxilə isə dördüncüdən başlayaraq bütün hədlər yerləşir; $\varepsilon = \frac{1}{100}$ götürdükdə, onun xaricində əvvəldən 6 hədd, daxilə isə bütün qalanları yerləşir.

Ayındır ki, ε çox kiçik seçsək, bu parçanın xaricində ardıcılığın çox hədləri, lakin həmişə sonlu saydası, daxilində isə hər-hansı həddən başlayaraq hamısı olar.

Qeyd etmək lazımdır ki, göstərilən halda ardıcılığın hədləri hamısı 1-dən solda yerləşməklə onun ətrafında toplanır (çünki $(\forall n)[S_n < 1]$).

Burada hədləri sağda və ya hər iki tərəfdə yerləşməklə nöqtə ətrafını yığılan (toplanan) ardıcılıqlara misallar göstərmək lazımdır.

Məsələn, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ ardıcılığının hədləri 0 nöqtəsindən sağda yerləşməklə onun ətrafına toplanır, $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \dots$ ardıcılığının hədləri isə onun hər iki tərəfində yerləşməklə ona yaxınlaşır.

2.5. Bir neçə konkret belə halları diqqətlə nəzərdən keçirdikdən sonra artıq ümumiləşdirmə aparmaq olar.

Fərz edək ki, $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ardıcılığı verilir və onun hədləri hər-hansı l nöqtəsi ətrafına toplanır. Bu o deməkdir ki, hər-hansı istənilən qədər kiçik müsbət ε ədədi verilərsə elə nömrə tapmaq olar ki, ondan (bu nömrədən) başlayaraq ardıcılığın bütün hədləri ilə l -in fərqi ε -dan kiçik olar.

Həndəsi dildə bu o deməkdir ki, a_n nöqtəsindən (ε -dan asılı hər hansı n_0 nömrəsindən başlayaraq) l nöqtəsinə qədər məsafə ε -dan kiçikdir, yəni $|a_n - l| < \varepsilon$ və ya $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

Bu bərabərsizliyin aşağıdakı həndəsi mənası vardır: $a_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, a_n nöqtəsi uzunluğu 2ε ortası l nöqtəsində olan $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ parçasına daxildir.

Burada l nöqtəsinin ε ətrafı anlayışını da daxil etmək yerinə düşər.

Bu anlayışdan istifadə etməklə ardıcılığın hədlərinin l nöqtəsi ətrafına “toplanması” adlandırdığımız vəziyyəti aşağıdakı kimi izah etmək olar: l nöqtəsinin istənilən qədər kiçik ε - ətrafında, ardıcılığın hər-hansı həddən başlayaraq, bütün hədləri, bu ətrafın xaricində isə ardıcılığın həmişə sonlu sayda hədləri yerləşir. Beləliklə, ardıcılığın limitinin məlum tərifinə gəlirik və məntiqi-riyazi dildən istifadə etməklə bu tərifin aşağıdakı tam və dəqiq yazılışını alırıq:

$$\lim_{Df} a_n = l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n)[n > n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon]$$

Tərifin bu yazılışı $\lim a_n = l$ təklifinin inkarını (sadə qaydanın köməyi ilə) almağa imkan verir: $\lim a_n \neq l \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0)(\exists n)[n > n_0 \wedge |a_n - l| \geq \varepsilon]$. Bu inkarlıqdan hər-hansı ədədin hər-hansı ardıcılığın limiti olmasını yalana çıxarmaqda istifadə olunur. Məsələn, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = 1$ təklifinin yalan

olduğunu göstərmək üçün $\varepsilon = \frac{1}{3}$ götürmək kifayətdir və hər hansı n_0

götürdüksə onda elə $n > n_0$ vardır ki, $\left| 1 - \frac{n}{2n+1} \right| \geq \frac{1}{3}$. Biz ardıcılığın

limiti anlayışının daxil edilməsi metodikasına ona görə ətraflı baxdıq ki, məhz bu birinci xüsusi halda “toplanma”, “yaxınlığında”, “ətraf” və s. intuitiv anlayışların riyaziləşdirilməsi həyata keçirilir. Bu anlayışlar funksiyanın limiti və kəsilməzliyi anlayışlarında da belə mühüm yer tutur. Funksiyanın limiti və kəsilməzliyi anlayışlarının daxil edilməsinin metodikası üzərində ətraflı dayanmayacağıq.

3. Funksiyanın limiti

3.1. Sonsuzluqda funksiyanın limiti anlayışı ardıcılığın limiti anlayışının $\mathbb{R}$ çoxluğunda təyin olunmuş funksiya halı üçün sadə ümumiləşdirilməsindən alınır:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \Leftrightarrow_{Df} (\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0)(\forall x)[x > x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon]$$

Funksiyanın nöqtədə limitinə gəldikdə isə bu anlayışın daxil edilməsinə aid müxtəlif yanaşmalar vardır.

3.2. Məktəb təliminə yeni anlayış, göstərilən halda funksiyanın limiti, daxil edildikdə və bu anlayışın müxtəlif elmi şərhləri varsa, hansı nöqtəyi nəzərən məktəb tədrisi üçün münasib olduğunu müəyyən etmək məqsədi ilə onları müqayisəli təhlil etmək zərurəti yaranır.

Funksiyanın nöqtədə limitinin iki ekvivalent tərfi – “Koşi mənadı”, “Heyni mənadı” məlumdur. Birincidə “ $\varepsilon - \delta$ dili” adlanandan, ikincidə isə bilavasitə ardıcılığın limitindən istifadə olunur.

Bəziləri “ $\varepsilon - \delta$ dilini” şagirdlər üçün çətin hesab edirlər və funksiyanın limitinə ardıcılığın limiti vasitəsilə tərif verməyi məqsədəuyğun sayırlar. Bu təriflərin məntiqi-riyazi dildə yazılması onların quruluşlarının çətinliyini müqayisə etməkdə və daha əsaslı seçməkdə bizə kömək edir. Koşi mənadı tərif:

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow_{Df} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \neq a)[(|x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - b| < \varepsilon)] \quad (1)$$

Heyni mənadı tərif:

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow_{Df} (\forall \{x_n\} \neq a)[\lim \{x_n\} = a \Rightarrow (\lim f(x_n) = b)] \quad (2)$$

Göründüyü kimi hər iki tərifin mürəkkəb quruluşu vardır. (1) tərfi ardıcılıqları mühüm olan, üç kvantorla başlayır. Məhz kvantorların ardıcılığının pozulması tərifin yanlışlığına səbəb olur. I kurs tələbələri çox vaxt kvantorların yerini dəyişməklə funksiyanın limitinin tərifini ifadə edirlər ki, bu da qeyd etdiyimiz kimi səhv nəticəyə gəlməyə səbəb olur. Lakin bu cəhətdən (2) tərfi sadə deyil. Kvantorun $\{x_n\}$ ardıcılığı üzrə arqumentin qiymətinə aid olması az çətinliyə səbəb olmur.

(2) tərifində ardıcılığın limiti tərifindən istifadə edilsə, lakin (1) tərfi öz quruluşuna görə ardıcılığın limitinin tərifinə yaxındır. Bundan əlavə (1) tərifinin quruluşu funksiyanın kəsilməzliyinin tərifinin quruluşu ilə üst-üstə düşür. (1) tərifində b ədədini $f(a)$ ilə əvəz etmək və əlavə olaraq f funksiyanın $x = a$ üçün təyin olmasını tələb etmək kifayətdir (bu da funksiyanı a nöqtəsində limitinin varlığı üçün məcburi deyil) və bununla biz funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyinin tərifini alırıq. Habelə qeyd etmək lazımdır ki, (1) tərfi ətraf anlayışından

istifadə etməklə funksiyanın limiti anlayışını həndəsi olaraq daha əyani göstərməyə imkan verir. Oy oxu üzərində b nöqtəsinin hər-hansı ε ətrafını götürdükcə, Ox oxu üzərində a nöqtəsinin elə δ - ətrafını tapa bilərik ki, (bilavasitə quraraq), bu ətrafa “düşən” bütün x üçün funksiyanın uyğun qiyməti b nöqtəsinin ε ətrafına düşür (başqa sözlə b -dən ε -na nisbətən az fərqlənir).

“ $\varepsilon - \delta$ dilinə” gəldikdə isə uyğun münasib çalışmalardan sonra şagirdlərə aydın olur. Bu çalışmaların köməyi ilə şagirdlər verilən ε görə $|x - a| < \delta$ -dan $|f(x) - b| < \varepsilon$ -in (və ya kəsilməzlik halında $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$) alınması üçün δ -nı tapmaq bacarığına sahib olurlar.

ε və δ - ətrafının həndəsi göstərişi ilə birlikdə bu çalışmalar “ $\varepsilon - \delta$ dilindən” ona əlavə edilən ənənəvi anlaşılmazlığı kənar edir.

Yuxarıda izah edilən mühakimədən istifadə edərək belə nəticəyə gəlmək olar ki, (1) tərfi məktəb təlimində üstün tutulmalıdır.

4. Funksiyanın kəsilməzliyi

4.1. Funksiyanın kəsilməzliyi haqqında intuitiv anlayışı bir tərəfdən bu xassəyə malik olan və olmayan funksiyaların qrafiklərini müşahidə etməklə, digər tərəfdən isə arqumentin verilmiş təqribi qiymətləri üzrə funksiyanın təqribi qiymətini hesablamaq haqqında məsələdən istifadə etmək olar.

$$1) \text{ Məsələn, } f_1 : x \rightarrow x^2, x \in R \quad \text{və} \quad f_2 : x \rightarrow \frac{1}{x^2}, x \in R \setminus \{0\}$$

funksiyaların qrafiklərini müqayisə etməklə, müəyyən etmək olar ki, f_1 funksiyası karandaş kağızdan (və ya təbəşiri yazı taxtasından) ayırmadan çəkmək mümkün olan “bütöv”, “kəsilməz”, f_2 funksiyasının qrafikini isə belə çəkməni yerinə yetirmək mümkün olmayan “kəsilən” xətdir.

f_2 funksiyasının qrafiki üzrə soldan sağa hərəkət etdikdə çəkməni davam etdirmək üçün karandaş kağızdan ayırır “tullanmaq” lazım gəlir.

Başqa növ kəsilməsi olan başqa qrafiklərə də baxmaq məqsəduyğundur.

$$\text{Məsələn, } f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{və ya} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

funksiyalarının qrafikinə baxmaq olar.

2) Təqribi hesablamə nöqtəyi nəzərdən kəsilməzlik anlayışına yanaşma orta məktəbin riyaziyyat təmaüllü IX-X sinifləri üçün riyazi analiz üzrə yazılmış tədris vəsaitində¹ yaxşı yerinə yetirilmişdir.

Praktik olaraq kvadratın sahəsinin ölçülməsi məsələsi onun tərəfinin ölçülməsi və alınmış ədədin kvadrata yüksəldilməsi məsələsinə gətirilir. Lakin ölçmə zamanı xəta labüddür (başqa sözlə mütləq xətti alınır) Kvadratın tərəfini müxtəlif dəqiqliklə ölçməklə kvadratın sahəsi üçün də müxtəlif dəqiqliklə qiymətlər alırıq. Bu zaman müəyyən edirik ki, tərəfin ölçülməsi xətası azaldıqca sahənin hesablanması xətası da azalır. Müxtəlif dəqiqlikdə bir neçə konkret hesablamalardan sonra intuitiv olaraq aydın olur ki, kvadratın tərəfini kifayət qədər az xəta ilə (kifayət qədər yüksək dəqiqliklə) ölçdükdə onun sahəsini istənilən qədər az xəta ilə (istənilən qədər yüksək dəqiqliklə) hesablaya bilərik. Bu hadisə nə ilə izah edilir?

Mahiyyət etibarı ilə biz burada arqumentin verilmiş təqribi qiymətinə əsasən $y = x^2$ funksiyanın təqribi qiymətini hesablaməq məsələsini həll etdik və müəyyən etdik ki, arqument qiyməti az xəta ilə dəyişdikdə (az dəyişmə və ya x-in artımı) funksiyanın qiyməti də az xəta ilə dəyişir (y-in az artımı). Arqumentin kiçik artımının funksiyanın kiçik artımını alınmasına səbəb olması xassəsi funksiyanın, əyani olaraq onun qrafikinin kəsilməzliyini ifadə edən kəsilməzlik xassəsidir (kəsilməsi olmayan).

Burada kəsilməzliyə verilən izahat aydındır ki, funksiyanın kəsilməzliyi riyazi anlayışının tərfi deyildir. Bu izahata “kiçik artım” kimi dəqiq mənası olmayan ifadə daxildir. Lakin bir daha qeyd edək ki, kəsilməzliyin “dəqiq olmayan” intuitiv izahı olmadan uyğun dəqiq riyazi anlayışı ifadə etmək olmaz.

¹ Виликин Н.Я., Шварибурд С.И. Математический анализ, Учебное пособие для IX-X классов средних школ с математической специализацией. М., 1969

4.2. İndi funksiyanın intuitiv kəsilməzliyi anlayışının riyaziləşdirilməsinə başqa sözlə “f funksiyası x_0 nöqtəsində (və ya $x = x_0$ olduqda) kəsilməyəndir” cümləsinin dəqiq mənasının izahını (və ya verilməsinə) keçək.

Biz artıq intuitiv səviyyədə müəyyən etdik. Bu o deməkdir ki: x_0 -in qiymətini kifayət qədər dəqiqliklə ölçdükdə $f(x_0)$ -ı hesablama zamanı xətanı istənilən qədər kiçik etmək olar.

x_0 -in qiyməti δ dəqiqliklə ölçülmüşdürsə, onda bu o deməkdir ki, x -in alınan təqribi qiyməti x_0 dəqiq qiymətdən (bu və ya digər tərəfə) fərqi δ -dan azdır, yəni $|x - x_0| < \delta$ (təqribi x qiyməti dəqiq x_0 qiymətindən böyük və ya kiçik ola bildiyindən $x - x_0$ fərqlərinin mütləq qiyməti götürülür), bu zaman ölçmənin dəqiqliyi həmişə müsbətdir: $\delta > 0$.

“ $f(x_0)$ -in hesablanması zamanı xətanı istənilən qədər kiçik etmək olar” ifadəsi o deməkdir ki, hər hansı $\varepsilon > 0$ dəqiqliyi verilərsə verilsin, həmişə ona nail olmaq mümkündür ki, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ “həmişə ona nail olmaq mümkündür ki, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ” ifadəsinin isə belə dəqiq mənası vardır: “həmişə elə $\delta > 0$ tapmaq mümkündür ki, $|x - x_0| < \delta$ isə, onda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ”.

Dəqiq olmayan ifadəni dəqiq ifadəyə belə köçürmək nəticəsində aşağıdakı tərifı alırıq:

1. f funksiyası x_0 nöqtəsində təyin olunmuşdursa

2. İxtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ tapmaq mümkündür ki, ixtiyari x üçün (f-in təyin oblastından) $|x - x_0| < \delta$ isə onda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, başqa

sözlə

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)[|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon] \quad . \quad f$$

funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməyəndir.

4.3.Kəsilməzliklə funksiyanın nöqtədə limiti arasındakı əlaqəni aydınlaşdırmaq lazımdır.

Kəsilməzliyin tərfi ilə funksiyanın nöqtədə limitinin tərifinin (3.2 (1) tərfi) qarşılaşdırılması ilə asanlıqla müəyyən etmək olur ki, funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyi funksiyanın bu nöqtədə limitinin varlığını və limitin funksiyanın bu nöqtədə qiymətinə bərabər olmasını özünə daxil edir.

Sonuncuda bu nöqtənin funksiyanın təyin oblastına daxil olması şərti implikasiya şəklində ifadə olunmuşdur (bu da limitin varlığı üçün məcburi deyildir).

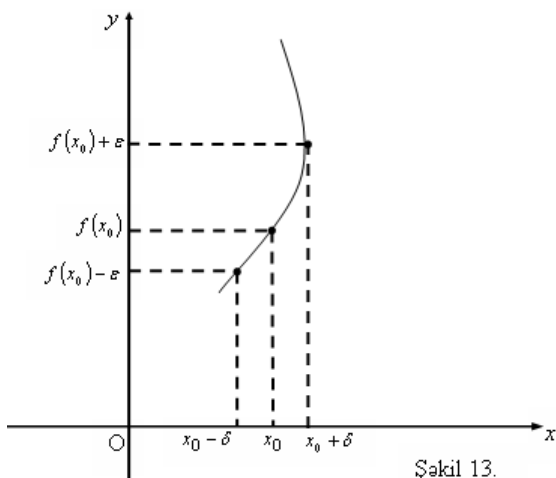
Beləliklə “ f x_0 nöqtəsində kəsilməyəndir” (1) cümləsi üç cümlədən ibarət aşağıdakı konyuksiya ilə eynigüclüdür: “ f x_0 nöqtəsində təyin olub” və “ f -in x_0 nöqtəsində limiti vardır” və $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \equiv f(x_0)$ ”

Burada (1) təklifinin inkarı, yəni “ f x_0 nöqtəsində kəsiləndir” təklifi o deməkdir ki: “ f x_0 nöqtəsində təyin olmayıb” və ya “ f -in x_0 nöqtəsində limiti yoxdur” və ya “ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ”

Biz nöqtədə kəsilməyən funksiya anlayışı üçün tam müxtəlif əks misalları aldıq.

4.4. Funksiyanın
nöqtədə kəsilməzliyinin alınmış tərfi 13-cü şəkiləki həndəsi mənzərəyə uyğundur.

Ordinat oxu üzərində $f(x_0)$ nöqtəsini ixtiyari ε ətrafını seçsək, onda absis oxu üzərində x_0 nöqtəsinin aşağıdakı xassədə δ ətrafı tapılar: bu ətrafda hansı x nöqtəsi götürsək, ordinat oxu



Şəkil 13.

üzərində ona uyğun $f(x)$ nöqtəsi $f(x_0)$ nöqtəsinin seçilmiş ε ətrafına düşür.

1.17. Törəmə anlayışının daxil edilməsi metodikası

I. Proqramda diferensial hesabı elementləri

II. Törəməyə gətirilən məsələlər.

III. Törəmə anlayışı haqqında.

IV. Törəmənin həndəsi mənası.

V. Elementar funksiyaların diferensiallanmasına aid əsas teoremlərin isbatı və düsturların çıxarılması haqqında.

VI. Törəmənin tətbiqləri.

I. Funksiyanın törəməsi anlayışı riyazi analiz kursunun ən mühüm anlayışlarından biridir. Çünki bu anlayış diferensial və integral hesabının qurulmasının əsasını təşkil edir. Şagirdlər bu anlayışla XI sinfin “Cəbr və analizin başlanğıcı” kursunda “Törəmə və onun tətbiqləri” mövzusunda tanış olurlar. Cəmin, hasilin, qismətin, çoxhədlinin, qüvvət, tərs, kəsir-rasional və mürəkkəb funksiyaların törəməsi, funksiyanın artması və azalması, maksimum və minimum, kvadrat üçhədlinin ayrışdırılması, törəmənin həndəsəyə (toxunan) və funksiya (sürət, təcil) tətbiqləri də bu vaxt öyrənilir. X sinifdə şagirdlər triqonometrik, üstlü və loqarifmik funksiyaların törəmələri ilə tanış olurlar.

II. Funksiyanın törəməsi anlayışını daxil edərkən hər hansı növ limitlərin əhəmiyyətli olduğunu və bununla da onların öyrənilməsinin zəruriliyini göstərən məsələlərə baxmaq faydalıdır. Belə məsələlərə nümunə olaraq cismin düzxətli hərəkətinin ani sürəti, cərəyan şiddətinin ani qiyməti, cismi nöqtədə istilik tututmu və nöqtədə xətti sıxlığı, funksiyanın qrafikinə toxunan çəkmək, kimyəvi reaksiyanın sürəti və s. haqqındakı məsələləri göstərmək olar. Cismin düzxətli hərəkətinin ani sürətini tapmaq, funksiyanın qrafikinə toxunan çəkmək və nöqtədə xətti sıxlıq haqqındakı məsələlər X sinfin “Cəbr analizin başlanğıcı” tədris vəsaitində izah edilmişdir. Burada cərəyan şiddətinin ani qiyməti, cismin istilik tutumu, kimyəvi reaksiyanın sürəti haqqındakı məsələlər üzərində bir qədər müfəssəl dayanırıq. Ani sürət və toxunan haqqındakı məsələlərdən isə bilavasitə törəmə anlayışını daxil etmək məqsədi ilə istifadə edirik.

Cərəyan şiddətinin ani qiyməti haqqında məsələ

Hər hansı mənbəyli cərəyan şiddətinin elektrik dövrəsini təsəvvür edək. t müddətində naqilin en kəsiyindən keçən elektrikin miqdarını

(kulonla) $q=q(t)$ ilə işarə edək. Elektrik miqdarı zamanın funksiyasıdır. Çünki t zamanın hər bir qiymətinə elektrik miqdarının müəyyən qiyməti uyğundur.

Fərz edək ki, Δt zamanın hər-hansı aralığı $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$ göstərilən kəsikdən zamanın t anından $t + \Delta t$ anına qədər aralıqda keçən elektrik miqdarıdır. Onda $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ nisbətinə zamanın Δt aralığında orta cərəyan şiddəti deyilir və I_{or} ilə işarə edilir.

Başqa sözlə naqildən vahid zamanda keçən elektrik miqdarına orta cərəyan şiddəti deyilir. Sabit cərəyan halında I_{or} sabit olacaqdır.

Dövrəyə dəyişən cərəyan buraxılmışdırsa onda zamanın müxtəlif anlarında (və ya zamanın müxtəlif aralıqlarında) I_{or} müxtəlif olacaqdır. Odur ki, dəyişən cərəyan dövrəsi üçün ani cərəyan şiddəti və ya zamanın verilmiş anında cərəyan şiddəti anlayışı daxil edilir.

Elektrik miqdarının Δq artımının bu artımın yayındığı Δt zamanına nisbətinin $\Delta t \rightarrow 0$ şərtində limitinə t momentində (anında) ani cərəyan şiddəti deyilir. O belə işarə edilir. $i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_{or} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$.

Cismin istilik tutumu haqqında məsələ

Kütləsi $1q$ olan cismin temperaturu $t_1^0 = 0$ dan $t_2^0 = \tau$ qədər artırsa, onda bu onun nəticəsində olur ki, cismə müəyyən Q miqdarında istilik verilir, deməli Q cismin qızdırdığı τ temperaturunun (cisim τ temperaturuna qədər qızdırılır) funksiyasıdır. $Q = Q(\tau)$.

Fərz edək ki, cismin temperaturu τ -dan $\tau + \Delta \tau$ qədər artmışdır.

Bu qızdırılmaya sərf edilən ΔQ istilik miqdarı $\Delta Q = Q(\tau + \Delta \tau) - Q(\tau)$ -ya bərabərdir.

$\frac{\Delta Q}{\Delta \tau}$ nisbəti – temperaturun $t_1^0 = \tau$ -dan $t_2^0 = \tau + \Delta \tau$ - ya qədər

dəyişməsində cismi “orta hesabla” 1^0 qızdırmaq üçün lazım olan istilik miqdarıdır.

Bu nisbətə verilmiş cismin $]\tau, \tau + \Delta \tau[$ temperatur intervalında orta istilik tutumu deyilir və C_{or} ilə işarə edilir.

Orta temperatur τ temperaturunun ixtiyari qiyməti üçün istilik tutumu haqqında təsəvvür yaratmadığından, verilmiş τ temperaturunda (verilmiş τ nöqtəsində) istilik tutumu anlayışı daxil edilir. İstilik miqdarının ΔQ artımının $\Delta \tau$ temperatur artımına nisbətinin $\Delta \tau \rightarrow 0$ şərtində limitinə τ temperaturunda (τ nöqtəsində) istilik tutumu deyilir. O, belə $C(\tau) = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} C_{or} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta \tau}$ işarə olunur.

Kimyəvi reaksiyanın sürəti haqqında məsələ

Fərz edək ki, hər hansı cisim kimyəvi reaksiya daxil edilir. Zamanın t anında, artıq reaksiyaya daxil edilmiş bu cismin miqdarını $y(t)$ ilə işarə edək. Beləliklə y zamanın başqa sözlə t dəyişəninin funksiyasıdır.

Δt - zamanın hər hansı aralığıdırsa, onda zamanın t anından $t + \Delta t$ momentinə qədər aralıq vaxtında daha bir qədər $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$ cisim daxil olar. Beləliklə, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ nisbəti zamanın Δt aralığında kimyəvi reaksiyanın orta sürətini ifadə edir. Verilmiş t anında kimyəvi reaksiyanın sürətini xarakterizə etmək üçün $\Delta t \rightarrow 0$ olduqda bu nisbət limitinə baxmaq lazımdır, başqa sözlə $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$.

Beləliklə nəticədə şagirdlərin diqqətini o cəhətə yönəltmək lazımdır ki, baxdığımız məsələlərdə zaman ərzində elektrik miqdarının dəyişmə sürətini xarakterizə edən kəmiyyət olaraq ani cərəyan şiddəti anlayışı temperaturun dəyişməsi zamanı istilik miqdarının dəyişmə sürəti kimi verilmiş temperaturada cismin istilik tutumu anlayışı zaman ərzində reaksiyada iştirak edən cismin miqdarının dəyişmə sürəti kimi zaman anında kimyəvi reaksiyanın sürəti haqqında söhbət gedir. Qeyd edilir ki, yuxarıda baxılan anlayışların hamısının daxil edilməsində xüsusi növ limitdən belə ki, arqument artımı sıfıra yaxınlaşmaqla funksiya artımını arqument artımına nisbətinin limitindən istifadə edildi.

Həllində hər hansı funksiyanın dəyişmə sürətinin tapılması lazım olan çox məsələlər göstərmək olar. Məsələn: Müyyən anda məhlulun konsentrasiyasının, mayenin məsarifinin, fırlanan cismin bucaq sürətinin, nöqtədə xətti sıxlığın tapılması və s.

Bu növdən olan məsələlərin nəzərdən keçirilməsi ilə şagirdlər belə nəticəyə gəlməlidirlər ki, funksiyanın dəyişmə sürəti anlayışı praktik cəhətdən əhəmiyyətli olan çoxlu sayda məsələlərin həllində lazımdır.

III. Törəmə anlayışının daxil edilməsinin hamıya məlum və geniş yayılmış yanaşılması (ali məktəb kursundan istifadə edilən) aşağıdakından ibarətdir.

(1) Verilmiş t momentində hərəkət edən cismin (məsələn, sərbəst düşən) sürətinin tapılması haqqında fiziki məsələ;

(2) Əyriyə (verilmiş funksiyanın, məsələn $y = x^2$ qrafikindən ibarət) onun üzərində verilmiş nöqtədə toxunanın qurulması haqqında həndəsi məsələ.

Müəyyən edilir ki, məzmunlarına görə müxtəlif olan bu iki məsələnin həlli eyni bir əməliyyata gəlir. Bu əməliyyatı ümumi şəkildə aşağıdakı şəkildə izah etmək olar.

$y = f(x)$ tənliyi ilə ifadə edilən hər hansı funksiya verilir ((1) məsələsində bu tənlik zamanın funksiyası kimi yolu, (2) məsələsində f funksiyasının qrafiki kimi əyrini ifadə edir).

Hər iki məsələnin həlli zamanı (eləcə də əvvəldə baxdığımız məsələlərin) biz aşağıdakı əməliyyatı yerinə yetiririk.

1⁰. Arqumentin verilmiş x qiymətindən ((1) məsələsində - zamanın baxılan aralığının başlanğıcı, (2) məsələsində əyrinin verilmiş M nöqtəsinin absisi) yenə funksiyanın təyin oblastına daxil olan yeni $x_1 = x + \Delta x$ qiymətinə keçirik və funksiyanın yeni $y_1 = y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ ($f(x)$ - hər-hansı $]a b[$ intervalında təyin ola bilər) qiymətini tapırıq ((1) məsələsində zamanın baxılan aralığının sonunda düşən cismin keçdiyi yol; (2) məsələsində - əyrinin yeni P nöqtəsinin ordinatı)

2⁰. Funksiyanın $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ artımını tapırıq ((1) məsələsində zamanın baxılan aralığında düşən cismin getdiyi yol; (2) məsələsində M və P nöqtələri ordinatlarının fərqi)

3⁰. Funksiya artımının arqument artımı nisbətini tapırıq:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = F(\Delta x)$$

((1) məsələsində Δx aralıq vaxtında düşən cismin orta sürəti; (2) məsələsində MP kəsənin bucaq əmsalı). Verilmiş nisbət $\Delta x = 0$ -dan

başqa Δx -in $]a - x, b - x[$ intervalından olan bütün qiymətlərində təyin olunmuşdur.

4. Arqument artımı sifra yaxınlaşdıqda funksiya artımının arqument artımına nisbətinin limitini (əgər varsa) tapırıq: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Başqa sözlə $\Delta x \rightarrow 0$ şərtində $F(\Delta x)$ funksiyanın limitini axtarıq (varsa).

((1) məsələsində x momentində düşən cismin ani sürəti; (2) məsələsində M nöqtəsində əyriyə toxunanın bucaq əmsalı).

1^0-4^0 əməllər ardıcılığına bir mürəkkəb əməliyyat kimi baxılır və f funksiyaının diferensiallanması adlanır. Arqumentin müəyyən qiyməti qeyd edilsə, diferensiallaşmanın nəticəsi müəyyən ədəd olur. Arqumentin müxtəlif qiymətlərinə diferensiallaşmanın nəticəsi kimi ümumiyyətlə müxtəlif ədədlər uyğundur. (zamanın müxtəlif momentlərində cismin hərəkət sürəti müxtəlifdir, əyrinin müxtəlif nöqtələrində toxunanın bucaq əmsalı müxtəlifdir).

Beləliklə, funksiyanın diferensiallanması nəticəsində həmin x arqumentinin yenidən hər-hansı funksiyası alınır. Bu yeni funksiya f' ilə işarə edilir və törəmə funksiya və ya sadəcə: verilmiş f funksiyaının törəməsi adlanır.

Beləliklə, törəmənin arqument artımı sifra yaxınlaşdıqda funksiya artımının arqument artımına nisbətinin limitindən ibarət məlum tərifinə gəlirik. Göründüyü kimi törəmə anlayışını vermək üçün 2-3 konkret məsələyə baxmaq lazım gəlir.

Beləliklə, təbii olaraq belə tərif alınır:

Verilmiş $f(x)$ funksiyaının x nöqtəsindəki artımının onu yaradan arqument artımına nisbətinin, arqument artımı sifra yaxınlaşdıqda, limitinə, əgər bu limit varsa, $f(x)$ funksiyaının x nöqtəsində törəməsi deyilir. Bu tərfi almaq üçün ani sürət, xəttə toxunan haqqında məsələlərdən başlayıb, sonra isə funksiyanın dəyişmə sürəti haqqındakı məsələlərə keçmək məsləhətdir, başqa sözlə funksiyanın törəməsi anlayışı bu anlayışa gətirilən məsələlər əsasında formalaşdırılmalıdır. Qeyd edək ki, məsələlər nə qədər müxtəlif olsa bir o qədər yaxşıdır, çünki məhz tətbiqin müxtəlifliyi törəmə anlayışının ümumiliyini göstərir. Onu da qeyd edək ki, baxdığımız ani sürət haqqında məsələ törəmənin mexaniki, xəttə toxunan haqqında məsələ ilə həndəsi mənalarını izah etməyə imkan verir.

Funksiya artımının onu yaradan argument artımına nisbətinin bu axırıncı sıfıra yaxınlaşdıqda, limitinin hesablanmasına gətirən məsələləri şagirdlərlə nəzərdən keçirərkən ixtiyari funksiya üçün belə limitə baxmağın məqsədəuyğunluğunu qeyd etmək lazımdır.

Əvvəl baxdığımız ani cərəyan şiddəti, istilik tutumu və kimyəvi reaksiyanın sürəti məsələləri haqqında da aşağıdakıları qeyd etmək zəruridir.

a) t momentində ani cərəyan şiddəti I_t elektrik miqdarının $q(t)$ zamana nəzərən törəməsidir, yəni
$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = q'(t)$$

b) τ temperaturunda $c(\tau)$ istilik tutumu cismin aldığı $Q(\tau)$ istilik miqdarının τ temperaturuna nəzərən törəməsidir. Yəni
$$c(\tau) = \frac{dQ(\tau)}{d\tau} = Q'(\tau)$$

c) zamanın verilmiş t anında kimyəvi reaksiyanın sürəti reaksiyada iştirak edən maddənin $y(t)$ miqdarının t zamanına nəzərən törəməsidir, yəni
$$\frac{dy(t)}{dt} = y'(t).$$

Şagirdlərin diqqətini cəlb etmək lazım gələn başqa bir mühüm cəhət də aşağıdakından ibarətdir.

Törəmənin tərifindən alınır ki, $y = f(x)$ funksiyanın x nöqtəsindəki törəməsi, x -in seçilməsindən asılı olan, lakin Δx -in seçilməsindən asılı olmayan funksiyaadır.

$f(x)$ funksiyanın törəməsinə müxtəlif x nöqtələrində baxsaq, onda biz ümumiyyətlə desək müxtəlif qiymətlər alarıq.

Beləliklə, $f'(x)$ törəməsi verilmiş $y = f(x)$ funksiyanın təyin oblastı yaxud onun hər hansı hissəsi ilə ($y = f(x)$ funksiyanın özü-nün bütün təyin oblastında törəməsi olmadığı hal üçün sonuncu doğrudur) üst-üstə düşən çoxluqda təyin olunmuş, x dəyişməsinə asılı funksiyaadır.

Məsələn, $y = x^2$ funksiyası bütün ədəd düz xətti üzərində $-\infty < x < +\infty$ təyin olunmuşdur, törəməsi $y' = 2x$ dir ki, o da bütün $-\infty < x < +\infty$ ədəd düz xəttində təyin olunubdur, $y = \sqrt{x}$ funksiyası isə

$0 \leq x < +\infty$ da təyin olub, $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ törəməsi isə $0 < x < +\infty$ da

təyin olunubdur. Başqa sözlə $x=0$ qiymətini ataq y' -in təyin oblastına daxil deyil.

Funksiyanın törəməsinin təyin edilməsinin alqoritmik olduğunu başqa sözlə funksiyanın törəməsinin tapılması əməliyyatının daha sadə əməllərə-addımlara ayrıldığını şagirdlərin başa düşmələri faydalıdır. Doğrudan da $f(x)$ funksiyanının x nöqtəsində törəməsini tapmaq üçün 4 addımdan (bəzən 3 və ya 5 addımdan ibarət sxem təklif olunur) ibarət hər hansı qayda-sxem göstərmək olar:

1⁰. x arqumentinə Δx artımı vermək və arqumentini $x + \Delta x$ qiyməti üçün funksiyanı nəzərdən keçirmək, yəni $f(x + \Delta x)$.

2⁰. Funksiyanı arqumentin Δx arqumentinin doğurduğu Δf artımını hesablamalı: $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$.

3⁰. Funksiya artımının arqumenti artımının nisbətini tapmaq.

4⁰. $\Delta x \rightarrow 0$ - da bu nisbətin limitini hesablamaq: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Qeyd yuxarıda konkret misallarla yanaşı olaraq bu sxem göstərilmişdir. Orada funksiyanın törəməsinin tapılması əməliyyatının alqoritmik olduğunu qeyd etməklə qurtarmaq olardı.

Törəmənin tapılmasının bu qaydasını misallar üzərində ətraflı araşdırmaq lazımdır. Belə misallardan birinə baxaq.

$f(x) = x^3$ funksiya verilir. $f'(x)$ törəməsini tapaq.

1. x arqumentinə Δx artımı verək və $x + \Delta x$ arqumenti üçün funksiyanın qiymətinə baxaq, yəni $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$

2. Δf -i hesablayaq: $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

3. $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ nisbətini tapaq: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{3x^2 \cdot \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

4. $\Delta x \rightarrow 0$ -da $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ nisbətinin limitini hesablayaq:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2, \text{ yəni}$$

$$f'(x) = (x^3)' = 3x^2$$

Şagirdlərdə belə bir təsəvvürdə yaratmaq lazımdır ki, bütün funksiyaların (hətta kəsilməyən) təyin oblastının hər-bir nöqtəsində törəməsinin varlığını demək olmaz. Bunun üçün şagirdlərlə bir neçə misala baxmaq lazımdır:

Misal 1.

$$f(x) = |x^2 - x - 2| = \begin{cases} -x^2 + x + 2, & x \in]-1, 2[\\ x^2 - x - 2, & x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[\end{cases}$$

funksiyasının törəməsini tapın (Şəkil 14).

Həlli: a) Fərz edək ki, $x \in]-1, 2[$, onda $f(x) = -x^2 + x + 2$, beləliklə $f'(x) = -2x + 1$

b) Fərz edək ki, $x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$, onda $f(x) = x^2 - x - 2$.

Törəmənin tərifindən istifadə edərək verilmiş funksiyanın törəməsini ixtiyari nöqtədə tapaq:
 $x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$:

$$f'(x) = 2x - 1$$

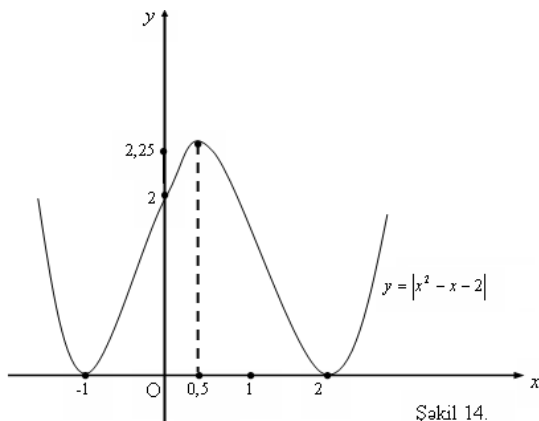
c) İndi isbat edək ki, verilmiş funksiyanın $x = -1$ və $x = 2$ nöqtələrində törəməsi yoxdur.

1. Fərz edək ki,

$x > -1$, onda $f(x) = -x^2 + x + 2$. Δx -i elə seçək ki, $-1 + \Delta x > -1$, başqa sözlə $\Delta x > 0$ olsun. Odur ki, $f(-1) = 0$ olduğunu nəzərə alıb

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f(-1)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(-1 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{3\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = 3$$

tapırıq.



Şəkil 14.

2. Fərz edək ki, $x < -1$, onda $f(x) = x^2 - x - 2$. İndi Δx -i elə seçək ki, $-1 + \Delta x < -1$, yəni $\Delta x < 0$ olsun. Odur ki, $f(-1) = 0$ olduğunu nəzərə alıb tapırıq.

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta f(-1)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(-1 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{-3\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = -3$$

$3 \neq -3$ olduğundan $f(x) = |x^2 - x - 2|$ funksiyasının $x = -1$ nöqtəsində törəməsi yxdur. Analoji olaraq isbat etmək olar ki, verilmiş funksiyanın $x = 2$ nöqtəsində də törəməsi yoxdur.

X sinifdə aşağıdakı misal da baxmaq olar.

Misal 2. $]-\pi, \pi[$ intervalında $f(x) = |\sin x|$

funksiyanın törəməsini tapın (şəkil 15).

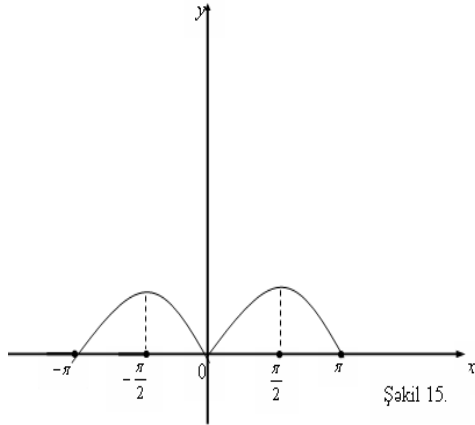
Modul anlayışından istifadə edərək verilmiş funksiyanı aşağıdakı şəkildə yazaq: $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ -\sin x, & -\pi < x < 0 \end{cases}$

x argumentinin $0 \leq x < \pi$ bərabərliyini ödəyən qiymətləri üçün verilmiş funksiya $f(x) = \sin x$ ilə üst-üstə düşdüyündən $0 < x < \pi$ üçün $f'(x) = \cos x$, $x = 0$ nöqtəsində isə alırıq:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\sin \Delta x - \sin 0}{\Delta x} = 1$$

Analoji olaraq x -in $-\pi < x < 0$ bərabərsizliyini ödəyən qiymətləri üçün, verilmiş funksiya $f(x) = -\sin x$ funksiyası ilə üst-üstə düşür, odur ki, $-\pi < x < 0$ üçün $f'(x) = -\cos x$, $x = 0$ nöqtəsində isə alırıq:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{-\sin \Delta x - \sin 0}{\Delta x} = -1$$



Beləliklə, $f(x) = |\sin x|$ funksiyasının ($|x| < \pi$ üçün) ixtiyari x nöqtəsində burada $-\pi < x < 0$ və $0 < x < \pi$, törəməsi vardır, $x = 0$ nöqtəsində isə $1 \neq -1$ olduğundan verilmiş funksiyanın törəməsi yoxdur. Baxılan misallar göstərir ki, təyin oblastının hər-hansı nöqtəsində törəməsi olmayan funksiyalar vardır.

Maraq məşğələlərdə törəmənin varlığının zəruri şərtini nəzərdən keçirmək, başqa sözlə aşağıdakı teoremi öyrənmək faydalıdır: $f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində törəməsi varsa, onda o bu nöqtədə kəsilməyəndir.

İsbatı: Şərtə görə a nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının törəməsi, başqa sözlə sonlu limiti vardır. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a)$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ münasibətin ödənildiyini göstərsək, teoremi isbat

etmiş olarıq. Beləliklə $f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində limitinin varlığını və $f(a)$ -ya bərabər olduğunu başqa sözlə bu nöqtədə funksiyanın qiymətinə bərabər olduğunu isbat etmək lazımdır.

Bu məqsədlə aşağıdakı limitə baxaq:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a).$$

$x \rightarrow a$ şərtindən $\Delta x \rightarrow 0$ şərtinin alındığını nəzərə almaqla dəyişəni $x = a + \Delta x$ ilə əvəz edək, onda alırıq:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \Delta x = f'(a) \cdot 0 = 0$$

Beləliklə, $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$, yəni $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

O cəhətə diqqət verilir ki, funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyi funksiyanın bu nöqtədə törəməsinin varlığı üçün zəruri şərtidir. Sonra qeyd edilir ki, funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyi həmin funksiyanın baxılan nöqtədə törəməsinin varlığı üçün kafi şərt deyildir. Ola bilər ki, funksiya nöqtədə kəsilməyəndir, lakin həmin nöqtədə onun törəməsi yoxdur. Əvvəl baxdığımız funksiyalar buna misal ola bilər. Məsələn

$f(x) = |x^2 - x - 2|$ funksiyası $x = -1$ və $x = 2$ nöqtələrində kəsilməyəndir, lakin bu nöqtələrdə onun törəməsi yoxdur.

$f(x) = |\sin x|, |x| < \pi$ funksiyası $x=0$ nöqtəsində kəsilməyəndir, lakin bu nöqtədə onun törəməsi yoxdur.

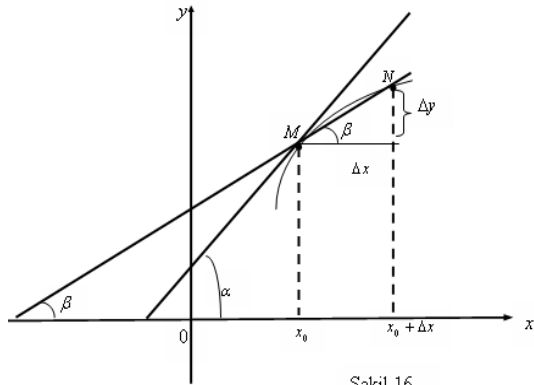
IV. Funksiyanın verilmiş nöqtədə törəməsinin həndəsi mənası bu nöqtədə funksiyanın qrafikinə çəkilmiş toxunanla əlaqədardır. Bu əlaqəni aydınlaşdırmaq üçün əvvəlcə nöqtədə funksiyanı qrafikinə toxunan tərifini vermək lazımdır.

Fərz edək ki, kəsilməyən $y = f(x)$ funksiyası verilir (Şəkil 16). Onun qrafiki çertyojda göstərilib. Funksiyanın qrafiki üzərində absisi x_0 olan M və absisi $x_0 + \Delta x$ -ə bərabər olan ixtiyari N nöqtələrinə baxaq. M və N nöqtələrindən funksiyanın qrafikinə kəsəni adlanan MN düz xəttini çəkək. MN kəsənin bucaq əmsalı $k = \tan \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ -dir.

İndi fərz edək ki, $\Delta x \rightarrow 0$. Bu o deməkdir ki, N nöqtəsinin absisi M nöqtəsinin absisiylə yaxınlaşır; bu sonuncu isə öz növbəsində o deməkdir ki, N nöqtəsi funksiyanın qrafiki üzərində qalmaqla M nöqtəsinə yaxınlaşır. Bu şərtlər daxilində, ümumiyyətlə desək, MN kəsəni M nöqtəsi ətrafında fırlanaraq öz vəziyyətini dəyişib (MT) vəziyyətini tutur.

N nöqtəsi əyri üzrə

M nöqtəsinə yaxınlaşdıqda kəsənin limit vəziyyəti olan MT düz xətti varırsa, onda bu düz xəttə M nöqtəsində funksiyanın qrafikinə toxunan deyilir. Bu zaman “kəsənin limit vəziyyəti” ifadəsi altında MN kəsənin tutduğu elə (MT) vəziyyəti başa düşülür ki, N nöqtəsi funksiyanın qrafikindən ibarət xətt üzrə M nöqtəsinə yaxınlaşdıqda MT və MN şüalarının əmələ gətirdiyi TMN bucağı sıfıra yaxınlaşsın. Başqa ifadələrlə, absisin funksiyası kimi baxılan TMN bucağının qiyməti $\Delta x \rightarrow 0$ olduqda sıfıra yaxınlaşarsa, onda (MT) vəziyyəti MN kəsənin limit vəziyyəti qəbul edilir. Beləliklə, Tərif: Funksiyanın qrafikindən ibarət əyrinin ixtiyari N nöqtəsi əyri üzərində qalmaqla M nöqtəsinə ya-



Şəkil 16.

xınlaşdıqda MN kəsənin limit vəziyyətinə funksiyanın qrafikinə M nöqtəsində toxunan deyilir.

Beləliklə, toxunan vardırsa alırıq:

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Yuxarıda deyilənlərin hamısı törəmənin həndəsi mənasını verməyə imkan yaradır.

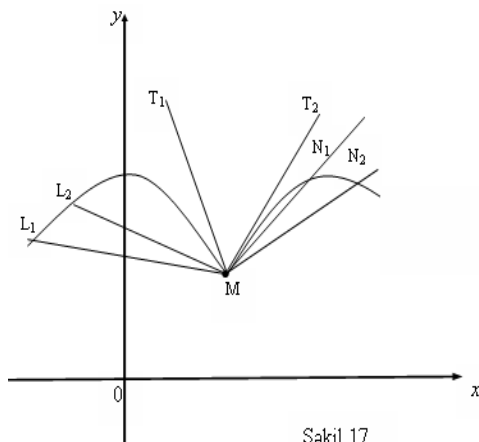
Funksiyanın nöqtədə törəməsi vardırsa, onda bu nöqtədə qrafikə toxunan vardır, habelə nöqtədə funksiyanın törəməsi bu nöqtədə funksiyanın qrafikinə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalı ilə üst-üstə düşür.

Misallar üzərində şagirdlərə izah etmək lazımdır ki, funksiyanın qrafikindən ibarət əyriyə hər hansı nöqtədə toxunan çəkmək mümkün deyil. Məsələn, 17-ci şəkildə çəkilmiş əyrinin M nöqtəsində toxunanı yoxdur, çünki bu nöqtədə əyriyə sol və sağ hissədən çəkilmiş toxunanlar müxtəlifdir. Bu növdən olan əyrilərə misal $f(x) = |\sin x|$ və

$f(x) = |x^2 - x - 2|$ funksiyaqların qrafikləri ola bilər. Məsələn,

$f(x) = |\sin x|$ üçün absisi $x=0$ nöqtəsində toxunanı yoxdur,

$f(x) = |x^2 - x - 2|$ funksiyaqlarının isə absisi $x=-1$ və $x=2$ olan nöqtələrdə toxunanı yoxdur.



Şəkil 17.

V. Törəmə haqqında əsas teoremlərin (cəbri cəmin, hasilin, iki funksiyanın nisbətinin törəməsi haqqında teoremlər) isbatı habelə hər hansı funksiyanın kvadrat kökünün törəməsinin tapılması, tərs funksiyanın (ümumi teorem) diferensiallanması tərifə əsasən, belə ki, dörd addımdan ibarət məlum sxem-alqoritm üzrə, yerinə yetirilir. Bu sxemdən istifadə bilavasitə diferensial-

lama ilə əlaqədar misallar üzərində öyrədildiyindən göstərilən təkliflərin isbatı bir qayda olaraq şagirdlərdə çətinliyə səbəb olmur.

Törəmə haqqında əsas teoremlərdən istifadə edərək tam üstlü qüvvət funksiyasının diferensiallanması düsturunu, çoxhədlinin (tam rəşional funksiya), kəsir-rasional funksiyanın diferensiallanma qaydasını çıxarmaq olar.

Triqonometrik funksiyaların diferensiallanması düsturları haqqında bəzi qeydlər edək.

Şagirdlər tam aydın başa düşməlidirlər ki, prinsip etibarı ilə yalnız bir düsturu çıxarmağı bacarmaq lazımdır: $\sin'x = \cos x$. Bütün qalan düsturlar ondan mürəkkəb funksiya və qismətin diferensiallama qaydasının tətbiqinə aid çalışma kimi alınır. Bu onunla izah edilir ki, bütün triqonometrik funksiyalar sonlu sayda cəbri əməliyyatın tətbiqi ilə bir triqonometrik funksiya, məsələn sinus vasitəsilə ifadə edilə bilər.

Lakin bu düstur tamamı ilə xüsusi qayda ilə çıxarılır. Birincisi, ikinci addımın yerinə yetirilməsi zamanı (funksiya artımının axtarılması) xüsusi priyomdan istifadə etmək-triqonometrik funksiyalardan fərqiindən onların hasilinə keçmək lazım gəlir. İkinci isə limitə keçərkən xüsusi metoda müraciət etmək – birinci mühüm limiti tətbiqi lazım gəlir. Bütün bunlar artıq o qədər çətin deyil, lakin bir qədər gözlənilməzdir və müəllimin triqonometrik funksiyaların cəbri funksiyalardan fərqli bir sıra məxsusi xüsusiyyətlərinə şagirdlərin diqqətini cəlb etməyə müəyyən qədər vaxt sərf etməsinə dəyər ki, bəzi prinsipial məsələləri təkrar edə bilsin.

İş burasındadır ki, məktəblilərin müəyyən hissəsi üçün triqonometriya J.Dedonnenin ifadəsinə görə “düsturlar damıdır”. Həqiqətən düsturlar çoxdur, lakin müəllim heç də həmişə qeyd etmir ki, onların müəyyən hissəsi təriflərin birbaşa nəticəsidir və yalnız sinusların (kosinusların) cəmi əsl yeni faktdır, deməli məhz bu düsturları yaxşı bilmək və çıxarmağa bacarmaq lazımdır. Sinusun diferensiallanması düsturunun çıxarılmasının “ikinci addımı” onun nəticəsinə əsaslanır. Lakin şagirdlər adətən bu vaxtda toplama teoremini xatırlamırlar.

Müəllimin təkcə sinusların fərqi düsturunu yenidən şagirdlərin sadəcə əzbərləməyə məcbur etmək imkanı deyil aşağıdakı sxem üzrə təkrarı təşkil etmək imkanı vardır: triqonometrik funksiyaların tərfi – vektorun koordinatları, toplama teoremləri – triqonometrik funksiyaların cəmi və fərqi düsturları.

Mürəkkəb funksiyanın diferensiallanması haqqında teorem “Cəbr və analizin başlanğıcı” kursunun proqramına daxildir, odur ki, ondan məsələn $\sin(ax+b)$, $\lg \sin x$ və ya $(ax+b)^{100}$ kimi funksiya­ların diferensiallanmasında istifadə etmək lazımdır.

Vaxta qənaət etmək məqsədi ilə göstərilən teoremi şagirdlərlə nəzərdən keçirmək və elementar funksiya­ların törəmə düsturlarının çoxalmasında mümkün qədər geniş istifadə etmək məqsədəuyğundur.

Məsələn,

$$[\sin(ax+b)]' = a \cos(ax+b);$$

$$[\cos(ax+b)]' = -a \sin(ax+b);$$

düsturları aşağıdakı kimi çıxarılır:

$$[\sin(ax+b)]' = \cos(ax+b) \cdot [ax+b]' = a \cos(ax+b),$$

$$[\cos(ax+b)]' = -\sin(ax+b) \cdot [ax+b]' = -a \sin(ax+b)$$

“Cəbr və analizin başlanğıcı ” kursunda (X sinif) üstlü və loqarifmik funksiya­ların törəməsinə baxılır.

Metodik cəhətdən çətin olan bu məsələnin izahatın bir neçə variantı vardır.

1) Əvvəlcə natural loqarifmin törəməsi tapılır, sonra isə tərs funksiyanın diferensiallanması haqqında teoremdən istifadə edərək e^x üstlü funksiya­sinin törəməsi tapılır; sonra mürəkkəb funksiyanın diferensiallanması qaydasını nəzərə almaqla üstlü funksiyanın törəməsi düsturu çıxarılır, nəhayət loqarifmik funksiyanın törəməsi düsturu müəyyən edilir.

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a; \text{ Burada } \ln a = c \text{ götürmək olar. Şəkil} \delta$$

limitin varlığını qəbul edib və törəmənin tərifindən istifadə edib üstlü funksiyanın törəməsi üçün aşağıdakı düsturun doğruluğu müəyyən

$$\text{edilir: } (a^x)' = ca^x.$$

Sonra $c=1$ baxılır, bu hal üçün a əsasının qiyməti tapılır, yəni $a=l$ tapılır.

Beləliklə, e^x üstlü funksiyanın törəməsi üçün düstur müəyyən edilir. Sonra mürəkkəb funksiyanın diferensiallanması haqqında teoremdən istifadə edərək natural loqarifmin, üstlü və loqarifmik funksiyanın

törəmələri tapılır. Üstlü və loqarifmik funksiyaları törəməsinin tapılmasının bu üsulu, yeni proqramın izahat vərəqəsində uyğun məsləhət verilməsinə baxmayaraq, bizə belə gəlir ki, şagirdlər üçün çətindir.

3) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ şəkildə limitin varlığını (ikinci mühüm limit) isbatsız qəbul etsək, onda asanlıqla müəyyən etmək olar ki, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha k)^{\frac{1}{\alpha}} = e^k$.

Doğrudan da $\alpha k = \beta$ əvəz edib, yəni $\alpha = \frac{\beta}{k}$, üstlü funksiya kəsilməyən olduğundan alırıq:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha k)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[(1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}} \right]^k = \left[\lim_{\beta \rightarrow 0} (1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}} \right]^k = e^k.$$

Sonra törəmənin tərifindən istifadə edərək $y = \log_a x$ loqarifmik funksiyanın diferensiallanması düsturunu çıxarmaq olar.

a) x arqumentinə Δx artımı verək. Onda funksiyanın yeni qiyməti $f(x + \Delta x) = \log_a(x + \Delta x)$.

$$b) \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right);$$

$$c) \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$d) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

Sonra loqarifmik funksiyanın kəsilməzliyindən və yuxarıdakı limitə baxmaqla loqarifmik funksiya üçün axtarılan düsturu tapırıq:

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \log_a \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} \right] = \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

Bu düsturdan xüsusi halda alırıq:

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Mürəkkəb funksiyanın törəməsi haqqında teoremdən

alınır:

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ və ya } (\log_a u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a}.$$

İndi loqarifmik funksiyanın törəməsi düsturundan istifadə edərək üstlü funksiyanın törəməsini müəyyən edək. $y = a^x$ baxaq. Bu bərabərliyi loqarifmalayaraq alırıq: $\ln y = x \ln a$. Sonra alınmış bərabərliyi diferensiallayırıq.

$$(\ln y(x))' = (x \ln a)', \text{ yəni } \frac{y'}{y} = \ln a, \text{ beləliklə } y' = y \ln a,$$

nəticədə $(a^x)' = a^x \ln a$.

Nəticədə loqarifmik funksiyanın törəməsi düsturundan və mürəkkəb funksiyanın diferensiallanması teoremindən istifadə edərək $y = x^\alpha$, burada α -ixtiyari həqiqi ədəddir, qüvvət funksiyanının törəməsi düsturunu necə çıxarmaq mümkün olduğunu göstərək.

$y = x^\alpha$ nı loqarifmalayıb alırıq:

$\ln y = \alpha \ln x$, sonra bu bərabərliyi diferensiallayıb alırıq:

$$\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{x}, \text{ yəni } y' = \alpha \cdot \frac{y}{x} = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

Beləliklə, nəticədə $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Törəmə anlayışı təkcə riyaziyyatın deyil, habelə başqa elmlərin (fizika, kimya və s.) və texnikanın bir çox məsələlərinin öyrənilməsində qüvvətli vasitədir. Bu fikir törəmənin öyrənilməsinin bütün mərhələlərinə də daxil olmalıdır.

1.18.İntegral anlayışının daxil edilməsi metodikası

1. Bu anlayışın məktəb riyaziyyat kursunda yeri haqqında
2. İntegral anlayışının daxil edilməsi haqqında
3. Həndəsi və fiziki məsələlərin həllində integralın tətbiqləri

1. IX-X siniflərin "Cəbr və analizin başlanğıcı" kursunda şagirdlər limit və törəmə anlayışları, onların hesablanma üsulları, habelə tətbiqləri ilə tanış etdikdən sonra XI sinifdə integral hesabının əsas anlayışları

və ideyaları ilə tanış olurlar. “İnteqral” mövzusunda baxılmalıdır: ibtidai funksiya, inteqral və onun sahələrin tapılmasına tətbiqi, inteqral uyğun cəmin limiti kimi, dairə və onun hissələrinin sahəsi. Bundan başqa XI sinifin həndəsə kursunda şagirdlər müəyyən inteqralın cisimlərin həcmnin hesablanmasına tətbiqi ilə tanış olurlar. Orta məktəbin riyaziyyat proqramında inteqrallamanın priyom və metodlarını sistemləşdirmək və mürəkkəb funksiyanı inteqrallamaq vərdişi və texnikası aşılamaq nəzərdə tutulmur.

2. Məlum olduğu kimi, həlli son növbədə şagirdlərin inteqral hesabı elementlərinin mənimsəmələrindən asılı olmayan, əsas metodik problem ibtidai funksiyanın artımı (proqramda tələb olduğu kimi) və ya inteqral cəminin limiti (ali məktəbdə adətən belə edilir) şəkildə müəyyən inteqralın daxil edilməsi üsulları haqqında məsələdir. Şərhin birinci metodu qısadır və Nyuton-Leybnis düsturunun çıxarılışını tələb etmir. Lakin müəyyən inteqralı bu metodla daxil edərkən müəyyən inteqral anlayışının əsasında duran cəmləmə metodu ideyası (müəyyən inteqral tarixən belə yaranmışdır) ikinci plana keçir. İkinci metodla inteqral cəminin limiti kimi müəyyən inteqralı daxil edərkən inteqralın öyrənilməsinə çox vaxt lazım olur, çünki müəyyən inteqral anlayışına gətirilən məsələlərə baxmaq üçün böyük hazırlıq işi aparmaq tələb olunur, sonra isə Nyuton-Leybnis düsturunu nəzərdən (çünki, təkcə tərifi əsaslanaraq sonsuz cəmin limiti kimi müəyyən inteqralı hesablamaq çətinidir) keçirmək lazım gəlir.

Lakin müəyyən inteqral anlayışına belə yanaşma, başqa sözlə axtarılması müxtəlif həndəsi və fiziki məsələlərin həllinə gətirilən hər hansı limit növünün xüsusi növü kimi baxıldıqda, görünür ki, müəyyən inteqral daha aydın və müvafiq olur, şagirdlər isə onun daxil edilməsini zəruri qanunauyğunluq kimi qəbul edirlər.

Orta məktəb üçün sınaq dərslik və dərs vəsaitlərini müxtəlif müəlliflər tərəfindən müəyyən inteqralın öyrənilməsi şərhinin qısa xarakteristikasını verək.

a) Son vaxtlarda yazılmış tədris vəsaitlərinin əksəriyyətində müəyyən inteqral anlayışının daxil edilməsinin birinci variantı qəbul edilir. Odur ki, məsələnin şərhinə ibtidai funksiyanın öyrənilməsi ilə başlanılır. (tərif verilir və ibtidai funksiyanın tapılmasının əsas teoremləri və qaydaları isbat edilir). Sonra ayrışdırılmalı trapesiyanın sahəsinin tapılması məsələsinə baxılır, göstərilir ki, mənfi olmayan $f(x)$ funksiyası halında oturacağı $[a, x]$ olan ayrışdırılmalı trapesiyanın $S(x)$ sahəsi, bu $f(x)$

funksiyasının ibtidai funksiyalarından biridir, habelə qeyd edilir ki, $[a, b]$ parçasında bu ibtidai funksiyanın artımı oturacağı $[a, b]$ olan əyri-xətli trapesiyanın sahəsinə bərabərdir. Sonra $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$

ifadəsinə $f(x)$ funksiyanın a -dan b -yə inteqralı deyilir, burada $F(x)$ isə $f(x)$ funksiyanın ibtidai funksiyasıdır.

Müəlliflər “funksiyanın qeyri-müəyyən inteqralı” istilahından, belə dedikdə bu funksiyanın bütün ibtidai funksiyalar çoxluğunu başa düşərək, istifadə etmələrinə baxmayaraq “müəyyən inteqral” terminini işlətmirlər.

Beləliklə, ibtidai funksiyanın artımı vasitəsilə müəyyən inteqral anlayışını daxil edərək, müəllimlər bununla da hazır şəkildə Nyuton-Leybnis düsturunu alırlar (başqa sözlə isbatsız – tərif şəkildə). İnteqralın əyri-xətli trapesiyanın sahəsi ilə əlaqəsini göstərməklə, müəlliflər bununla həmin inteqralın həndəsi mənasını aydınlaşdırırlar.

Nəhayət müəlliflər inteqrala inteqral cəminin limiti kimi baxırlar. Sahə anlayışını daxil etməklə və onun xassələrinə baxmaqla, sonra dairə və onun hissələrinin sahəsi öyrənilir. Nəticədə dəyişən qüvvənin işi haqqında, həllində müəyyən inteqraldan istifadə olunan, məsələlərə baxılır.

Müəyyən inteqrala belə yanaşmaya əsaslanan inteqral hesabı elementlərinin şərh variantı ilə A.İ. Markuşeviçin “Məktəb riyaziyyat kursunda inteqral” (Сборник “Новое в школьной математике”. М. “Значение”, 1972), habelə М.А.Доброхотовой и А.И.Сафанови (сборник Статей “Дополнительные главы по курсу математики Хкласса для факультативных занятий”, М. “Просвещение”, 1970) məqaləsində də tanış olmaq mümkündür.

b) Н.И.Виленкин və С.И.Шварцбурдун riyaziyyat təmayüllü orta məktəbin IX-X sinifləri üçün yazdıqları “Математический анализ” (М., “Просвещение”, 1973) kitabında habelə [3]-də “Интеграл” mövzu ali məktəbə yaxın stildə öyrənilir. $f(x)$ üçün bütün ibtidai funksiyalar çoxluğu kimi $f(x)$ funksiyanın qeyri-müəyyən inteqralı anlayışının daxil edilməsi və onun xassələrinin nəzərdən keçirilməsi ilə başlanılır. (işarə: $\int f(x) dx$). Sonra kifayət qədər tam funksiyanın inteqrallanması məsələsi öyrənilir (əvəzetmə metodu ilə və hissə-hissə inteqrallama). Sonra əyri-xətli trapesiyanın sahəsinin tapılması məsələsinə baxılır, həm də bu sahənin varlığı isbat edilir.

Kəsilməyən $f(x)$ funksiyası üçün aşağı və yuxarı inteqral cəmləri anlayışlarına tərif verərək müəlliflər $[a,b]$ parçasında kəsilməyən $f(x)$ funksiyasının müəyyən inteqralı anlayışını daxil edirlər. Müəyyən inteqrala yuxarı sərhəddin funksiyası kimi baxaraq müəyyən inteqralı hesablamaq üçün Nyuton-Leybnis düsturu çıxarılır. Sonra müəyyən inteqralın müstəvi fiqurlarının sahələrinin hesablanmasına tətbiqinə baxılır. Silindrik cismin, piramida və kəsik piramidanın, fırlanma cisimlərin, paralel kəsiyinin sahələri məlum olan cisimlərin həcmliəri, fırlanma cisimlərinin səthinin sahələri Güldenin hər iki teoremlərinə gətirilir.

Yekunlaşdıraraq qeyd edək ki, “İnteqral” mövzunun öyrənilməsinə verilən vaxt həcmnin azlığı zamanı bu mövzunun öyrənilməsinə müəyyən və ya qeyri-müəyyən inteqralla başlamaq haqqında mübahisə metodik ədəbiyyatda praktik deyil nəzəri xarakter daşıyır. Bununla əlaqədar Y.S.Dubnovun bir mülahizəsini göstərək: “İnteqral hesabının öyrənilməsinə müəyyən və ya diferensiallama məsələsinə müraciət etməklə müəyyən (inteqral cəminin limitini)” başlamaq haqqında köhnə metodik mübahisə burada öz kəskinliyini itirir. Doğrudan da bu şeylərin orta məktəbdə tədrisi həcmnin azlığı və vaxtın elə qısa parçası ilə məhdudlaşdırılmalıdır ki, hər iki anlayış eyni zamanda daxil edilə bilsin və sonralar paralel nəzərdən keçirmək mümkün olsun. (С.М.Статья в “математическом просвещении”, №5,1960. М., Физматгиз, с 54)

3. İnteqral anlayışının daxil edilməsinin birinci yanaşılmasında (başqa sözlə ibtidai funksiyanın artımı kimi) “İnteqral” mövzusunun sonunda inteqralın fizika və həndəsə ilə əlaqəsini nümayiş etdirmək, ikinci yanaşmada isə (başqa sözlə inteqrala inteqral cəminin limiti kimi baxıldıqda) onlardan başlamaq başqa sözlə, onlardan inteqral anlayışını gətirən məsələlər kimi istifadə etmək üçün məqsədə uyğun olan bir neçə məsələyə baxaq. Belə məsələlər sırasında hər şeydən əvvəl müstəvi fiqurların sahələri, yolun hesablanması, mayenin təzyiq qüvvəsi və s. haqqında ən mühüm məsələlər daxil edilməlidir. Bu məsələləri təhlil edək.

Öyrixətli trapesiyanın sahəsi haqqında məsələ

Fərz edək ki, Dekart koordinat sistemi ilə təchid edilmiş müstəvidə Ox oxunun $[a,b]$ parçası $x=a$ və $x=b$ düz xətləri, $y=f(x)$ əyrisi ilə əhatə edilmiş $aABb$ fiquru verilir. (Şəkil 18).

Qeyd edək ki, burada verilən istilahlr elementar hndəsə kursunda qəbul ediləndən fərqlənir, burada $[a,b]$ parçası trapesiyanın hündürlüyü, $x=a$ və $x=b$ paralel düz xətləri isə onun oturacaqları adlanır. Həbelə qeyd edək ki, A nöqtəsi a nöqtəsi ilə, B isə b nöqtəsi ilə üst-üstə düşə bilər. Məsələni qoyaq: “Əyrixətli trapesiyanın sahəsini tapaq”.

Qoyulan məsələnin həllinə aşağıdakı kimi başlayaq. $[a,b]$ parçasını eyni uzunluqlu n hissəyə bölək. $\Delta x = \frac{b-a}{n} = a_i - a_{i-1}$ burada a_i

nöqtələri $a = a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n = b$ ($a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$) dir. Sonra a_i ($i=1,2,\dots,n-1$) bölgü nöqtələrindən Oy oxuna paralel düz xətlər çəkək.

Aparılan əməliyyat nəticəsində verilmiş $aABb$ əyrixətli trapesiyanı oturmaqları $[a_{i-1}, a_i]$ ($i=1,2,\dots,n$) olan n əyrixətli trapesiyaya ayrılır.

Hər bir $[a_{i-1}, a_i]$ ($i=1,2,\dots,n$) parçasının üzərində ixtiyari x_i ($a_{i-1} \leq x_i \leq a_i$) nöqtəsi seçilir. Sonra oturacaqları $\Delta x = a_i - a_{i-1}$ və

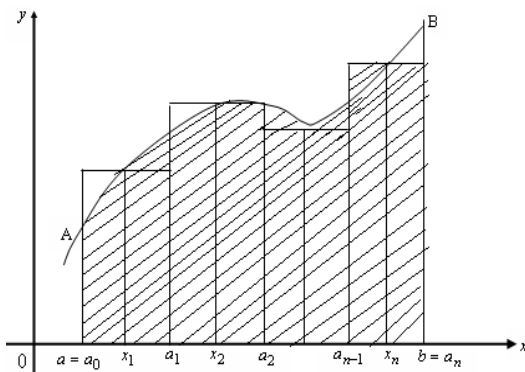
hündürlüklərinin uzunluğu $f(x_i)$ olan ($i=1,2,\dots,n$) düzbucaqlılar qurulur.

Belə düzbucaqlıların hər birinin sahəsi $f(x_i) \times (a_i - a_{i-1}) = f(x_i) \cdot \Delta x$

hasilinə bərabərdir. Qurulmuş düzbucaqlılardan sahəsi $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$

düsturu ilə hesablanan pilləli fiqur əmələ gəlir (Şəkil 18). Bu əyrixətli $aABb$ trapesiyanının təqribi sahəsidir. Aydınır ki, bölmə parçaları $[a_{i-1}, a_i]$ ($i=1,2,\dots,n$) kiçik olduqca xəta az olur. Odur ki,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ baxsaq, onda əyrixətli trapesiyanın sahəsini alırıq.

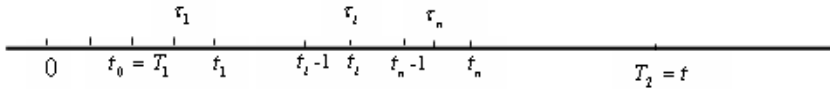


Şəkil 18.

İntegral anlayışı artıq daxil edilmiş olarsa, onda demək olar belə əyrixətli trapesiyanın sahəsi $S = \int_a^b f(x)dx$ düsturu ilə hesablanır.

Yolun hesablanması haqqında məsələ

Fərz edək ki, maddi nöqtə hər hansı ani $v = v(t)$ sürəti ilə düzxətli hərəkət edir, başqa sözlə nöqtənin sürəti zamanın ixtiyari t momentində məlumdur, $v(t)$ - $[T_1, T_2]$ parçasında kəsilməyən funksiyadır. Zamanın $t_0 = T_1$ -dən $t_2 = T_2$ aralığında cismin keçdiyi yolu tapmaq tələb olunur (Şəkil 19).



Şəkil 19.

Ən sadə halda, ani sürət sabitdirsə, yəni $v(t) = v_0 = \text{sabit}$ $t \in [T_1, T_2]$ üçün, onda cismin keçdiyi yol (fizika kursundan məlum tərifə əsasən) sürətlə hərəkət müddətinin hasilinə bərabərdir: $S = v_0(T_2 - T_1)$. Ani sürət sabit olmadan ümumi halda işə aşağıdakı kimi yanaşılır.

Zamanın dəyişmə aralığı $[T_1, T_2]$ $t_0 = T_1, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = T_2$ ($t_0 < t_1 < \dots < t_n$) nöqtələri ilə eyni $\Delta t = t_i - t_{i-1} = \frac{T_2 - T_1}{n}$ uzunluqlu n sayda $[t_{i-1}, t_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) parçalara ayrılır. Sonra hər bir $[t_{i-1}, t_i]$ parçası üzərində ixtiyari $\tau_i (t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i)$ nöqtəsi seçib $\sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t \dots$ (*) cəmi tərtib edilir. Bu cəmin hər bir $v(\tau_i) \Delta t$ toplananı cismin $t = t_{i-1}$ -dən $t = t_i$ qədər müddətdə keçdiyi təqribi yolu verir. Doğrudan da $v(t)$ funksiyası kəsilməyən olduğundan $[t_{i-1}, t_i]$ parçası nöqtələrindəki $v(t)$ sürəti onun τ_i nöqtəsindəki qiymətindən az fərqlənir. Odur ki, cismin zamanın $[t_{i-1}, t_i]$ aralığında getdiyi yol təqribən cismin

həmin müddətdə sabit $v(\tau_i)$ sürəti ilə getdiyi yola bərabərdir. Beləliklə cismin $t = T_1$ -dən $t = T_2$ -yə qədər olan vaxtda getdiyi yol təqribən (*)

$$\text{cəmi ilə ifadə edilir: } S \approx \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t$$

Çünki həmin yol cismin zamanın $[T_1, T_2]$ parçasının bölündüyü hər bir $[t_{i-1}, t_i]$ aralığında getdiyi yolların cəmindən alınır.

Asanlıqla görmək olar ki, bölmə parçaları $[t_{i-1}, t_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) nə qədər kiçik olarsa təqribilik o qədər yaxşı olacaqdır. Odur ki, cismin zamanın $[T_1, T_2]$ parçasında getdiyi yol aşağıdakı şəkildə limit kimi

$$\text{təyin edilir: } S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t$$

İnteqral anlayışı şagirdlərə məlumdursa, onda cismin getdiyi yolu

$$S = \int_{T_1}^{T_2} v(t) dt \text{ düsturu ilə hesablamaq olar.}$$

Mayenin təzyiq qüvvəsi haqqında məsələ

Fərz edək ki, trapesiya şəklində lövhə şaquli olaraq xüsusi çəkisi γ olan mayeyə, oturmaqları mayenin sərbəst səthinə paralel və onun səviyyəsindən uyğun olaraq a və b məsafədə aşağıda yerləşməklə, salınmışdır. (Şəkil 20).

Mayenin lövhəyə təzyiq qüvvəsini təyin etmək tələb olunur.

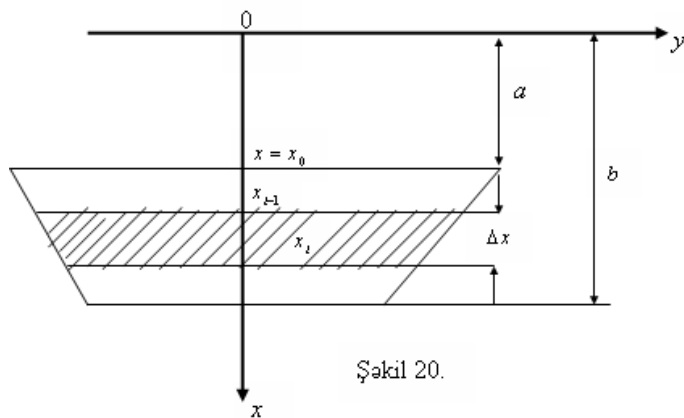
Təbəqə üfiqi vəziyyətdə mayenin sərbəst səthindən (səviyyəsindən) h dərinlikdə olarsa, onda mayenin lövhəyə F təzyiq qüvvəsi, oturacağı verilmiş lövhə, hündürlüyü isə h dərinliyi olan maye sütununun çəkisinə bərabər olardı, başqa sözlə $F = \gamma \cdot h \cdot S$. Burada S lövhənin sahəsidir.

Lövhə mayeyə şaquli salınsa, onda (*) düsturu ilə mayenin lövhəyə təzyiqi hesablanı bilməz, çünki bu halda mayenin vahid səthə təzyiqi batmanın dərinliyi ilə ölçülür.

Məsələni həll edərkən, Paskal qanununu, yəni maye təzyiqinin hər tərəfə eyni verildiyini nəzərə alacağıq.

Məsələni həll etmək üçün təbəqəni mayenin sərbəst səthinə paralel (yəni Oy oxuna paralel) və $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$

$(x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n)$ $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$, $i = 0, 1, \dots, n$ nöqtələrin-
dən keçən düz xətlərlə n hissəyə (kiçik üfqi zolaqlara) ayıraq. x_i dərin-
liyində yerləşən təbəqələrdən birini i - cini- (Şəkilə o ştrixlənmişdir)
ayıraq.



Kifayət qədər ensiz zolaqda onun bütün hissələrində təzyiqi təq-
ribən eyni, hesab etmək zolağın özünü isə hündürlüyü Δx oturacağı isə
zolağın aşağı oturacağına bərabər düzbucaqlı qəbul etmək olar. Asan-
lıqla görmək olar ki, düzbucaqlının oturacağı zolağın batma dərin-
liyindən asılıdır, başqa sözlə x absisinin funksiyasıdır. Bu funksiyanı
 $f(x)$, $x \in [a, b]$ ilə işarə edək. Beləliklə təbəqəyə düşən təzyiq qüv-
vəsini (*) düsturu ilə hesablamaq olar, başqa sözlə alırıq:
 $\gamma \cdot f(x_i) \Delta x \cdot x_i$

Mayenin bütün zolaqlara təzyiq qüvvəsini cəmləyib bütün lövhəyə olan
təzyiq qüvvəsini hər-hansı təqribiliklə tapırıq: $F \approx \sum_{i=1}^n \gamma f(x_i) \Delta x \cdot x_i$

Mayenin lövhəyə təzyiq qüvvəsinin daha dəqiq qiyməti
 $F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \gamma f(x_i) \Delta x \cdot x_i$ düsturu ilə hesablanır.

Beləliklə, şagirdlər integral anlayışı ilə tanışdırlarsa, mayenin löv-həyə təzyiq qüvvəsi $F = \gamma \int_a^b x f(x) dx$ düsturu ilə hesablanır.

Sonra, hələ integral (müəyyən) anlayışı daxil edilməyibdirsə, onda bu anlayışı aşağıdakı kimi nəzərdən keçirmək lazımdır.

Beləliklə biz həlləri eyni bir əməllər ardıcılığı (eyni bir metod) ilə yerinə yetirilən, hər hansı cəmin qurulmasına və bu cəmin limitinin tapılmasına gətirilən məsələlərə (həndəsi və fiziki) baxdıq.

Göstərilən metod çoxlu sayda riyazi və praktik məsələlərin həllində tətbiq olunduğundan, onda onu məsələnin konkret məzmunundan mücərrədləşdirərək öyrənmək təbiidir. Bu metodun mahiyyəti aşağıdakından ibarətdir.

1) Fərz edək ki, $[a, b]$ parçasında ixtiyari birqiymətli məhdud $f(x)$ funksiyası verilir. $[a, b]$ parçası $a = a_0, a_1, a_2, a_i, \dots, a_{n-1}, a_n = b$ ($a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$) nöqtələri ilə eyni $\Delta x = \frac{b-a}{n} = a_i - a_{i-1}$ uzunluğunda n $[a_{i-1}, a_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) hissələrə bölünür.

2) Hər bir $[a_{i-1}, a_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ayrılma parçalarında ixtiyari x_i nöqtəsi seçilir və hər bir ayrılma parçası üçün seçilmiş x_i nöqtəsində $f(x)$ funksiyası qiymətinin uyğun $[a_{i-1}, a_i]$ parçasının uzunluğuna hasilli tərtib edilir, başqa sözlə $f(x_i)(a_i - a_{i-1}) = f(x_i)\Delta x$ şəkildə hasillər düzəldilir.

3) Bütün belə hasillərin cəmi götürülür: $S_n(a, b) = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$. Bu $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında integral cəmi adlanır.

4) $S_n(a; b)$ integral cəminin limiti tapılır: yəni $J = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(a; b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$

Baxılan limit, əgər o varsa; müəyyən integral adlanır və $J = \int_a^b f(x) dx$ ilə işarə edilir.

Bütün deyilənlərdən sonra integralin tərifini integral cəminin hərsansı limiti kimi ifadə etmək olar.

1.19. Məktəb riyaziyyat kursunda ən sadə diferensial tənliklər

1. Bu mövzunun məktəb riyaziyyat kursunda yeri
2. Diferensial tənlik anlayışı haqqında
3. Məktəbdə üstboylu (eksponensial)¹ diferensial tənliklərin öyrənilməsi

4. Orta məktəbin riyaziyyat kursunda harmonik rəqsin diferensial tənliyinə baxmaq haqqında.

1. XI sinfin “Cəbr və analizin başlanğıcı” kursunda ən sadə diferensial tənliklərə baxmaq nəzərdə tutulur.

“Üstlü və loqarifmik funksiyalar” mövzusunda şagirdləri üstlü qanun üzrə artmanın və azalmanın $y' = ky$ diferensial tənliyi ilə tanış etmək, həlləri bu tənliyə gətirilən müxtəlif elm sahələrindən (fizika, kimya, biologiya, iqtisadiyyat, ictimaiyyət və s.) olan məsələlərə baxmaq nəzərdə tutulur. Harmonik rəqsin $y'' = -k^2 y$ diferensial tənliyinə “Trigonometrik funksiyalar” mövzusunda baxılır. Burada da həlləri bu tənliyə gətirilən mexanika, fizika, elektrotexnika və başqa mühəndis elmlərindən götürülmüş məsələlərə baxmaq nəzərdə tutulmuşdur.

2. Diferensial tənlik anlayışını daxil edənə qədər şagirdlərə bildirilir ki, elm və texnikanın, habelə iqtisadiyyatın müxtəlif sahələrində çox vaxt həlləri, dəyişəndən, axtarılan funksiya ilə əlavə həmin axtarılan funksiyanın törəməsi daxil olan, bir və ya bir neçə tənliyə gətirilən məsələlərə baxılır. Sonra bildirilir ki, belə tənliklərə diferensial tənliklər deyilir. Qeyd edilir ki, riyazi analiz kursunun “Diferensial tənliklər” bölməsi diferensial və integral hesabı metodlarının daha da dərinləşdirilməsidir. Diferensial hesabında funksiya verildikdə onun törəməsi tapılırsa, integral hesabında törəməyə əsasən bu törəmə üçün ibtidai olan funksiya tapılır, lakin diferensial tənliklərin nəzəriyyəsinin öyrənilməsi və praktik məsələlərinin həlli zamanı funksiya və onun törəməsi deyil onları əlaqələndirən tənlik (və ya bir neçə tənlik) verilir. Cəbri tənliyin həll edilməsinin nə demək olduğu şagirdlərə xatırladılır. Sonra analogiya üzrə diferensial tənliyin həlli, bu tənliyi doğru bərabər-

¹Eksponensial funksiya - e^x və ya a^x funksiyalara ($a > 0$), yəni üstlü funksiya, e.f habelə $\exp x$ ilə işarə edilir.

Məsələnin yeganə həlli olması üçün onun şərtində axtarılan əyrinin keçdiyi nöqtə də verilməlidir. Doğrudan da fərz edək ki, (x_0, y_0) (və ya $(x_0, f(x_0))$) nöqtəsindən keçən əyri axtarılır, onda bu nöqtənin koordinatlarını (2) həllində yerinə yazıb alırıq: $y_0 = x_0^2 + C$, yəni $C = y_0 - x_0^2$

Beləliklə, verilmiş məsələnin həlli, başqa sözlə (x_0, y_0) nöqtəsindən keçən əyri tənliyi $y = x^2 + y_0 - x_0^2$ şəklində olan əyridir.

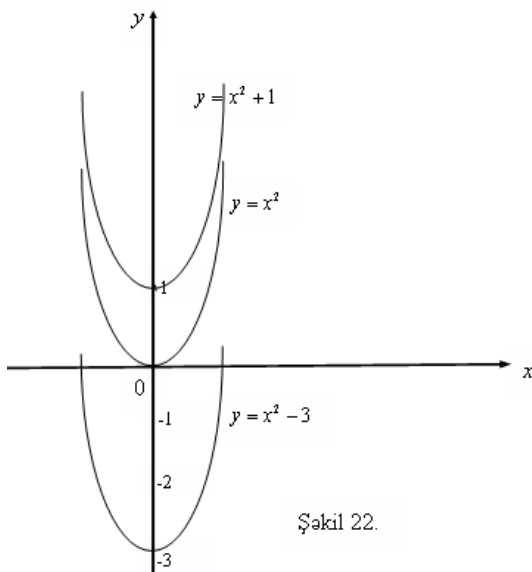
Xüsusi halda, əyri koordinatları

$x_0 = y_0 = 0$ olan nöqtədən keçirsə onda məsələnin həlli $y = x^2$ parabolası, $x_0 = 1$ və $y_0 = 2$ olduqda həll $y = x^2 + 1$ parabolası və ya $x_0 = 2$ və

$y_0 = 1$ olduqda məsələnin həlli $y = x^2 - 3$ parabolasıdır (Şəkil 22).

Məsələ 2. Cisim v_0 başlanğıc sürəti ilə yuxarı atılmışdır. $t = 0$ başlanğıc momentində onun S_0 vəziyyətində olduğunu cismin yalnız ağırlıq qüvvəsinin təsiri ilə hərəkət etdiyini bilərək cismin hərəkət qanununu təyin edin.

Həlli: Fizika kursundan məlumdur ki, cisim ağırlıq qüvvəsinin təsiri altında g -yə bərabər sabit təcillə hərəkət edir. Biz bilirik ki, hərəkət edən maddi nöqtənin təcili S yolunun t zamana nəzərən ikinci törəməsi ilə ifadə edilir, odur ki, bu halda diferensial tənlik



Şəkil 22.

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = gm \text{ və ya } m\text{-ə ixtisar etdikdən sonra } \frac{d^2 S}{dt^2} = -g \quad (3) \text{ şəkildə}$$

olur.

İkinci törəmənin tərifinə əsasən $S'' = (S')' = v' = -g$, odur ki, birinci məsələdə olduğu kimi mühakimə edərək alırıq ki, $v = S'$ funksiyası $(-g)$ funksiyasına nəzərən ibtidai funksiyadır, başqa sözlə $v = S' = \int (-g) dt = -gt + C_1$ və ya $v = S' = -gt + C_1$ (4). Sonuncu bərabərlikdən alınır ki, $S(-gt + C_1)$ -in ibtidai funksiyasıdır, odur ki, $S = \int (-gt + C_1) dt = -g \int t dt + C_1 \int dt = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$, burada C_1 və C_2 - ixtiyari sabitlərdir.

$$\text{Beləliklə diferensial tənliyin həlli } S = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 \quad (5)$$

funksiyasıdır. Beləliklə həllə iki ixtiyari C_1 və C_2 sabitləri daxildir.

Məsələnin şərtinə görə zamanın $t = 0$ başlanğıc anında cisim S_0 hündürlükdə olmuşdur, odur ki, (5) düsturundan alırıq:

$$S(0) = S_0 = -\frac{g \cdot 0}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2, \text{ yəni } C_2 = S_0 \quad (6)$$

Digər tərəfdən zamanın $t = 0$ başlanğıc anında cismin başlanğıc sürəti v_0 olmuşdur, odur ki, (4) düsturundan alınır: $v_0 = -g \cdot 0 + C_1$ və ya $C_1 = v_0$ (7)

Beləliklə C_1 və C_2 -in (6), (7) bərabərliyindəki qiymətlərini (5) düsturunda yerinə yazıb, qoyulan məsələnin həllini alırıq:

$$S = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + S_0$$

Baxılan misallardan diferensial tənliyin həlli xüsusiyyəti görünür. Onun həlli sonsuz funksiyalar çoxluğundan ibarətdir, verilmiş başlanğıc şərtə əsasən isə bir həll alınır.

Bundan sonra diferensial tənliyin tərtibi, ümumi və xüsusi həll anlayışları daxil edilir. Göstərilir ki, tənliyə daxil olan törəmələrdən ən yüksəyinə diferensial tənliyin tərtibi deyilir. Məsələn yuxarıda baxdı-

ğımız (1) tənliyi bir tərtibli (3) isə iki tərtibli tənlikdir. Qeyd edilir ki, bir tərtibli diferensial tənliyin ixtiyari C sabiti daxil olan həlli elədir ki, C-in müxtəlif qiymətlərində ondan bu diferensial tənliyin bütün həllərini almaq olar, belə həll diferensial tənliyin ümumi həlli adlanır. Biz gördük ki, (1) tənliyinin (2) həllinə bir ixtiyari sabit daxildir, odur ki, o bu tənliyin ümumi həllidir. İki tərtibli diferensial tənlik halında ümumi həllə iki ixtiyari sabit daxil olmalıdır. Məsələn, yuxarıda baxılan (3) tənliyinin həlli iki ixtiyari sabit daxil olan (5) tənliyidir. Odur ki, o (3) tənliyin ümumi həllidir. Nəhayət diferensial tənliyin xüsusi həll anlayışı üzərində dayanmaq lazımdır. Göstərilir ki, bir tərtibli diferensial tənliyin ümumi həllindən ixtiyari C sabitinə müəyyən qiymət verməklə alınan həllə tənliyin xüsusi həlli deyilir. Şagirdlərə aydınlaşdırılır ki, bir tərtibli diferensial tənliyin ümumi həllindən xüsusi həlli almaq üçün başlanğıc şərt verilməlidir, yəni arqumentin hər hansı $x = x_0$ qiymətində axtarılan $y(x)$ funksiyası verilmiş $y(x_0) = y_0$ qiymətini almasını tələb etmək lazımdır. Bu sonuncunu 1 məsələsinin həlli üzərində nümayiş etdirmək olar. Məsələn, $y = x^2 + C$ ümumi həllindən $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 3$ xüsusi həllərini almaq üçün uyğun olaraq $x_0 = y_0 = 0$; $x_0 = 1$ və $y_0 = 2$; $x_0 = 2$ və $y_0 = 1$ başlanğıc şərtləri verildi. Beləliklə $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 3$ xüsusi həlləri C sabitinə verilmiş müəyyən qiymətlərinə uyğundur, məhz ixtiyari C sabiti uyğun olaraq 0, 1 və -3 qiymətlərini aldı.

Bundan sonra qeyd edilir ki, iki tərtibli tənliyə baxılırsa, onda ümumi həldən xüsusi həlləri almaq üçün ona daxil olan iki ixtiyari sabitə müəyyən qiymət vermək lazımdır ki, buna da başlanğıc şərtlərin verilməsi ilə nail olunur. İki tərtibli tənlik üçün başlanğıc şərtin verilməsi ondan ibarətdir ki, arqumentin hər hansı $x = x_0$ qiymətində axtarılan $y(x)$ funksiyasının bu nöqtədə qiyməti, yəni $y(x_0) = y_0$ habelə onun törəməsinin, yəni $y'(x_0) = y_1$ qiyməti verilir. Məsələn, 2 məsələsində aşağıdakı başlanğıc şərtlər verilmişdir: zamanın $t = 0$ anı üçün $S(0) = S_0$ başlanğıc vəziyyət (başqa sözlə zamanın başlanğıc anında cismin hündürlüyü) və başlanğıc $v(0) = S'(0) = v_0$ sürəti verilmişdir.

Bunlar $S = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2$ ümumi həllindən bizi maraqlandıran

$S = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + S_0$ xüsusi həlli və baxılan məsələnin həllini almağı imkan verdi.

3. Məktəbdə üstboylu diferensial tənliyin $(0, y' = -ky$ şəkindədir) öyrənilməsinə fizika, texnika, biologiya və s. götürülmüş həlləri bu tənliyə gətirilən müxtəlif məsələlərə baxmaqla başlamaq olar. Artıq sonra isbat etmək lazımdır ki, bu tənliyin bütün həlləri $y(x) = ce^{-kx}$ şəkində funksiyadır, burada C - ixtiyari sabitdir. Bu məsələnin həllinin öyrənilməsini qurtararaq yenidən üstboylu diferensial tənliyin qurulması və həllinə gətirilən praktik və texniki məsələlər həllinə baxmaq lazımdır. Məsələn bir sıra tədris vəsaitində belə edilmişdir. Burada əvvəlcə radiumun parçalanma qanununu müəyyən etmək haqqındakı məsələyə baxılır və göstərilir ki, onun həlli $m'(t) = -km(t)$, $k > 0$ şəkində hər hansı diferensial tənliyin həllinə gətirilir. Sonra bu tənliyin $m(t) = c \cdot e^{-kt}$ şəkində həlli müəyyən edilir (verilmiş funksiyanın həll olması bilavasitə yoxlama ilə müəyyən edilir), diferensial tənliyin başlanğıc şərtləri haqqında anlayış verilir, müəyyən edilir ki, baxılan tənliyin başqa həlləri yoxdur. Sonra göstəriş verilir ki, bir çox fiziki, iqtisadi və bioloji hadisələri araşdırarkən $u'(t) = -ku(t)$ şəkində diferensial tənliyə gətirilən məsələlər həll etmək lazım gəlir. Daha sonra ətraf mühitdə olan cismin soyudulması, barmetr vasitəsilə hündürlüyün ölçülməsi, əhalinin artımı haqqında məsələlərə baxılır. Nəticədə qeyd edək ki, əlbətdə, məktəbdə $y'(x) + f(x) \cdot y(x) = g(x)$ şəkində $y'(x) = -ky(x)$ üstboylu tənlik, burada K – sabitdir, bu tənliyin xüsusi halıdır, belə ki, sabit əmsallı bir tərtibli xətti bircins tənlikdir) bir tərtibli xətti diferensial tənliklərin ümumi nəzəriyyəsinə baxmaq lazım deyil. Lakin ibtidai funksiya anlayışından istifadə edərək bu $y'(x) = -ky(x)$ tənliyinin $y(x) = ce^{-kx}$ şəkində ümumi həllini almaq lazımdır, burada C ixtiyari sabitdir.

4. Məktəbdə baxılan digər diferensial tənlik, harmonik rəqsin $y'' = -k^2y$ tənliyidir. Bu tənlik iki tərtibli.

Bəzi tədris vəsaitində bu məsələ aşağıdakı kimi izah edilmişdir: əvvəlcə həlli bu tənliyə gətirilən məsələlərə baxılır, sonra göstəris verilir ki, bu tənliyin bütün həlləri $y(x) = A \sin(kx + \theta)$ şəklində funksiyadır, burada A və θ ixtiyari sabitlərdir.

Şagirdlərin diqqətini o cəhətə yönəltmək lazımdır ki, baxılan halda ümumi həllə iki ixtiyari sabit daxildir, odur ki, xüsusi həlli (başqa sözlə məsələnin həllini) almaq üçün başlanğıc şərt verilməlidir, məhz başlanğıc anda tək cə funksiyanın qiymətini deyil habelə onun törəməsinin də qiyməti verilməlidir. Məsələn, yaylı rəqqas haqqındakı məsələyə baxarkən zamanın $t = 0$ başlanğıc anında yekun tarazlıq halından $y(0) = y_0$ başlanğıc meili habelə $t = 0$ başlanğıc momentində bu yükün hərəkət sürəti, yəni $y'(0) = v_0$ başlanğıc sürəti verilir.

Bir sıra vəsaitlərdə həlləri harmonik rəqqasın baxılan tənliyinə gətirilən yaylı və riyazi rəqqas, çevrə üzrə bərabərsürətli hərəkət haqqında məsələyə baxılır.

Bu məsələlərin şərhini mühazirə şəklində aparmaq faydalıdır və bu zaman şagirdlərə diferensial və integral tənliklərin müasir fizika və texnikadakı böyük rolundan danışmaq lazımdır.

Əlavələr

1. Bir tərtibli bircinsli diferensial tənliklər. Hər şeydən əvvəl dəyişənlərinə ayrılan bircinsli tənliklərə baxaq.

Tərif. $f(x, y)$ funksiyasını öz arqumentlərinin nisbətlərinin funksiyası şəklində göstərmək mümkün olarsa $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ tənliyinə bircinsli tənlik deyilir. Yəni $f\left(\frac{y}{x}\right) = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ şəklində göstərmək

mümkün olarsa (1) bircinsli tənlik adlanır. Məsələn, $y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$

belə tənlikdir, çünki onu $y' = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\frac{y}{x}}$ şəklində göstərmək

olar. $y = xu$ əvəzləməsi ilə bu tənliyi həll edirik.

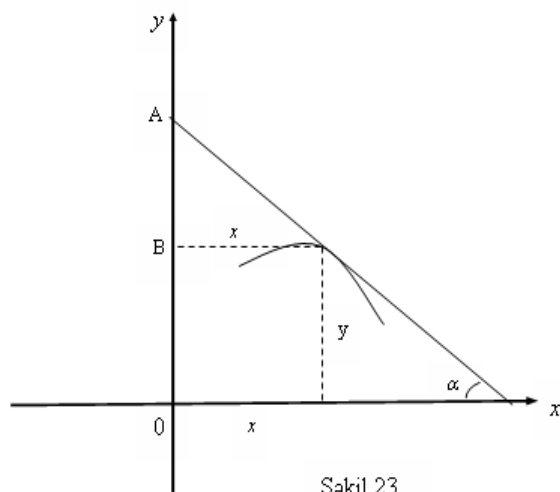
2. Məktəbdə $y' + p(x)y = g(x)$ xətti tənliyin həllini də vermək olar. Bu tənlik $y = u^2$ əvəzləməsi ilə dəyişmələrinə ayrılan diferensial tənliyə gətirilir.

3. $y' + p(x)y = g(x)y^n$. Bernulli tənliyi asanlıqla xətti tənliyə gətirilir. Belə ki, $y'y^{-n} + p(x)y^{-n+1} = g(x)$ yazıb $y^{-n+1} = z$ əvəzləməsi ilə bu tənlik xətti tənliyə gəlir.

Bu göstərilənləri məktəbdə vermək $y'' = -k^2 y$ tənliyinin həllindən daha münasibdir.

Bircinsli tənliyi hər hansı məsələdən almaq olar:

Hər bir nöqtəsində toxunanın ordinat oxu ilə kəsişmə nöqtəsi koordinat başlanğıcından və toxunma nöqtəsindən eyni məsafədə yerləşən əyrini tapın.



Şəkil 23.

Həlli. Axtarılanı

$y = y(x)$ -lə işarə edək. Bu əyri üzərində $M(x, y)$ nöqtəsi götürək və fərz edək ki, AM həmin nöqtədə əyriyə çəkilmiş toxunandır (Şəkil 23). Şərtə görə $AM=OA$. Toxunanın həndəsi mənasına görə $\operatorname{tg} \alpha = y'$ olduğundan $AB = -xy'$ (çünki $\triangle ABM$ -dən $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{AB}{x}$) və Pifa-

qor teoreminə görə həmin üçbucaqdan

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{x^2 y'^2 + x^2} \quad \text{olar.} \quad AM=OA \quad \text{olduğundan}$$

$$OA = \sqrt{x^2 y'^2 + x^2}, \quad OA = OB + AB = y - xy' \quad \text{-dir. Onda } y - xy' = \sqrt{x^2 y'^2 + x^2}$$

$$\text{və ya } y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \quad \text{alarıq. Bu tənlik bircins tənlikdir və } y = xz$$

əvəzləməsi ilə dəyişənlərinə ayrılmış $\frac{2zdz}{1+z^2} = -\frac{dx}{x}$ tənliyinə gətirilir.

Onun ümumi həlli $x(1+z^2) - C = 0$ şəklindədir və $z = \frac{y}{x}$ olduğun-

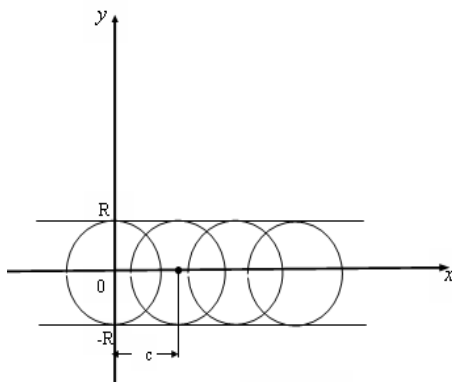
dan, alırıq ki, axtarılan əyrilər $x^2 + y^2 - Cx = 0$ olur. $y^2(1+y^2) = R^2$ tənliyinin əlahiddə həllini tapaq (И.С.Писгунов, II hissə, səh503). Əvvəl ümumi həlli (inteqralı) tapaq. Tənliyi y' -ə nəzərən həll edək:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y} ; \text{ Dəyişənlərinə ayıraq } \frac{ydy}{\pm \sqrt{R^2 - y^2}} = dx .$$

Bunu inteqrallayaq $(x-C)^2 + y^2 = R^2$ ümumi həlli (inteqralı) tapırıq. Göründüyü kimi, tapdığımız inteqral xətləri ailəsi, mərkəzi absis oxu üzərində yerləşən R radiuslu çevrələr ailəsidir. (Şəkil 24). Alınmış tənliyi c parametrinə nəzərən diferensiallayaq. $2(x-C) = 0$.

İndi $\begin{cases} (x-C)^2 + y^2 = R^2 \\ x-C = 0 \end{cases}$ tənliklər

sistemindən c parametrini yox edərək $y^2 - R^2 = 0$ və ya $y = \pm R$ tənliyini alırıq. Deməli alınmış çevrələr ailəsinin bu tənlikləri $y = R, y = -R$ dən ibarət iki düz xətdir (Əlahiddə nöqtələrin həndəsi yeri deyildir, çünki ailəni əmələ



Şəkil 24.

gətirən nöqtələrin əlahiddə nöqtələri yoxdur). $y = \pm R$ funksiyaları baxılan diferensial tənliyi ödəyir. Deməli $y = \pm R$ əlahiddə inteqraldır.

Əyrilər ailəsinin bürüyəni

Tutaq ki, $\phi(x, y, c) = 0$ (1) şəklində tənlik verilmişdir (Dekart sistemində), C isə müxtəlif qeyd olunmuş qiymətlər ala bilən parametrdir.

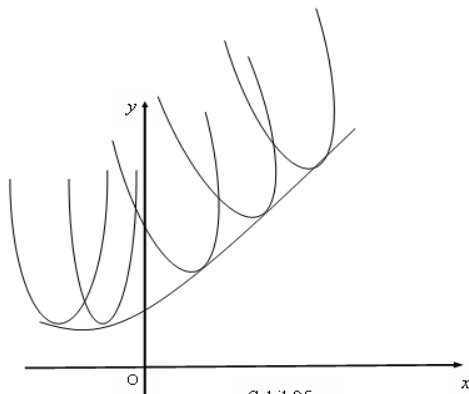
C parametrinin hər bir müəyyən qiymətində (1) tənliyi Oxy müstəvisində bir əyrini təyin edir. C parametrinə mümkün olan qiymətlər verərək, biz bir parametrdən asılı olan, **əyrilər ailəsi** yaxud çox zaman deyildiyi kimi – bir parametrlı əyrilər ailəsi alırıq. Beləliklə (1) tənliyi bir parametrlı əyrilər ailəsi tənliyidir (çünki tənlikdə yalnız bir ixtiyari sabit vardır).

Tərif. L xətti özünün hər bir nöqtəsində bir parametrlı əyrilər ailəsi xətlərindən bu və ya digərinə toxunarsa və L xəttinin müxtəlif nöqtələrində ona ailənin müxtəlif xətləri toxunarsa, onda L xəttinə həmin birparametrlı əyrilər ailəsinin bürüyəni (qurşayanı) deyilir (şəkil 25).

Məsələn, $(x - c)^2 + y^2 = R^2$ əyriləri ailəsinə baxaq; burada R – sabit, C isə parametrdir. Bu radiusu R , mərkəzi Ox Oxu üzərində olan çevrələr ailəsidir. Aşkardır ki, bu ailənin bürüyənləri $y = R$, $y = -R$ düz xətlərindən ibarətdir.

Əyrilər ailəsinin bürüyənini
$$\begin{cases} \phi(x, y, c) = 0 & (*) \\ \phi'_c(x, y, c) = 0 \end{cases}$$
 tənliklər sistemindən tapılır.

Əksinə, $(*)$ tənliklər sistemindən C –ni yox etdikdən sonra alınan $y = \phi(x)$ funksiyası diferensiallana bilən olarsa, bundan əlavə, bu əyri üzərində $\frac{dc}{dx} \neq 0$ olarsa, onda $y = \phi(x)$ bürüyənin tənliyidir.



Şəkil 25.

1.20. Fərqlər tənliyi.

X-XI siniflərdə hesablama riyaziyyatı ilə əlaqədar olan aşağıdakı anlayışlar haqqında “yüksək dərəcəli tənliklər” mövzusu daxilində şagirdlərə məlumat vermək olar.

1.20.1. Sonlu fərqlər və onların xassələri: $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_n = x_0 + nh, x_{n+1} = x_0 + (n+1)h$ nöqtələrində uyğun olaraq $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$ qiymətlərini alan $y = f(x)$

funksiyasına baxaq. Funksiyanın hər bir iki ardıcıl qiymətləri fərqlini tapaq: $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, ..., $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$.

$\Delta y_0, \Delta y_1, \dots, \Delta y_n$ fərqlərinə bir tərtibli sonlu fərqlər və ya sadəcə $f(x)$ funksiyanının birinci fərqləri deyilir.

Bir tərtibli fərqlərin iki ardıcıl fərqləri arasındakı fərqə ikitərtibli fərqlər və ya ikinci fərqlər deyilir.

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \dots, \Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

Ümumiyyətlə k -tərtibli sonlu fərqlər dedikdə $\Delta^k y_n = \Delta^{k-1} y_{n+1} - \Delta^{k-1} y_n$ fərqi başa düşülür.

İxtiyari tərtibdən sonlu fərqi funksiyanın qiymətləri ilə ifadə düsturlarını çıxarmaq olar. Doğrudan da $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ və $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$ olduğundan $\Delta^2 y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)$. Beləliklə, $\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$.

Üç tərtibli fərq üçün analogi olaraq belə münasibət alırıq: $\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$.

Riyazi induksiya metodundan istifadə edərək x_0 nöqtəsində k tərtibli fərqlin verilmiş funksiyanın $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ ardıcıl nöqtələrində funksiyanın qiymətləri və

$$\Delta^k y_0 = y_k - ky_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k-2} - \dots + (-1)^{k-1} ky_1 + (-1)^k y_0 \quad (1)$$

ifadəsi düsturunun doğruluğunu göstərmək olar.

(1) düsturunda funksiyanın bütün qiymətləri nömrələrinə n -i əlavə etsək, onda x_n nöqtəsində k -ci fərqlər düsturunu alırıq:

$$\Delta^k y_n = y_{k+n} - ky_{k+n-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k+n-2} - \dots + (-1)^{k-1} ky_{n+1} + (-1)^k y_n \quad (2)$$

Arqumentin addımını $h=1$ götürüb və $y_x = f(x)$ əvəzləməsini daxil etsək, onda (2) düsturuna əsasən bir sıra bərabərlikləri yazmaq olar:

$$\begin{aligned}
\Delta y_x &= y_{x+1} - y_x \\
\Delta^2 y_x &= y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x, \\
\Delta^3 y_x &= y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x, \\
\Delta^4 y_x &= y_{x+4} - 4y_{x+3} + 6y_{x+2} - 4y_{x+1} + y_x
\end{aligned}
\tag{3}$$

və s.

(3) düsturu funksiyanın sonlu fərqləri daxil olan ifadələrdən funksiyanın ardıcıl qiymətləri daxil olan ifadələrə keçməyə imkan verir.

$h=1$ hesab etməklə bəzi funksiyaların fərqlərini hesablayaq:

1. Fərz edək ki, $f(x) = C$, burada C =sabit. Onda $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = C - C = 0$. Deməli, sabitin birinci və sonrakı fərqləri sıfıra bərabərdir.

2. Fərz edək ki, $f(x) = kx + b$, burada $k \neq 0$. Onda $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = k(x+1) + b - kx - b = k$. Beləliklə, xətti funksiyaların birinci fərqi sabitdir, sonrakı $\Delta^2 f(x), \Delta^3 f(x), \dots$ fərqləri sıfıra bərabərdir (1 misalına baxmalı).

3. Fərz edək ki, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Burada

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = [a(x+1)^2 + b(x+1) + c] - (ax^2 + bx + c) = 2ax + a + b.$$

Deməli, kvadrat funksiyaların birinci fərqi xətti funksiya, ikinci fərq sabit olacaq (2 misalına baxmalı), bütün sonrakı $\Delta^3 f(x), \Delta^4 f(x), \dots$ fərqlər isə sıfıra bərabərdir.

4. Çox vaxt fərqlərin hesablanması əsas teoremi adlanan ümumi teoremi isbat etmək olar:

Teorem. n dərəcəli $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ ($a_0 \neq 0$) çoxhədli üçün n -ci fərq sabitdir və $a_0 n!$ h^n -ə bərabərdir, $(n+1)$ -ci fərq isə sıfıra bərabərdir (isbat üçün [21]-ə baxmalı).

Məsələn, $f(x) = 3x^5 + 4x^4 - 7x - 13$ isə, onda $h=1$ olduqda $\Delta^5 f(x) = 3 \cdot 5! = 360$. Tərs teorem də doğrudur: ixtiyari h addımında argumentin bərabər nisbətdə qiymətlərindən düzəlmiş funksiyanın n -ci fərqi sabitdirsə, onda funksiya n dərəcəli çoxhəddidir.

5. Fərz edək ki, $f(x) = a^x$. Bu funksiya üçün $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = a^{x+1} - a^x = a^x(a-1)$.

1.20.2. Fərqlər tənliyi anlayışı və onun həlli. Təcrübədə çox vaxt $f(x)$ funksiyanın qiymətini və həmin funksiyanın $\Delta f(x), \Delta^2 f(x), \dots, \Delta^k f(x)$ sonlu fərqlərini əlaqələndirən tənliyə təsadüf olunur.

Məsələn, $2f(x) + 3\Delta f(x) - \Delta^3 f(x) = x$ (4) tənliyi $f(x)$ funksiyanın qiymətini və onun $\Delta f(x), \Delta^3 f(x)$ sonlu fərqlərini əlaqələndirir.

$$F[x, f(x), \Delta f(x), \dots, \Delta^k f(x)] = 0 \quad (5)$$

şəklində tənliyə, burada $f(x)$ axtarılan funksiya, ($x=0,1,2,\dots$) k -tərtibli fərqlər tənliyi deyilir. (5) tənliyində sonlu fərqləri (3) düsturu üzrə dəyişsək, onda $f(x)$ və bu funksiyanın ardıcıl qiymətləri daxil olan tənlik alınır. Məsələn, (4) tənliyini belə yazmaq olar: $2f(x) + 3[f(x+1) - f(x)] - [f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x)] = x$, buradan isə sadələşdirdikdən sonra $2f(x+2) - f(x+3) = x$ alırıq. Sonuncu tənlikdə $x+2$ yerində x yazsaq $f(x)$ və $f(x+1)$ qiymətlərini əlaqələndirən $3f(x) - f(x+1) = x - 2$ (6) tənliyini alırıq. Beləliklə, (5) tənliyində sonlu fərqləri (3) düsturu üzrə dəyişməklə fərqlər tənliyinin başqa formasını müəyyən edirik:

$$F[x, f(x), f(x+1), \dots, f(x+k)] = 0 \quad (7).$$

$f(x)$ və $f(x+k)$ daxil olan (7) fərqlər tənliyinə k -tərtibli fərqlər tənliyi deyilir.

(6) tənliyi bir tərtibli fərqlər tənliyidir. Göründüyü kimi bu tənliyin tərtibi ona uyğun olan (4) tənliyinin ən böyük fərqlərinin tərtibi ilə eyni deyildir.

(7) tənliyi $f(x), f(x+1), \dots, f(x+k)$ -ya nəzərən xəttidirsə, onda ona xətti fərqlər tənliyi deyilir. $f(x+k) + a_1 f(x+k-1) + \dots + a_k f(x) = Q(x)$ (8) şəklində tənliyə sabit əmsallı, k tərtibli xətti fərqlər tənliyi deyilir, burada $a_1, a_2, \dots, a_k$ həqiqi ədədlər, ($a_k \neq 0$), $Q(x)$ - verilmiş funksiya, $f(x)$ -axtarılan funksiya. Bununla əlaqədar $Q(x)$ və $f(x)$ -in mənfə olmayan tam ədədlər çoxluğunda təyin olunduğu nəzərdə tutulur.

$Q(x)=0$ isə (8) tənliyinə bircinsli, $Q(x) \neq 0$ olduqda isə qeyri-bircinsli tənlik deyilir.

(6) tənliyi $f(x)$ və $f(x+1)$ -ə nəzərən xəttidir, həm də $Q(x) = x - 2$, odur ki, o birtərtibli bircinsli olmayan xətti tənlikdir.

(7) tənliyinin həlli onun sol tərəfini eyniliklə sıfıra çevirən $f(x)$ funksiyasıdır.

Məktəb riyaziyyat kursunda fərqlər tənliyinə gətirilən məsələlərlə qarşılaşmalı oluruq. Buna nümunə olaraq aşağıdakıları göstərmək olar.

1. $y_1 = a$, $y_2 = aq$, $y_3 = aq^2$, $y_4 = aq^3$, ..., həndəsə silsiləsinə baxaq.

Bu ardıcılıqda ikincidən başlayaraq hər bir hədd ortaq vuruğun əvvəlki həddə hasilinə bərabərdir. Beləliklə, həndəsi silsilənin hədləri bir tərtibli

$y_{n+1} = qy_n$ və ya $y_{n+1} - qy_n = 0$ (9) fərqlər tənliyini ödəyir, burada y_n ardıcılığın n -ci həddidir.

2. Fibonaçi ədədləri ardıcılığı verilir:

$y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 1, y_3 = 2, y_4 = 3, y_5 = 5, \dots$ Bu ardıcılıqda üçüncüdən başlayaraq hər bir hədd əvvəlki iki həddin cəminə bərabərdir. Deməli bu ardıcılığın hədləri iki tərtibli $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$ və ya $y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (10) fərqlər tənliyini ödəyir.

3. $\frac{3568}{4995} = 0,7143143143, \dots$ ədədinin onluq rəqəmləri ardıcılığına baxaq. Aşkardır ki, $y_0 = 7, y_1 = 1, y_2 = 4, y_3 = 3, y_4 = 1, y_5 = 4, \dots$ ardıcılığının hədləri üç tərtibli $y_{n+3} = y_n$ və ya $y_{n+3} - y_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) (11) fərqlər tənliyini ödəyir.

4. $y_1 = a$, $y_2 = a + d$, $y_3 = a + 2d$, $y_n = a + 3d, \dots$ ədədi silsiləsində hər iki ardıcıl hədd birtərtibli $y_{n+1} = y_n + d$ (12) fərqlər tənliyi ilə əlaqədardır. Bu tənlikdə n yerində $n+1$ yazaq: $y_{n+2} = y_{n+1} + d$ (13).

(13)-dən (12)-ni çıxıb iki tərtibli $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0$ (14) fərqlər tənliyini alırıq. Beləliklə, ədədi silsilədə hər üç ardıcıl hədd (14)

münasibətilə əlaqədardır. Alınmış (9), (10), (11), (14) tənlikləri sabit əmsallı xətti bircins fərqlər tənliyinə, başqa sözlə $f(x+k) + a_1 f(x+k-1) + \dots + a_k f(x) = 0$ (15) şəklində tənliyə aiddir, burada $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ həqiqi ədədlərdir, həm də $a_k \neq 0$.

Belə tənliklər fərqlər tənliyinin ümumi nəzəriyyəsində mühüm praktik tətbiqi olan ən sadə və mühüm halı təşkil etdiyindən sonralar fərqlər tənliyinin yalnız bu tipinə baxacağıq. Bununla əlaqədar axtarılan $f(x)$ funksiyasının $0, 1, 2, 3, \dots$ çoxluğunda təyin edildiyini (başqa sözlə sıfırı da natural ədəd hesab etdikdə natural ədədlər çoxluğunda) nəzərdə tuturuq.

Həm də kitabın həcminin məhdud olduğunu nəzərə alaraq yalnız sabit əmsallı bir və iki tərtibli xətti bircins fərqlər tənliyinə baxırıq.

1.20.3. Birtərtibli fərqlər tənliyi. Bir tərtibli $f(n+1) - af(n) = 0$ (16) fərqlər tənliyinə baxaq, burada $a \neq 0$ həqiqi ədəd, $f(n)$ axtarılan funksiyadır. Bu tənliyin həlli yalnız n -dən deyil, habelə ona daxil olan ixtiyari c sabitindən asılı $f(n) = ca^n$ (17) funksiyasıdır. Doğrudan da $f(n) = ca^n$ isə, onda $f(n+1) = ca^{n+1}$. (16) tənliyində $f(n)$ və $f(n+1)$ -in qiymətlərini yerinə yazdıqda $ca^{n+1} - ac \cdot a^n = 0$ eyniliyi alınır. Deməli, $f(n) = ca^n$ funksiyası doğrudan da verilmiş tənliyin həllidir.

(17) düsturunda ixtiyari c sabitinə müxtəlif ədədi qiymətlər verdikdə verilmiş tənliyin sonsuz sayda həlləri alınır. Məsələn, $f(n) = c \cdot 3^n$ funksiyası $f(n+1) - 3f(n) = 0$ tənliyini ödəyir. Bu düsturda $c = 1, c = 2, c = \frac{1}{5}, c = -\frac{7}{6}, \dots$ hesab edərək verilmiş tənliyin uyğun $y = 3^n, y = 2 \cdot 3^n, y = \frac{1}{5} 3^n, y = -\frac{7}{6} 3^n, \dots$ həllərini alırıq.

Göründüyü kimi verilmiş fərqlər tənliyi ortağ vuruğu 3 olan bütün mümkün həndəsi silsilə ödəyir. Bu silsilələr bir-birindən birinci həddin qiymətləri ilə fərqlənir.

İxtiyari c sabiti daxil olan (17) həllinə (16) tənliyinin ümumi həlli deyilir. C -in müəyyən qiymətlərində ümumi həldən alınan həllərə (16) tənliyinin xüsusi həlləri deyilir.

Praktik məsələlərin həllində bizi hər şeydən əvvəl xüsusi həllər maraqlandıracaqdır. Sual qoyulur: Ümumi həldən xüsusi həllər necə alınır?

Fərz edək ki, (16) tənliyindən əlavə $n = n_0$ olduqda axtarılan funksiyanın $y = y_0$ qiyməti də verilir. Bu əlavə şərtə başlanğıc şərt deyilir və $f(n_0) = y_0$ (18) yazılır.

Konkret misallar üzərində ümumi həllə və verilmiş başlanğıc şərtinə görə uyğun xüsusi həllin necə tapıldığını göstərək. Fərz edək ki, $f(n+1) - 5f(n) = 0$ tənliyi $f(1) = 2$ başlanğıc şərti verilir. Tənliyin ümumi həlli $f(n) = c \cdot 5^n$ şəklindədir. $f(1) = 2$ başlanğıc şərtinə diqqət edərək, $2 = c \cdot 5$, buradan $c = \frac{2}{5}$ alırıq. $f_1(n) = \frac{2}{5} \cdot 5^n$ funksiyası verilmiş tənliyi və verilmiş başlanğıc şərtini ödəyir. Verilən başlanğıc şərt $f(n) = c \cdot 5^n$ ümumi həllindən $f_1(n) = \frac{2}{5} \cdot 5^n$ xüsusi həllini ayırmağa gətirdi.

Göstərmək olar ki, (16) tənliyinin ixtiyari həllini (17) şəklində vermək olar. Başqa sözlə göstərmək olar ki, (17) düsturundan ixtiyari başlanğıc şərt ilə ona uyğun xüsusi həlli tapmaq olar. Fərz edək ki, $f(n_0) = y_0$. Onda şərtə görə $a \neq 0$ olduğundan $ca^{n_0} = y_0$ bərabərliyini ödəyən həmişə sabit c ədədini tapmaq (həm də yeganə) olar. Sonuncu bərabərlikdən $c = \frac{y_0}{a^{n_0}}$. C-nin tapılan qiymətini ümumi həll düsturunda yerinə yazıb axtarılan xüsusi həlli tapırıq: $f_1(n) = \frac{y_0}{a^{n_0}} a^n$.

VI sinifdə mürəkkəb faiz anlayışını vermək üçün belə bir məsələyə baxılır [22]:

Məsələ 1a. Tutaq ki, S kəmiyyəti müəyyən zaman müddətində $p\%$ artır və alınan ümumi miqdar həmin zaman müddətində yenə də $p\%$ artır və s. n belə müddətdən sonra alınmış ümumi miqdar nə qədər olar?

- S -in $p\%$ -i $\frac{S \cdot p}{100}$ olduğundan, birinci zaman müddətindən sonra

ümumi miqdar $S_1 = S + \frac{S \cdot p}{100} = S \left(1 + \frac{p}{100} \right)$ olar. İkinci zaman

müddətinə kimi ümumi miqdarı tapmaq üçün S_1 -in $p\%$ -i $\frac{S_1 \cdot p}{100}$

olduğundan, alırıq ki, ikinci zaman müddətindən sonra ümumi miqdar

$S_2 = S_1 + \frac{S_1 p}{100} = S_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ olar. Burada $S_1 = S \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ olduğunu

nəzərə alsaq, yaza bilərik ki, $S_2 = S \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{100}\right) = S \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$

Eyni qayda ilə alırıq ki, $S_3 = S_2 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = S \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = S \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$.

Belə mühakiməni təkrar etməklə alırıq ki, n zaman müddətindən

sonra ümumi miqdar $S_n = S \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ olar.

Həmin məsələni fərqlər tənliyinin tətbiqilə də həll etmək olar.

Məsələ 1b. S kəmiyyəti müəyyən zaman müddətində p mürəkkəb faizlə artır. t -ci ildən sonra onun miqdarı nə qədər olar?

- $(t-1)$ ilin sonunda onun miqdarı $f(t-1)$ olarsa, onda t ilinin sonunda

onun miqdarı $f(t) = \left(1 + \frac{p}{100}\right) f(t-1)$ olar. Məsələnin həlli başlanğıc

şərti $f(0) = S$ olan $f(t) - \left(1 + \frac{p}{100}\right) f(t-1) = 0$ fərqlər tənliyinin

həllinə gəlir. Bu tənliyin ümumi həlli $f(t) = C \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ şəklindədir.

Bu düsturda $t=0$, $f(0)=S$ götürsək, onda $C=S$ alırıq.

Beləliklə, t -ci ilin sonunda son məbləğin miqdarı (mürəkkəb faizlə

verilən ilk S məbləğ üçün) $f(t) = S \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ olur. Bu isə VI sinifdə

öyrənilən mürəkkəb faiz artımının düsturudur. Həmin nəticəni yuxarı siniflərdə fərqlər tənliyinin tətbiqi ilə almaq şagirdlərin riyazi mədəniyyətinin o cümlədən ümumiləşdirmə və xüsusişdirmə qabiliyyətlərinin yüksəldilməsi üçün olduqca faydalıdır.

1.20.4. İki tərtibli fərqlər tənliyi. $f(n+2) + pf(n+1) + qf(n) = 0$ (19) şəklində olan iki tərtibli fərqlər tənliyinə baxaq, burada p, q həqiqi

ədədlərdir, $q \neq 0$, $f(n)$ isə 0, 1, 2, 3,... çoxluğunda verilmiş axtarılan funksiyadır. (19) tənliyinin həlli ixtiyari iki c_1 və c_2 sabitlərindən asılıdırsa, habelə bu sabitləri seçmək yolu ilə onun ixtiyari həllini almaq mümkündürsə, onda belə həllə ümumi həll deyilir.

Ümumi həldən c_1 və c_2 -nin qeyd edilmiş qiymətləri ilə alınan həllərə verilmiş tənliyin xüsusi həlləri deyilir.

Məsələnin konkret şərtlərinə uyğun xüsusi həlləri tapmaq üçün iki başlanğıc şərt verilməlidir. İki tərtibli fərqlər tənliyi üçün bu şərtlər $f(n_0) = a$, $f(n_1) = b$ (20) şəklindədir, başqa sözlə axtarılan $f(n)$

funksiyasının argumentinin iki ardıcıl $n = n_0$ və $n = n_1$ qiymətləri

üçün qiymətləri verilir. $f(x+2) - 3f(x+1) + 2f(x) = 0$ (21) tən-

liyinin ümumi həllinin $f(n) = c_1 + c_2 \cdot 2^n$ (22) funksiyası olduğunu göstərək. Doğrudan da verilmiş funksiya (21) tənliyinin həllidir, çünki onu eyniliyə çevirir: $(c_1 + c_2 \cdot 2^{n+2}) - 3(c_1 + c_2 \cdot 2^{n+1}) + 2(c_1 + c_2 \cdot 2^n) = 0$

(21) tənliyinin ixtiyari həllini (22) şəklində göstərmənin mümkün olduğunu demək qalır. Başqa sözlə (22) düsturundan ixtiyari iki başlanğıc şərti ilə verilmiş tənliyin uyğun xüsusi həllərinin tapılmasının mümkün olduğunu göstərmək lazımdır. Məsələn, fərz edək ki, $f(0) = a$, $f(1) = b$. İsbat etmək lazımdır ki, c_1 və c_2 -nin elə qiymətlərini tapmaq olar ki, $c_1 + c_2 = a$ və $c_1 + 2c_2 = b$.

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = a \\ c_1 + 2c_2 = b \end{cases} \text{ tənliklər sisteminin } a, b \text{-nin ixtiyari qiymətlərində həlli}$$

olduğundan, (22) funksiyası həqiqətən (21) fərqlər tənliyinin həllidir.

(19) fərqlər tənliyinin həlli isbatsız verdikimiz aşağıdakı üç teoremə əsaslanır¹.

Teorem 1. $f_1(n)$ funksiyası (19) tənliyinin hər hansı həllidirsə, c isə ixtiyari sabitdirsə, onda $cf_1(n)$ funksiyası da bu tənliyin həllidir.

Teorem 2. $f_1(n)$ və $f_2(n)$ (19) tənliyinin həllidirsə, onda ixtiyari A, B sabitləri üçün $f(n) = Af_1(n) + Bf_2(n)$ (23) funksiyası da həmin tənliyin həllidir.

¹ Bu isbatlarla tanış olmaq üçün [23]-dən istifadə etmək olar.

Belə sual yaranır: $f_1(n)$ və $f_2(n)$ (19) tənliyinin ixtiyari həllədirsə (23) funksiyası bu tənliyin həllidirmi? Bu suala cavab vermək üçün fərqlər tənliyinin xətti asılı olmayan həlli anlayışını bilmək lazımdır.

Tərif. (19) tənliyinin iki $f_1(n)$ və $f_2(n)$ həllərinin $\frac{f_1(n)}{f_2(n)}$ nisbəti sabit kəmiyyət deyildirsə, onda bu həllərə xətti asılı olmayan həllər deyilir; əksi halda $f_1(n)$ və $f_2(n)$ -ə xətti asılı funksiyalar deyilir.

Məsələn, $f_1(n)=n$ və $f_2(n)=n-5$ funksiyaları, $\frac{n}{n-5} \neq \text{sabit}$ olduğundan, xətti asılı deyildir; $f_1(n)=n$ və $f_2(n)=3n$ funksiyaları, $\frac{n}{3n} = \frac{1}{3} = \text{sabit}$ olduğundan ($n \neq 0$), xətti asılıdır.

Teorem 3. $f_1(n)$ və $f_2(n)$ funksiyaları (19) tənliyinin hər hansı xətti asılı olmayan həllədirsə, onda $f(n)=c_1 f_1(n)+c_2 f_2(n)$ (24) funksiyası bu tənliyin ümumi həllidir. Beləliklə, (19) tənliyinin ümumi həllini tapmaq üçün bu tənliyin iki xətti asılı olmayan $f_1(n)$ və $f_2(n)$ həllərini tapmaq kifayətdir. (19) tənliyinin xüsusi həllini $f(n)=r^n$ ($r \neq 0$) funksiyası şəklində axtaracaqıq, burada r ədədi axtarılmalıdır. Həllin bu şəkildə seçilməsi aşağıdakı mühakiməyə əsaslanır. (19) tənliyinin sol tərəfi axtarılan $f(n)$ funksiyası və onun ardıcıl $f(n+1)$, $f(n+2)$ qiymətlərinin sabit əmsallarla hasilləri cəmidir. Belə tənliyin həlli ilə $f(n)$ funksiyası ola bilər ki, qiymətləri $f(n+1)$ və $f(n+2)$ qiymətlərindən yalnız sabit vuruqla fərqlənmiş olsun. Xüsusən $f(n)=r^n$ funksiyası bu xassələri ödəyir, çünki onun üçün $f(n+1)=r^{n+1}=r \cdot r^n$, $f(n+2)=r^{n+2}=r^2 r^n$. Bu qiymətləri (19) tənliyində yerinə yazıb $r^{n+2} + pr^{n+1} + qr^n = 0$ və ya $r^n(r^2 + pr + q) = 0$ bərabərliyini alırıq. $r^n \neq 0$ olduğundan $r^2 + pr + q = 0$ (25)

Alınmış bu tənliyə (19)-un xarakterik tənliyi deyilir. Onun köməyi ilə verilmiş tənliyin ümumi həllini qurmaqda istifadə olunan iki r_1 və r_2 qiymətləri asanlıqla tapılır.

Xarakterik tənliyin həllində aşağıdakı üç hal ola bilər.

1. r_1 və r_2 kökləri həqiqi və müxtəlifdir. $f_1^{(n)} = r_1^n$ və $f_2(n) = r_2^n$ funksiyaları (19) tənliyinin xüsusi həllərindən xətti asılı deyil. Onların xətti asılı olmaması $\frac{f_1(n)}{f_2(n)} = \frac{r_1^n}{r_2^n} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n \neq \text{sabit}$ -dən alınır. (19) tənliyinin ümumi həlli $y_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ (26) şəklindədir.

2. r_1 və r_2 kökləri həqiqi və bərabərdir: $r_1 = r_2$. $f(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ funksiyası artıq ümumi həll deyildir.

İş ondan ibarətdir ki, bu həlli $f(n) = (c_1 + c_2) r_1^n = c r_1^n$ şəklində yazmaq olar. $c r_1^n$ isə ümumi həll deyil, çünki buraya iki deyil bir ixtiyari sabit daxildir. $f_1(n) = r_1^n$ -dən fərqli hər hansı ikinci həlli tapmaq lazımdır. Belə həll isə $f_2(n) = n r_1^n$ funksiyasıdır. Bilavasitə yerinə yazmaqla bu funksiyanın həqiqətən verilmiş tənliyin həlli olduğuna inanmaq olar. $\frac{f_1(n)}{f_2(n)} = \frac{r_1^n}{n r_1^n} = \frac{1}{n} \neq \text{sabit}$ olduğundan

$f_1(n) = r_1^n$ və $f_2(n) = n r_1^n$ funksiyaları xətti asılı deyildir. (19) tənliyi ümumi həlli $y_n = r_1^n (c_1 + c_2 n)$ (27) şəklindədir.

3. r_1 və r_2 kökləri qoşma kompleks ədədlərdir: $r_1 = a + bi$, $r_2 = a - bi$ (19) tənliyinin ümumi həlli $y_n = c_1 (a + bi)^n + c_2 (a - bi)^n$ şəklindədir.

Misal. Tənliyin ümumi həllini tapın: $f(n+2) - f(n+1) + 6f(n) = 0$.

- Xarakteristik tənliyi tərtib edək: $r^2 - r + 6 = 0$. Bu tənliyin $r_1 = -2$, $r_2 = 3$ kökləri həqiqi və müxtəlifdir. (26) düsturuna əsasən ümumi həlli yazırıq: $y_n = c_1 (-2)^n + c_2 \cdot 3^n$.

İndi həlli iki tərtibli fərqlər tənliyinə gələn aşağıdakı məsələlərə baxaq.

1. Ədədi silsilənin birinci həddi a , hədlər fərqi d -dir. Bu silsilənin ümumi həddini tapın.

- Ədədi silsilənin ümumi həddinin tapılması $y_1 = a$, $y_2 = a + d$ başlanğıc şərtləri ilə (14) fərqlər tənliyinin həllinə gəlir. $r^2 - 2r + 1 = 0$

xarakteristik tənliyinin kökləri $r_1 = r_2 = 1$ bərabər və həqiqidir. Ümumi tənlik (27) düsturuna əsasən yazılır: $y_n = 1^n(c_1 + c_2 n) = c_1 + c_2 n$. Sonra başlanğıc şərtlərindən istifadə edərək c_1 və c_2 sabitlərinin qiymətlərini tapırıq. $n=1$ isə $y_1 = a$, $n=2$ isə $y_2 = a + d$ olduğundan, bu qiymətləri ümumi həll düsturunda yerinə yazıb

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = a \\ c_1 + 2c_2 = a + d \end{cases}$$

tənliklər sistemini alırıq. Buradan $c_1 = a - d, c_2 = d$ tapırıq. c_1 və c_2 -nin qiymətlərini ümumi həll düsturunda yerinə yazıb, ədədi silsilənin $y_n = (a - d) + dn$ və ya $y_n = a + d(n - 1)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) ümumi həddini alırıq.

2. $\sqrt{2}$ -nin sonsuz zənciri kəsirə ayrılışı $\sqrt{2} = [1, 2, 2, \dots, 2, \dots]$ şəklindədir. Verilmiş zənciri kəsrin uyğun kəsrləri ardıcılığının ümumi həllini tapın.

- Məlumdur ki, üç ardıcıl uyğun kəsrin surətləri və məxrəcləri arasında $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}q_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}q_n + Q_{n-2}}$ asılılığı vardır, burada q_n - tam olmayan xüsusi zənciri kəsr, P_n, Q_n isə n tərtibli zənciri kəsrin uyğun olaraq surəti və məxrəcidir, $n=2, 3, 4, \dots$. Verilmiş zənciri kəsr üçün uyğun kəsrlər ardıcılığının birinci hədləri belə olar:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}, \dots$$

$n=1, 2, 3, \dots$ isə verilmiş zənciri kəsr üçün $q_0 = 1, q_n = 2$ olduğundan, üç ardıcıl uyğun kəsrlərin surətləri və məxrəcləri $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$; $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$ ($n=2, 3, 4, \dots$) fərqlər tənliyini ödəməlidir. Uyğun kəsrlərin ümumi həddinin tapılması iki fərqlər tənliyinin həllinə gətirildi:

- 1) $p_0 = 1, p_1 = 3$ başlanğıc şərtləri ilə $P_{n+2} - 2P_{n+1} - P_n = 0$;
- 2) $Q_0 = 1, Q_1 = 2$ başlanğıc şərtləri ilə $Q_{n+2} - 2Q_{n+1} - Q_n = 0$.

Hər iki tənliyin xarakteristik tənliyi $r^2 - 2r - 1 = 0$ şəklindədir. Bu tənliyin kökləri: $r_1 = 1 + \sqrt{2}$, $r_2 = 1 - \sqrt{2}$. Birinci tənliyin ümumi həlli: $P_n = c_1(1 + \sqrt{2})^n + c_2(1 - \sqrt{2})^n$.

Başlangıç şərtlərindən istifadə edərək
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1(1 + \sqrt{2}) + c_2(1 - \sqrt{2}) = 3 \end{cases}$$

tənliklər sistemini və buradan $c_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$, $c_2 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$ alırıq.

Beləliklə, $P_n = \frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1} \right]$. Analoji olaraq

$$Q_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1} \right] \text{ tapırıq. Uyğun kəsrlər ardı-}$$

cılığının ümumi həddi $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sqrt{2} \left[(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1} \right]}{(1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}$ şəklindədir.

II FƏSİL.

Cəbr və analizin başlanğıcının yekun təkrarı üçün məsələ və misallar

1. n hansı ən kiçik natural ədəd olduqda $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n$ hasil 7^{100} -ə bölünər?

$$2. \quad \begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \cos x + \cos y = b, \\ \sin z - \sin(x + y + z) = c, \\ \cos z + \cos(x + y + z) = d \end{cases} \quad \text{tənliklər sistemi verilir.}$$

a, b, c, d arasındakı asılılığı tapın.

3. Funksiyaların təyin oblastını tapın:

1) $y = \sqrt{tg^2 x - (\sqrt{3} + 1)tg x + \sqrt{3}}$

2) $y = \arccos \frac{2}{1-x}$

3) $y = \sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$

4) $y = ctg \pi x + \arccos(2^x)$

5) $y = \arccos \sqrt{x^2 - 1}$

6) $f(x, y) = \arcsin(xy)$

4. Funksiyanın dəyişmə oblastını (qiymətlərini) tapın:

1) $y = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - x + 2}$

2) $y = \sin x + \cos x$

5. Funksiyaların tək və cüt olmasını araşdırın:

1) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$

2) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$

$$3) y = \sin x + \cos x$$

$$4) y = \lg \frac{1+x}{1-x}$$

6. Funksiyaların qabarıqlığı və çöküklüyünü araşdırın:

$$1) y = f(x) = x^2$$

$$2) y = f(x) = \sin x$$

7. Funksiyaların dövrülüyünü araşdırın:

$$1) y = \sin 2\pi x$$

$$2) y = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

$$3) y = \sin(ax + b)$$

$$4) y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$$

$$5) y = \cos^2 x$$

$$6) y = \sin^4 x$$

$$7) y = \sin^4 x + \cos^4 x$$

$$8) y = |\cos x|$$

$$9) y = \sin^3 x$$

10) $y = \{x\}$, burada $\{x\}$ -ilə x ədədinin kəsr hissəsi işarə edilmişdir.

8. Aşağıdakı funksiyaların dövrü olmadığını göstərin:

$$1) y = \cos x^2$$

$$2) y = x + \sin x$$

$$3) y = \sin(\sqrt{2}x) + \cos(\sqrt{5}x)$$

$$9. \text{İsbat edin ki, } x\text{-in ixtiyari qiymətində } f(x+c) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$$

bərabərliyi ödənilərsə, onda $f(x)$ dövrü funksiyadır, burada c - sabit ədəddir.

10. İsbat edin ki, $f(x) = \cos x + \cos \alpha_1 x + \dots + \cos \alpha_n x$ dövrü funksiyadırsa, onda $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - rasional ədədlərdir.

11. İsbat edin ki, $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$ tənlikləri ilə verilən kəsişən iki l_1 və l_2 düz xətlərinin əmələ gətirdiyi θ bucağının tangensi $\operatorname{tg} \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ düsturu ilə təyin olunur.

12. (x_1, y_1) və (x_2, y_2) nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyini tapın.

13. Funksiyaların qrafiklərini qurun:

$$1) y = \begin{cases} -x + 1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$2) y = \sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}.$$

14. Koordinatları göstərilən asılılıqları ödəyən nöqtələrin müstəvi üzərində harada yerləşdiyini göstərin:

$$1) |x| + |y| < 1$$

$$2) \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ y + x < 1 \end{cases}$$

$$3) \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y} = 2$$

15. Funksiyaların qrafiklərini qurun:

$$1) y = x|x|$$

$$2) y = \begin{cases} x^2 & x < -1 \quad \text{ve ya } x > 1 \text{ olduqda} \\ 1 & -1 \leq x \leq 1 \quad \text{olduqda} \end{cases}$$

$$3) y = x^2 - 2|x| + 1$$

$$4) y = \frac{x^3 + x}{|x|}$$

$$5) y = (x + 1)^3$$

$$6) y = x^4 - x^3 + x^2$$

$$7) y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$$

$$8) y = \frac{3x - 2}{5x^2}$$

$$9) y = \frac{\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}}{\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}} \quad (a \neq 0)$$

$$10) y = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$11) y = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$12) y = 2^{x^2 - 3x + 2}$$

$$13) y = 2^{\operatorname{arctg} x}$$

$$14) y = \frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x} + 1} - \sqrt{\frac{1+x^2}{2x} - 1}}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x} + 1} + \sqrt{\frac{1+x^2}{2x} - 1}}$$

$$15) y = a^{\log_a x}$$

$$16) y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$$

$$17) y = \log_2 \log_2 x$$

$$18) y = 0,5 \log_2 \frac{1+x}{1-x}$$

$$19) y = 4 \left(\cos^4 \frac{x}{2} + \sin^4 \frac{x}{2} \right)$$

$$20) y = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$$

$$21) y = \sin(\arcsin x)$$

$$22) y = |\arcsin x|$$

$$23) y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

16. İsbat edin ki, $x \geq 0$ olduqda

$$y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ funksiyası sıfıra bərabərdir,}$$

$$x < 0 \text{ olduqda isə } y = \pi - 2 \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

17. $\lg x = \sqrt{-x^2 - 3x - 2}$ tənliyinin həqiqi kökü olmadığını göstərin.

18. $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = \sqrt[8]{9x - 10 - 2x^2}$ tənliyinin həqiqi kökünü tapın.

19. n sayda $a_1, a_2, \dots, a_n$ ədədləri verilir. x -in hansı qiymətində $y = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2$ funksiyasının minimumu olduğunu təyin edin.

20. a -nın hansı qiymətlərində $f(x) = \frac{x+a-2}{a-x^2}$ funksiyası bütün ədəd oxunda kəsilməzdir.

21. Tənliyi həll edin: $\sin 8x = \cos 3x(\sin x + \sin 7x)$

22. Tənliyi həll edin:

$$\log_{\cos x} \left[\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \right] + 2 \log_{\frac{1}{2} - \cos x} \left[\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right] =$$

$$= 3 - \log_{\cos x} 2$$

23. Tənliklər sistemini araşdırın¹ (a – həqiqi parametrdir.
 $|a| \neq 2k+1, k=0,1,2,\dots$)

$$\begin{cases} 4(x+y-2) = \left(1 + \frac{\left|\cos \frac{\pi a}{2}\right|}{\cos \frac{\pi a}{2}}\right) \left(2x - y^2 - \frac{20}{9}\right) \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

24. Tənliyi həll edin: $\left|\log_{\frac{1}{3}}(1+\sin 2x)\right| + \left|\log_{\frac{1}{3}}(1-\sin 2x)\right| = 1$

25. p -nin hansı qiymətlərində $\cos x + \sqrt{1+p} \sin x = 1 + \sqrt{1-p}$ tənliyinin həlli vardır?

26. Tənliklər sistemini həll edin:
$$\begin{cases} 2^{2x-2y} + 2^{x-y} - 2 = 0 \\ 2^{2x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2y-1} = 5 \end{cases}.$$

27. Radiusu R -ə bərabər olan çevrə üzrə bərabərsürətli və eyni istiqamətdə iki cisim hərəkət edir. Onlardan biri tam dövrü ikincidən t saniyə tez edir. Cisimlərin iki ardıcıl görüşləri arasındakı vaxt a saniyədir. Hər iki cismin sürətini tapın.

28. a -nın hansı həqiqi müsbət qiymətlərində $a+x-x^2 = \sqrt{a+x} + x$ tənliyinin mənfi olmayan həqiqi kökü vardır? Bu kökü tapın.

29. $x=11$ isə $x^{17} - 12x^{16} + 12x^{15} - 12x^{14} + \dots - 12x^2 + 12x - 1$ ifadəsi nəyə bərabərdir?

¹ Yəni parametrin müxtəlif qiymətlərində sistemin neçə həlli olduğunu müəyyən edin

30. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2 + x + 1)y^2z^2, \\ y^2(x+z)^2 = (4y^2 + y + 1)x^2z^2, \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2 + z + 1)x^2y^2 \end{cases}$$

31. Tənliyi həll edin: $\sin 6x + \sin 8x + \sin 16x + \sin 18x + 16 \sin 3x = 0$

32₁. $z = \frac{c-i}{2c-i}$ şəklində göstərmək mümkün olan z ədədi

kompleks müstəvidə harada yerləşir, burada c - həqiqi ədəddir.

32₂. Tənliyi həll edin:

$$\sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 15} + \sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 13} = x + 1$$

33. Bərabərsizliyi isbat edin: $\frac{\log_b a^2}{a+b} + \frac{\log_c b^2}{b+c} + \frac{\log_a c^2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

34. İsbat edin ki,
$$\begin{cases} a \sin^2(x+y) + b \sin^2(x-y) = 2, \\ a \operatorname{tg}^2(x+y) + b \operatorname{tg}^2(x-y) = 2, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{a-b}{a+b} \end{cases} \quad \text{tənliklər}$$

sisteminin həlli varsa, onda $(a^2 - b^2)^2 = -4ab$.

35. Tənliklər sisteminin müsbət həllərini tapın:

$$\begin{cases} nx_1 = x_2x_3 = x_4x_5 = x_6x_7 = mx_8, \\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6 = x_7 + x_8 = m + n \end{cases}$$

36. Eyniliyi isbat edin: $\sum_{i=0}^{n-k} C_n^i C_n^{i+k} = C_{2n}^{n+k}$

37. Tənliyin tam həllərini tapın: $\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{2y-2} + \sqrt[4]{4x-3} = 10$

38. $\log_{N_1} M_1 = \alpha$ verilir. $\log_{N_2} M_2$ -ni hesablayın, burada

M_1, M_2, N_1, N_2 ədədlərindən hər biri vahiddən fərqli a və b

ədədlərinin qüvvətləri hasiləridir, yəni $M_1 = a^{m_1} b^{n_1}$, $M_2 = a^{m_2} b^{n_2}$,

$N_1 = a^{p_1} b^{q_1}$, $N_2 = a^{p_2} b^{q_2}$.

39. $\log_{98}^{56} = \alpha$ verilir. $\log_7 14$ -ü hesablayın.

40. $\log_{N_1}^{M_1} = \alpha$, $\log_{N_2}^{M_2} = \beta$ verilir. $\log_{N_3}^{M_3}$ -ü hesablayın, burada $M_1, N_1, M_2, N_2, M_3, N_3$ ədədlərindən hər biri üç müsbət a, b, c ədədlərinin qüvvətləri hasilidir, yəni $M_1 = a^{m_1} b^{n_1} c^{k_1}$, $M_2 = a^{m_2} b^{n_2} c^{k_2}$, $M_3 = a^{m_3} b^{n_3} c^{k_3}$, $N_1 = a^{p_1} b^{q_1} c^{r_1}$, $N_2 = a^{p_2} b^{q_2} c^{r_2}$, $N_3 = a^{p_3} b^{q_3} c^{r_3}$.

41. $\log_6 63 = \alpha$, $\log_{21} 18 = \beta$ verilir. $\log_{42}^{147}$ -ni hesablayın.

42. $f(x, y) = \frac{y}{x}$ funksiyasının (x, y) nöqtələr çoxluğunda $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 0$ tənliyini ödəyən ən kiçik qiymətini tapın.

43. Bərabərliyi isbat edin: $tg^6 10^0 + tg^6 50^0 + tg^6 70^0 = 433$

44. $x^{2x} = 1$ tənliyinin kökünü tapın.

45. Tənliyi həll edin: $x^{\frac{4}{5}} - 7x^{\frac{2}{5}} + 6x^{-1} = 0$

46. Tənliklər sistemini həll edin:
$$\begin{cases} x^{2y-1} = 3 \\ x^{4y} = 5 \end{cases}$$

47. Tənliklər sistemini həll edin:
$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases}$$

48. Tənliyi həll edin: $(3\sin x + \sqrt{3}\cos x + 5y)^2 = 37(1 + y^2)$

49. İsbat edin ki, $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ isə $tg \frac{\alpha}{2} < \alpha$ bərabərsizliyi ödənilir.

50. $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, $0 \leq z \leq \pi$ isə tənliklər sistemini həll edin: $\sin^2 x = \sin y$, $\sin^2 y = \sin z$, $\sin^2 z = \sin x$

51. Həqiqi $\{a_n\}$ və $\{b_n\}$ ədədlər ardıcılığı aşağıdakı qaydada verilir: $1 < a_1 < b_1$, $a_n = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$, $b_n = \frac{b_{n-1} - 1}{a_{n-1} - 1}$ ($n \geq 2$).

a_1 və b_1 ədədlərinin hansı qiymətində bu ardıcılıqların ikisi də yığılır?

52. Bərabərliyi isbat edin:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1) \dots (n+k)} = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$$

53. Tənliyi həll edin: $\log_2^{(1+\sqrt{x})} = \log_3^x$

54. $f(x, y, z, t) = \frac{ax^2 + by^2}{ax + b} + \frac{az^2 + bt^2}{az + bt}$ funksiyanın ən

böyük və ən kiçik qiymətlərini $x + z = 1$; $y + t = 1$; $x, y, z, t \geq 0$ şərtləri olduqda tapın. (a, b – müsbət sabitlərdir).

55. $\sqrt[3]{abcd} = a + b + c + d$ tənliyinin neçə həlli vardır?

56. İsbat edin ki, n natural ədəddirsə, onda $\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$

57. Tənliyi həll edin: $2 + \sec x \sec 3x = 2 \operatorname{ctg} 2x \operatorname{tg} 3x$.

58. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 + 13z^2 = 12xy + 4xz + 6yz, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 288 \end{cases}$$

59. Bərabərsizliyi isbat edin:

$$(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n)^2 + (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n)^2 \leq n^2$$

60. Bərabərsizliyi isbat edin: $2^n > n^2$ (n -in hansı natural qiymətlərində bərabərsizliyin doğru olduğunu müəyyən edin).

61. Cəmin qiymətlər çoxluğunu tapın:

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}, \text{ burada } a, b, c, d - \text{ixtiyari müsbət ədədlərdir.}$$

62. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ funksiyanın $[-2; 5]$ aralığında ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

63. Tənliyi həll edin: $\cos^{12} x + \sin^6 x (1 + \cos^2 x)^2 = 1$.

64. Tənliyin natural həllini tapın:

$$x^y - x^{y-1} - x^{y-2} - x^{y-3} - x^{y-4} - x^{y-5} = 1$$

65. İsbat edin ki, tənliyin yalnız sonlu sayda tam həlli vardır:

$$3x^2 - 4xy + 2y^2 - 21x + 12y - 3 = 0$$

66. x və y -in arasında hansı asılılıq olduqda $\frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2}$ ifadəsi

ən böyük və ən kiçik qiymət alır?

Diferensial hesabı elementlərinin məktəb təliminə daxil edilməsi ənənəvi “Elementar riyaziyyatın” müxtəlif bölmələrinin çətin məsələlərinin həlli üçün şagirdlərin əlində olduqca güclü alətdir. Odur ki, riyazi analiz üzrə orta və ali məktəblər üçün gələcəkdə yazılacaq dərsliklərdə (vəsaitlərdə) bu cəhətə xüsusi diqqət verilməlidir. Məktəbdə funksiyanın törəməsinin işarəsinə görə onun artma və azalma aralıqlarının tapılmasının mümkünlüyünü izah etdikdən sonra çox vaxt bu məlumat yalnız konkret funksiyalar üçün belə aralıqların tapılmasına və qrafiklərinin qurulmasına tətbiqi ilə məhdudlaşdırılır. Halbuki bu material daha çox müxtəlif tətbiqlərə və şablonluqlardan qaçmağa imkan verir. Habelə nəzərə almaq lazımdır ki, şagirdləri maraqlandıran və onlara aşkar olan müxtəlif tətbiqlərin göstərilməsi riyazi analizin əsas anlayışlarının, düsturlarının və teoremlərinin daha dərinə və məzmunlu öyrənilməsi üçün ciddi həvəs və maraq oyadıcı amildir.

67-75 məsələləri törəmənin tətbiqlə bərabərsizliklərin doğruluğunun əsaslandırılmasına nümunələrdir.

Şagirdlərin bu məsələləri yaxşı başa düşməsi üçün onlar: 1) törəmənin tərifini, 2) əsas diferensiasiya qaydalarını (cəmin, fərqləmə, hasilin, qismətin, qüvvətin, mürəkkəb funksiyanın, çoxhədlinin və $\sin u, \cos u, \operatorname{tg} u, a^u, \ln u$ funksiylarının), 3) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olduqda

$\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$ bərabərsizliklərini bilməlidirlər.

Baxılan bərabərsizliklərin doğruluğunun göstərilməsində analizin məlum teoremindən (1. $f(x)$ funksiylasının hər hansı (a, b) intervalında törəməsi varsa və bu intervalda $f'(x) > 0$ isə $f(x)$ həmin intervalda monoton artır; $f'(x) < 0$ isə monoton azalır. əlavə olaraq $f(x)$ -in $[a; b]$ parçasında (və ya $(a; b)$, $[a; b)$ yarım intervalında) kəsilməyən olduğu məlumdursa, onda artma (və ya azalma) uyğun

olaraq $[a;b]$, $(a;b]$, $[a;b)$ çoxluqlarında da ödənilir) istifadə yeganə priyomdur.

67. Fərz edək ki, $0 < c < \frac{1}{2}$. Bərabərsizliyin doğruluğunu

yoxlayın: $2c + \frac{1}{c^2} > 5$

68. $x > 2$ isə $2(x^3 + 6x) > 9x^2 + 4$ olduğunu yoxlayın.

69. Məlumdur ki, α, β ədədləri 0 və $\frac{\pi}{2}$ arasındadırsa və $\alpha < \beta$ isə, onda $\cos \alpha > \cos \beta$. $\alpha + \cos \alpha < \beta + \cos \beta$ bərabərsizliyi doğrudurmu?

70. Fərz edək ki, p, q müsbət ədədlərdir, $p < q$. Onda aşkardır ki, $p^2 < q^2$, $\frac{1}{p^3} > \frac{1}{q^3}$. Demək olarmı ki: a) $p > 1,5$ olduqda, b) $p > 1$ olduqda $p^2 + \frac{1}{p^3} < q^2 + \frac{1}{q^3}$ bərabərsizliyi ödənilir?

71. Ədədlərdən hansı böyükdür: 100^{101} və ya 101^{100} ; 107^{113} və ya 113^{107} ; 1979^{2001} və ya 2001^{1979} ; e^π və ya π^e ; $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ və ya $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$.

72. $0 < p < q$ olduqda $(p+q)^6$ və ya $32(p^6 + q^6)$ böyükdür?

73. İxtiyari müsbət a, b, c ədədləri üçün $a^3 + b^3 + c^3 - 3ab \geq 0$ bərabərsizliyi doğrudurmu?

74. Bütün həqiqi x ədədləri üçün $x^5 + (1-x)^5 \geq \frac{1}{16}$ bərabərsizliyinin doğru olduğunu yoxlayın.

75. Fərz edək ki, a, b, p, q müsbət ədədlərdir.

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (1) isə $ab < \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ (2) bərabərsizliyinin

doğruluğunu yoxlayın.

76. Bərabərsizliyi isbat edin: $\ln a \left(2 + \frac{\ln^2 a}{3} \right) \leq \frac{a^2 - 1}{a}$, burada $a \geq 1$.

77. Üç rəfdə 44 kitab vardır. Üçüncü rəfdən ikinciyə 3 kitab qoyduqda, birinci və üçüncü rəfdəki kitabların sayı bərabər, ikincidə isə birincidən 2 dəfə çox kitab oldu. Hər rəfdə neçə kitab vardır?

78. Törəmənin tətbiqlə eyniliyi isbat edin:

$$\arctg x + \arctg 3x = \arccos \frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}} + \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

79. Funksiyanın dövrünü tapın: $f(x) = A \sin ax + B \sin bx + C \cos cx$, burada $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, a, b, c$ müxtəlif müsbət ədədlərdir.

80. Eyniliyi isbat edin (təyin oblastında):

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\alpha + 20^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 40^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) + \dots + \operatorname{tg}(\alpha + 160^\circ) = 9 \operatorname{tg} 9\alpha$$

81. $(5 + \sqrt{26})^{101}$ binomunun açılışında onluq yazılışda vergüldən sonra ilk 100 işarəni tapın.

$$82. \text{ Hesablayın: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3 + 6k^2 + 11k + 6}$$

83. Funksiyanın yazılışını sadələşdirin:

$$F(x) = \sin 3x \cos^3 x + \cos 3x \sin^3 x.$$

$$84. \text{ Cəmi hesablayın: } \sigma = \frac{C_n^0}{1} - \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} - \frac{C_n^3}{4} + \dots + (-1)^n \frac{C_n^n}{n+1}.$$

Burada C_n^k -binomial əmsallardır, $C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}$; $C_n^0 = 1$.

85. Çoxhədlinin yazılışını sadələşdirin:

$$F(x) = (x+a+b)^3 - (x+a-b)^3 - (x-a+b)^3 - (-x+a+b)^3$$

86. Eyniliyi isbat edin: $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x + 8 \operatorname{tg} 8x = \operatorname{ctg} x - 16 \operatorname{ctg} 16x$

87. Funksiyanın yazılışını sadələşdirin: $\varphi(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$

88. Nyuton binomu düsturunu isbat edin:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{p-1} x^{p-1} + C_n^p x^p + \dots + C_n^n x^n.$$

İnteqralın tətbiqlə bərabərsizlikləri isbat etmək olar.

Müəyyən inteqralın bərabərsizliyin doğruluğunun yoxlanılmasına bir sıra tətbiqləri aşağıdakı teoremə əsaslanır.

Teorem 1. Fərz edək ki, f və g funksiyaları hər-hansı $[a, b]$ yarım intervalında kəsilməzdir və bu intervalın hər yerində $f(x) \leq g(x)$

bərabərsizliyi ödənilir. Onda $x \in [a; b)$ olduqda $\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt$.

Əlavə olaraq hər hansı $x_0 \in [a, b)$ üçün $f(x_0) < g(x)$ ciddi bərabərsizliyi ödənilərsə, onda $x > x_0$ olduqda $\int_a^x f(t)dt < \int_a^x g(t)dt$ ciddi bərabərsizliyi də ödənilir.

Bu teoremdən bərabərsizliyin yoxlanmasının belə priyomu alınır:

$F(x) \leq G(x)$ ($a \leq x < b$) bərabərsizliyini yoxlamaq tələb olurssa onda bu funksiyaların törəmələri olan f və g funksiyaları üçün ($f \equiv F', g \equiv G'$) analoji bərabərsizliyi $f(x) \leq g(x)$ ($a \leq x < b$) yoxlamaq faydalıdır. Sonuncu bərabərsizlik doğrudursa, onda

$$\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt \text{ bərabərsizliyi də doğrudur. Bu bərabərsizliyin sol}$$

və sağ tərəfləri uyğun olaraq ya $F(x)$ və $G(x)$ ilə üst-üstə düşür, yaxud onlardan hər hansı sabitlə fərqlənir. 89-93 məsələləri bu baxımdan maraqlıdır.

89. $\sin x \leq 0$ ($0 \leq x < \infty$) bərabərsizliyindən istifadə edərək həmin x üçün

$$1) \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, \quad 2) \sin x \geq x - \frac{x^3}{3!}, \quad 3) \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

bərabərsizliklərin doğruluğunu yoxlayın.

90. Bərabərsizliyin doğruluğunu yoxlayın:

$$x - \sin x \leq 1 - \cos x \leq x\sqrt{2} - \sin x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

91. Məlumdur ki, $\left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$ olduqda $\operatorname{tg} x \geq x$ və $\sin x \leq x$. x -

in həmin qiymətlərində $\operatorname{tg} x + \sin x \geq 2x$ bərabərsizliyi doğrudurmu?

92. İsbat edin ki, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ olduqda $\ln(2\sin x) > \frac{1}{2}x(\pi - x) - \frac{5}{72}\pi^2$

bərabərsizliyi doğrudur.

93. Aşağıdakı ikiqat bərabərsizliyin ($x \geq 0$ olduqda) doğruluğunu yoxlayın:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

94. Aşağıdakı funksiyaların tərsini tapın:

1) $y = \frac{2x-1}{x-2}$

2) $y = \frac{x^2+3x}{x^2-5x}$

3) $y = x|x| + 2x$

95. Tənliyi həll edin: $\overline{xy}^{x:y} = \overline{yztu}$.

96. İsbat edin ki, ixtiyari $n \in N$ üçün

$$\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} < \frac{1}{3}$$
 bərabərsizliyi ödənilir, burada surətə

n , məxrəcdə isə $n-1$ radikal işarəsi daxildir.

97. İxtiyari $x \in R$ üçün ikinci törəməsi $|x|$ -ə bərabər olan funksiyanı tapın.

98. Tənliyi həll edin: $(x+z)^x = \overline{xyz}$.

99. $f(x) = \frac{3x^{2-1}}{x^3 - x + 2}$, $g(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x + 1}$ funksiyalarının

qrafikləri və $x=2$, $x=3$ düz xətləri arasındakı fiqurun sahəsini tapın.

100. Bütün $x \in R$ üçün $f(2x+1) = f(x)$ bərabərliyinin ödənildiyi bütün kəsilməyən f funksiyalarını tapın.

101. Bərabərsizliyi isbat edin: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^4}{n^6} < e^2$

102. İnteqralı hesablayın: $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 5x + 6)^2}$

103. Cədvəldən istifadə etmədən bərabərsizliyi isbat edin:

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}.$$

104. Ardıcılığın limitini tapın: $n!n^{-n}$.

105. Bərabərsizliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} x^5+x^4-x^2-2x+1>0 \\ x^3+x^2+x-2>0 \\ x(x^2-1)(x^3-1)>0 \end{cases}$$

$$106. \text{ Tənliklər sistemini həll edin: } \begin{cases} \frac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=a \\ \frac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=b \end{cases}$$

a, b - verilmiş ədədlərdir.

107. Müsbət ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş və $x^2y''+2xy'+1=0$ diferensial tənliyini ödəyən bütün f funksiyalarını tapın, burada $y=f(x)$.

$$108. \text{ Tənliyi həll edin: } \log_{12}(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})=\frac{1}{2}\log_9 x.$$

$$109. \text{ Tənliyi həll edin: } \sum_{i=0}^{n-1} x_i = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2.$$

110. $(0;+\infty)$ aralığında $y''=\frac{1}{x}y'+x^3-\frac{1}{x}$ tənliyini ödəyən bütün y funksiyalarını tapın.

$$111. \text{ Bərabərsizliyi isbat edin: } \int_0^1 \frac{x}{\cos x} dx < \ln 2.$$

112. $y=x^n$ funksiyasının qrafikinin iki nöqtəsindən $[x\in(0;1)]$ absis oxuna paralel düz xətlər çəkilmişdir. Verilmiş qrafiklə, çəkilən düz xətlərlə və $x=0$, $x=1$ düz xətləri ilə əhatə olunmuş əyrixətli üçbucaqların sahələri cəmi hansı nöqtədə ən kiçik olar?

113. Ciddi artan və diferensiallanan $y=f(x)$ funksiyasının qrafikinin nöqtələrindən $[x < (a; b)]$ absis oxuna paralel düz xətlər keçirilmişdir. Verilmiş qrafiklə, çəkilmiş düz xətlərlə və $x=a$, $x=b$ düz xətləri ilə əhatə olunmuş əyrixətli üçbucaqların sahələri cəmi hansı nöqtədə ən kiçik olar.

114. Eyniliyi isbat edin: $\sin^2 2x + \frac{1}{2} \cos 4x + 2 \sin^2 x + \cos 2x = \frac{3}{2}$.

115. Funksiyanın ibtidai funksiyasını tapın: $f(x) = \frac{\sin 5x}{\cos^2 x}$.

116. $f(x) = \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ funksiyasının tək olduğunu isbat edin.

117. Tənliyi həll edin:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_8^2 + \frac{4}{9} - (x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_7 x_8 + x_8) = 0.$$

118. $a + b + c = 1$ şərt ilə bərabərsizliyi isbat edin:

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}.$$

Törəmənin tətbiqi ilə ifadələri sadələşdirmək və vuruqlarına ayırmaq olar. Buna nümunələr göstərək (119-123).

119. İfadəni vuruqlarına ayırın: $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$.

120. İfadəni vuruqlarına ayırın: $((a-c)^2 + (b-d)^2)(a^2 + b^2) - (ad - bc)^2$.

121. İfadəni vuruqlarına ayırın:

$$\cos^2 x + \cos^2(x+y) - 2 \cos x \cos y \cos(x+y).$$

122. İfadəni sadələşdirin: $(a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3$.

123. İfadəni sadələşdirin: $(x+y)^3 + (y+z)^3 + (z+x)^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x)$.

124. Limiti hesablayın: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right)$.

125. Bərabərsizliyi isbat edin: $\int_0^1 \frac{\arctg x}{\sin x} dx > \frac{8}{9}$

126. Tənliyi həll edin: $(x+2)^2 + (x+3)^3 + (x+4)^4 = 2$.

127. Müsbət ədədlər çoxluğunda $f(x) = \frac{1}{x(1+x^3)^n}$ ($n \in N$)

funksiyasının ibtidai funksiyasını tapın.

128. Tənliyi həll edin: $3^{x+2} - 26x = 29$.

129. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 17 = 8x + 4y + 16z \\ 3x - 4y + 12z = 12 \end{cases}.$$

130. Tənliyi həll edin: $\sqrt{x^3 + 24} = 3x + 8 + \sqrt{x^3 + 12}$

131. İntegralı hesablayın: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{2 \cos x + 3 \sin x} dx$.

132. İsbat edin ki, $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx$ funksiyası ixtiyari $x \in R$ üçün müsbətdirsə, onda $a_0 > 0$.

133. İsbat edin ki, $f(x)$ cüt funksiya isə, onda $\int_{-b}^b \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_0^b f(x) dx$.

134. Tənliyi həll edin: $x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$.

135. Tənliklər sistemini həll edin:
$$\begin{cases} x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = 3, \\ x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = 3, \\ x^{2n+2} + y^{2n+2} + z^{2n+2} = 3 \end{cases}$$

136. İntegralı hesablayın: $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{e^x + \alpha(\cos x - \sin x)} dx (\alpha > 0)$.

137. Tənliyin neçə müsbət kökü vardır: $12x^5 + 6x^4 - 4x^3 - x - 34 = 0$.

138. Tənliyi həll edin: $x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = a$

139. Ardıcılığın limitini tapın: $a_n = \int_0^1 x^n (1 + e^{-x}) dx$.

140. Bərabərsizliyi isbat edin:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc} \quad (a, b, c > 0)$$

141. Tənliyi həll edin: $x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$

142. Müsbət x, y, z ədədləri $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ şərtini ödəyir.

İfadənin ən kiçik qiymətini tapın: $p = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$.

143. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} \cos A = \cos(A+x) + \cos(A+y), \\ \sin A = \sin(A+x) + \sin(A+y) \end{cases}$$

144. Bərabərsizliyi isbat edin:

$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1$, burada a, b, c ədədləri $[0;1]$ parçasına daxildir.

145. İsbat edin ki, a, b, c ədədləri $[0;1]$ parçasına daxildirsə, onda

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

146. İsbat edin ki, $0 < a < b$ isə, onda $2ab \ln \frac{b}{a} < b^2 - a^2$.

147. Törəmənin tətbiqilə aşağıdakı bərabərlikləri isbat edin:

$$1) 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$2) 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

148. $\cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) = 1,5$ isə α, β iti bucaqlarını tapın.

149. Bərabərsizliyi isbat edin:

$$\frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta} \leq \frac{1}{2} (ctg^2 \alpha + ctg^2 \beta).$$

150. $\{x_n\}$ ardıcılığı $x_0 = 1$, $x_n = \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + 1}$ münasibətləri ilə

verilir. İsbat edin ki, $x_n < \frac{1}{n}$

151. İsbat edin ki, x, y, z itibucaqılı üçbucağın bucaqlarıdırsa, onda $tg^n x + tg^n y + tg^n z \geq 3\sqrt[3]{3^n}$.

152. Tənliklər sistemini həll edin: $x + y = 5$, $xz + yu = 7$, $xz^2 + yu^2 = 11$, $xz^3 + yu^3 = 19$.

153. Tənliyi həll edin: $5^{3x-2} - 6 \cdot 5^{3x} + 4 \cdot 5^{3x-1} = -645$.

154. Bərabərsizliyi həll edin: $\log_3^{(3x-2)} \leq 4$.

155. Tənliyi həll edin: $\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$.

156. $y = \sqrt{x+1}$ və $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ xətləri ilə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini tapın.

157. Cisim $S(t) = -t^3 + 6t^2 - 5t - 7$ qanunu ilə hərəkət edir. Zamanın hansı anında onun təcili 6 m/san^2 -na bərabər olar? (Məsafə metrə, zaman saniyə ilə ölçülür).

158. a -nın hansı qiymətlərində $\sqrt{x^2 - 10x + 26} \geq \frac{a^2 + 2a - 3}{a^2 + 2a - 8}$ bərabərsizliyi x -in bütün qiymətlərində ödənilir?

159. Bərabərsizliyi həll edin: $\log_{x+2}^{(9x^2+15x-6)} < 2$.

160. Tənliyi həll edin: $8 \cdot 2^{|x|} + 7 \cdot 2^x = 30$.

161. $y = x^2 - 2|x| + 1$ funksiyasının qrafiki və $A\left(-\frac{5}{6}; -\frac{14}{3}\right)$

nöqtəsindən ona çəkilməmiş toxunanlarla əhatə olunmuş fiqurun sahəsini tapın.

162. $x^4 - x^2 - 2x - 1$ və $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ çoxhədlilərinin ortaq köklərini tapın.

163. Tənliyi həll edin: $\sqrt[8]{\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{2} - 2x\right)} = 0$.

164. İsbat edin ki, $\sqrt{5x+1} + \sqrt{6x+1} + \sqrt{1-11x} \leq 3$ bərabərsizliyi onun sol tərəfinin təyin olunduğu x -in bütün qiymətlərində doğrudur.

165. x, y, z -in ixtiyari qiymətlərində $x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 \geq xyz(x+y+z)$ bərabərsizliyin doğru olduğunu isbat edin.

166. İxtiyari a, b, c üçün $abc^2 + bca^2 + cab^2 \leq a^4 + b^4 + c^4$ bərabərsizliyinin doğruluğunu isbat edin.

167. İsbat edin ki, $x + y + z = m$ olarsa, onda $\sqrt{5x+2} + \sqrt{5y+2} + \sqrt{5z+2} \leq \sqrt{15m+18}$

168. İsbat edin ki, $xy + yz + zx = 1$ isə, onda $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$.

169. Tənliyi həll edin: $x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$.

170. İfadəni sadələşdirin:

$$\frac{2 \cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}.$$

171. Bərabərsizliyi isbat edin: $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{8}$.

172. İfadənin qiymətini hesablayın: $\frac{2 \sin 10^\circ + \sin 50^\circ}{2 \sin 80^\circ - \sqrt{3} \sin 50^\circ}$.

173. $2 \sin x + 3 \cos x$ ifadəsi hansı tam qiymətləri ala bilər?

174. Sevinc müəyyən vaxtda kompüterdə 360 səhifə yazmağı nəzərdə tutmuşdur. O, bu vaxtın üçdə birində hər gün nəzərdə tutulandan 4 səhifə az yazmışdır, lakin qalan vaxta gündə 4 səhifə artıq yazaraq işi bir gün tez qurtarmışdır. Əvvəlcə gündə neçə səhifə yazılmışdır?

175. Tənliyi həll edin: $\frac{3 \cos 2x}{1 - \sin 2x} - \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1} = 4$.

176. Tənliklər sistemini həll edin:
$$\begin{cases} 2 \cdot 5^{1-y} = \log_3^{(x-2)} \\ 5^y + \log_3^x = 4 \end{cases}$$

$$177. \text{ Tənliklər sistemini həll edin: } \begin{cases} \frac{xy}{2} + \frac{5}{2x+y-xy} = 5 \\ 2x+y + \frac{10}{xy} = 4+xy \end{cases}$$

178. $y = \log_2 x$ və $y = 5 - \log_2(x+4)$ funksiyaların qrafiklərinin kəsişmə nöqtəsinin ordinatını tapın.

179. $(2^x - 3)(3x - 4) \leq 0$ bərabərsizliyini həll edin və 1,5 ədədinin onun həlli olub-olmadığını müəyyənləşdirin.

180. $y = 5 - \ln(3x - 5) + 3\sqrt{2x - 3}$ funksiyasının monotonluq aralığını və ekstremumunu tapın.

181. $y = \cos^2 x + \sin x + 1$ funksiyasının $[0; \pi]$ parçasına daxil olan bütün böhran nöqtələrini tapın.

182. b parametrinin hər bir qiyməti üçün $(x^2 - 4)(x - b) \geq 0$ bərabərsizliyini həll edin.

183. Tənliyi həll edin: $\lg(x+4) + \lg(2x+3) = \lg(1-2x)$.

184. Tənliyi həll edin: $\sqrt{x^2 - 3x + 4} = 1 - 3x$.

185. Tənliyi həll edin: $\sqrt{x-3} = \sqrt{2-x}$.

186. Tənliyi həll edin: $\sqrt{\log_2 x} = \log_x(1-x)$.

187. Tənliyi həll edin: $\lg \frac{1}{x} = \lg(-x)$.

188. Tənliyi həll edin: $\sqrt{x-3} = \sqrt{3-x}$.

189. Tənliyi həll edin: $\sqrt{\log_2 x} - \sqrt{\log_{0,5} x} = 1$.

190. Tənliyi həll edin:

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} \cdot \log \frac{2x}{5} + \frac{1}{x} \sqrt{10x - 2x^2 - 12} = 0.$$

191. Tənliyi həll edin: $\sqrt{x-5} - \sqrt{2x-1} = x^2 + 3$

192. Tənliyi həll edin: $x^2 + x + \sqrt{x+1} = 2 + \sqrt{2}$.

193. Tənliyi həll edin: $\sqrt{a-|x|} + \sqrt{x-a} = -a$.

194. Tənliyi həll edin: $\log_{\cos x}^{\sin 2x} = 1$.

195. Tənliyi həll edin:

$$\sqrt[4]{x(2-x)} + \sqrt[3]{x^4(2-x)^7(x+3)^3} + \sqrt[6]{(x-2)(x+1)x^2} + \sqrt[5]{(x+2)(x+6)} = 2$$

196. Tənliyi həll edin: $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} = 3$.

197. Tənliyi həll edin: $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x-2} = -1$.

198. Tənliyi həll edin: $\log_{x^4+2x^2+1}^{(x^4+1)} = 1$.

199. Tənliyi həll edin: $\log_2^{(8^x+2^x-1)} = x$.

200. Tənliyi həll edin: $\lg x + \lg(x^3 - x^2 + 1) = \lg(x^4 + x)$.

201. Tənliyi həll edin: $\sqrt{x^3 - x + 1} = \sqrt{1 - x}$.

202. Bərabərsizliyi isbat edin: $\frac{1}{52} < \ln \frac{52}{51} < \frac{1}{51}$.

203. $\frac{2}{201}$ və ya $\ln \frac{101}{100}$ ədədlərindən hansı böyükdür?

204. Bərabərsizliyi isbat edin: $\frac{1}{4} \arcsin 0,8 - \arcsin 0,6 < \frac{1}{3}$.

205. Bərabərsizliklərin doğruluğunu isbat edin: a) $\sin 20^\circ < \frac{7}{20}$;

b) $\sin 20^\circ > \frac{1}{3}$.

206. $x \geq 1$ olduqda isbat edin ki, $e^x \geq ex$.

207. $e^{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{e}$ və ya $\left(\frac{e}{\pi}\right)^e$ böyükdür?

208. Tənliyi həll edin: $\frac{x^2}{3 + \sqrt{9 - x^2}} + \frac{1}{4(3 - \sqrt{9 - x^2})} = 1$.

209. Tənliyi həll edin: $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$.

210. Bərabərsizliyi həll edin: $\log_x^{(x^2-3)} < 0$.

211. Bərabərsizliyi həll edin: $\log_{x+3}^{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)} > 0$.

212. Bərabərsizliyi həll edin: $(x-5)\log_x(2x+1) < 0$.

213. Bərabərsizliyi həll edin: $\log_{2x}^{(2x^2-4x+6)} \leq \log_{2x}^{(x^2+x)}$.

214. Bərabərsizliyi həll edin: $\log_{7-x}^{(x^2-5x+6)} - \log_{7-x}^{(2x-4)} > 0$.

215. Bərabərsizliyi həll edin: $\frac{\log_x^{(x-3)} - \log_x^{(9-x)}}{\log_{x-1}^x} < 0$.

216. Bərabərsizliyi həll edin: $\log_{\frac{x}{x+1}} \cdot \log_{x-2}^{(x^2+1)} \leq 0$.

217. Bərabərsizliyi həll edin: $\log_x^{(x-1)} - \log_{x+1}^{(x-1)} < 0$.

218. Bərabərsizliyi həll edin: $\frac{1}{\log_{\frac{1}{12}}^{(2x^2-1)}} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{4}} x} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} x}$.

219. Bərabərsizliyi həll edin: $x^x \leq x^{3x-1}$

220. Bərabərsizliyi həll edin: $\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2} > \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x-2}$

221. Bərabərsizliyi həll edin: $\frac{(x+2)\lg x}{2^x - 4} < 0$

222. Bərabərsizliyi həll edin: $\frac{\log_{0,3}^{(x-1)} \cdot \log_{x-1}^{x^2}}{3^{x^2} - 27^x} \geq 0$

223. Bərabərsizliyi həll edin: $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{x^2-2} \geq \frac{3}{\pi}$

224. Tənliyi həll edin:

$$\left(\frac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}}\right)^\pi + (\pi-1)\left(\frac{1}{3-\sqrt{9-x^2}}\right)^{\pi-1} = \pi$$

225. $f(x) = e^{x+3} - 2x + \pi \cos \pi x$ funksiyasının qrafiki $(-3; -7)$ nöqtəsindən keçən ibtidai funksiyasını tapın.

226. $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 7x$ funksiyasının qrafikinə toxunan $y = -x$ düz xəttinə paraleldir. Bu toxunanın tənliyini yazın.

227. Tənliklər sistemini həll edin:
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

228. Tənliklər sistemini həll edin:
$$\begin{cases} 2x^3 + 2y^3 + z^3 = 3 \\ x^6 + y^6 + z^6 = 1 \end{cases}$$

229. Tənliklər sistemini həll edin:
$$\begin{cases} 25x^{12} + 16y^8 + 9z^4 = 1 \\ x^6 + y^4 + z^2 = \frac{7}{15} \end{cases}$$

230. Tənliklər sistemini həll edin:
$$\begin{cases} 4x^2y^2 + 4y^2z^2 + x^2z^2 = 9x^2y^2z^2 \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \\ 3x - 6y + \sqrt{3}z = 2 \end{cases}$$

231. Tənliklər sistemini həll edin:
$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+3)^2 = -(y+3)(x+z-2) \\ x^2 + 5x + 9z - 7y - 21 = -3yz \\ 8x^2 + 18y^2 + 18xy + 18yz = -84x - 72y - 24z - 185 \end{cases}$$

232. Tənliklər sistemini həll edin:
$$\begin{cases} x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = 3 \\ x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = 3 \\ x^{2n+2} + y^{2n+2} + z^{2n+2} = 3 \end{cases}$$

233. Tənliklər sistemini həll edin:
$$\begin{cases} x^4y^2z^2 + x^2y^4z^2 + x^2y^2z^4 = 3x^2y^2z^2 \\ x^4yz + xy^4z + xyz^4 = 3xyz \\ x^6y^2z^2 + x^2y^6z^2 + x^2y^2z^6 = 3x^2y^2z^2 \end{cases}$$

234. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = -3 \\ \sin^3 \frac{x}{2} + \sin^3 \frac{y}{2} + \sin^3 \frac{z}{2} = 3 \\ \cos x(\cos x - 2) + \cos y(\cos y - 2) + \cos z(\cos z - 2) = 9 \end{cases}$$

235. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3} \\ z = x \log_x y \end{cases}$$

236. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 6 \\ 4^x + 4^y + 4^z = 12 \\ x^z + z^y + y^x = 3 \end{cases}$$

237. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} x^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ y^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \\ z^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \end{cases}$$

238. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} x - y = \sin x \\ y - x = \sin y \end{cases}$$

239. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 1+y^7 \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4) = 1+x^7 \end{cases}$$

240. Tənliyi həll edin: $\sqrt[3]{x+24} = x$. Belə tənliyə analogi başqa nümunələr də göstərib onların ümumi şəklini yazın.

241. Fərz edək ki, $f(u)$ funksiyası R -də ciddi monotondur (ciddi artır və ya ciddi azalır). Onda $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$ tənliyi $\alpha(x) = \beta(x)$ tənliyi ilə eynigüclüdür. Bu faktdan (teoremdən) istifadə edərək tənliyi həll edin:

$$\left(\operatorname{arcctg}(x^2 + 1002)\right)^{27} = \left(\operatorname{arcctg}(2004x - 1001)\right)^{27} \quad (1)$$

242. Tənliyi həll edin: $\left(\frac{1}{2}\right)^{3\sqrt{x^3-x-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\sqrt{x^3+x-3}}$

243. Fərz edək ki, $f(u)$ funksiyasının təyin oblastı J aralığıdır və bu funksiya J -də ciddi artandır. Onda $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$ tənliyi ilə

$$\begin{cases} \alpha(x) = \beta(x) \\ \alpha(x) \in J \\ \beta(x) \in J \end{cases} \quad \text{sistemi eynigüclüdür.}$$

Qeyd edək ki, göstərilən sistemdə $\alpha \in J$ və ya $\beta \in J$ şərtlərindən birini atmaq olar. Misallar həllində belə ediləcəkdir. Doğrudan da, hər hansı x_0 ədədi üçün $\alpha(x_0) = \beta(x_0)$ bərabərliyi və şərtlərdən biri məsələn, $\alpha(x_0) \in J$ isə, onda $\alpha(x_0) = \beta(x_0)$ olduğundan ikinci şərt də doğrudur. Bu faktdan (teoremdən) istifadə edərək tənliyi həll edin: $\arccos(x^2 - 8) = \arccos(9x - 26)$ (1)

244. Fərz edək ki, $f(u)$ funksiyası J aralığında ciddi monotondur, onda $\begin{cases} f(\alpha(x)) = f(\beta(x)) \\ \alpha(x) \in J \\ \beta(x) \in J \end{cases}$ və $\begin{cases} \alpha(x) = \beta(x) \\ \alpha(x) \in J' \\ \beta(x) \in J \end{cases}$ sistemləri eynigüclüdür

(Burada J və $f(u)$ funksiyasının varlığının bütün oblastı və ya onun hissəsi ola bilər). Bu faktdan (teoremdən) istifadə edərək tənliyi həll edin:

$$(x^2 + 4x - 3)^{10} + (x^2 + 4x - 3)^{22} = (x + 1)^{10} + (x + 1)^{22} \quad (1).$$

245. Tənliyi həll edin:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\sin x} - (1 + \sin x)^{100} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\cos x} - (1 + \cos x)^{100}$$

246. Tənliyi həll edin: $2[x] = x$

247. Tənliyi həll edin: $3\{x\} = x$

248. Tənliyi həll edin: $\{x\} = 5x + 2$

249. Bərabərsizliyi həll edin: $|[x] - 1| \geq 3$

250. Tənliyi həll edin:

$$|\sin x - 0,5| + |0,5 - \log_2 x| = |\sin x - \log_2 x|$$

251. Koordinat müstəvisində kəsişmə nöqtələrinin sayı 2013-ə bərabər olan $y = x^2 + px + p^2$ şəklində bir neçə müxtəlif parabola təsvir etmək olarmı?

252. $x^2 + px + 100$ kvadrat üçhədlisində p -yə -100 -dən 100 -ə qədər tam qiymətlər verdikdə alınan kvadrat üçhədlilərin kökləri cəmini tapın.

253. $f(x)$ funksiyası həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin olmuşdur və $x \in R$ -in bütün qiymətlərində $2f(x) + f(1-x) = x^2$ (1) şərtini ödəyir. $f(x)$ -i tapın.

254. $y = 4x^2 - 6x + 5$, $x \in [-1; 3]$ funksiyasının qiymətlər çoxluğunu tapın.

255. Funksiyanın qiymətlər çoxluğunu tapın: $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x - 2}$

256. Tənliyi həll edin: $\sqrt[5]{1 + \sqrt{1 - x^2}} + \sqrt[5]{1 - \sqrt{1 - x^2}} = 2$

257. Funksiyanın dəyişmə oblastını tapın:

$$f(x) = \arctg 1 + \arctg \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \arctg(1 + 2x)$$

258. a -nın hansı qiymətlərində $4\sin^3 x = a - 7\cos 2x$ tənliyinin kökü yoxdur?

259. $\cos 7x - \sqrt{3} \sin 7x + \sqrt{2} = 0$ tənliyinin $\left(\frac{2\pi}{5}; \frac{6\pi}{7} \right)$

intervalına daxil olan köklərini tapın.

260. Tənliyi həll edin: $\sin x + \cos x = \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \sqrt{2}$.

261. 72-ci şəkildəki qrafiklərdən hansı $y = \left(\frac{1}{3} \right)^x$ funksiyasının təsviridir?

262. Funksiya qrafikilə verilir (Şəkil 73). Bu funksiyanın qiymətlər çoxluğunu göstərin.

263. 74-cü şəkildə $[-4; 8]$ parçasında təyin olmuş funksiyanın qrafiki təsvir olunmuşdur. Bu parçada funksiya neçə aralıqda azalır?

264. $y = 3 \ln x + 5,2$ funksiyaının qrafikinə absisi $x_0 = 6$ nöqtəsində toxunanın bucaq əmsalını tapın.

265. $y=f(x)$ funksiyaına (2; 5) nöqtəsində çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalı 3-ə bərabərdir. $f'(2)$ -ni tapın.

266. M nöqtəsində $f(x) = 3x^2 + 15x + 2$ funksiyaının qrafikinə toxunan absis oxuna paraleldir. M nöqtəsinin absisini tapın.

267. $y = \sqrt[3]{x^2} + 2$ funksiyaının qrafikinə toxunan $y - 2x + 1 = 0$ düz xəttinə paraleldir. Toxunma nöqtəsinin absisini tapın.

268. Yan üzlərindən birinin perimetri p-yə bərabər olan düzgün dördbucaqlı piramidalardan həcmi ən böyük olanı tapın.

269. Maddi nöqtənin düz xətt üzərində hərəkətində zamanın t anındakı koordinatı $x(t) = t^2 + e^{2-t}$ -dir. Zamanın $t=2$ anında bu nöqtənin sürətini tapın.

270. $y = \sqrt{\frac{\sqrt[4]{x-5}}{14x-48-x^2}}$ funksiyaının təyin oblastına neçə tam ədəd daxildir?

271. İki məntəqə arasındakı məsafəni getməyə piyada motosikletçidən 4 saat 30 dəqiqə çox vaxt sərf etmişdir. Motosikletçinin sürəti 40 km/saatdır, piyadanın sürəti isə bunun $\frac{1}{10}$ -dir. Məntəqələr arasındakı məsafəni tapın.

272. Velosipedçi bütün yolu müəyyən sürətlə 2 saata getməlidir. Lakin o, nəzərdə tutulan sürəti 3 km/saat artıraraq bütün yola $1\frac{2}{3}$ saat sərf edir. Yolun uzunluğunu tapın.

273. Avtobus yolun $\frac{5}{6}$ -ni 50 km/ saat sürətlə getdikdən sonra 3 dəqiqə dayanmışdır. Mənzilə vaxtında çatmaq üçün qalan yolu 60 km/saat sürətlə davam etmişdir. Avtobusun getdiyi yolun uzunluğunu tapın.

274. Zaqataladan Bakıya sürəti 70 km/saat olan maşın çıxır. 1 saat 40 dəqiqədən sonra Bakıdan Zaqatalaya 60 km/saat sürətlə avtobus yola düşür. Şəhərlər arasındakı məsafə 420 km olarsa, maşın Zaqataladan çıxandan neçə saat sonra görüş olar?

275. A məntəqəsindən B-yə 40 km/saat sürətlə avtobus yola düşür və 30 km

getdikdən sonra yenə A-dan 60 km/saat sürətlə maşın çıxır. Maşın B məntəqəsinə avtobusdan $\frac{1}{12}$ saat gec çatır. Məntəqələr arasındakı məsafəni tapın.

276. Təyyarə külək istiqamətində 5,5 saat və əksinə 6 saat sürətini və küləyin istiqaməti dəyişmədən uçuş. Təyyarənin öz sürəti 690 km/saat olarsa, onun hər iki istiqamətdə uçduğu məsafəni tapın.

277. Öz sürəti 15 km/saat olan qayıq bir körpüdən digərinə çayın axma istiqamətində 60 km getmiş və geriye qayıtmışdır. Həmin müddətdə katerdən kənara atılmış xilasedici halqa 25 km üzmüşdür. Katerin axınının əks istiqamətindəki hərəkət müddətini tapın.

278. Maşın buraxmaq üzrə sifarişi zavod 20 günə yerinə yetirməlidir. Lakin zavod gündə plandan əlavə 2 maşın buraxmaqla sifarişi 18 günə ödəmişdir. Zavod neçə maşın buraxmışdır?

279. Bir boru hovuz 1m³ suyu digərindən 4 dəqiqə tez vurur. 5 saatda ikinci boru birincidən 100m³ az su vurursa, o bu müddətdə hovuz nə qədər su vurur?

280. İki nəfər tərcüməçi bir əlyazmasını tərcümə etmişdir. İlk 2 saatda birinci tərcüməçi işləmişdir, sonra 6 saat onlar birlikdə işləmişlər. Bu müddətdə əlyazmasının 80%-i tərcümə olunmuşdur. Həmin işi bütövlükdə yerinə yetirmək üçün birinciyə ikincidən 4 saat az vaxt lazımdırsa, birinci tərcüməçi işin hamısını neçə saatda qurtara bilər?

281. Əmanət kassasına qoyulan 2000 m hər il eyni faiz qədər artaraq 2 ilin sonunda 2420 manat olmuşdur. Banka qoyulan əmanət hər il neçə faiz artırılmışdır?

282. 60%-i gümüş olan 300q gəməş və mis ərintisi, 80%-i gümüş olan 900q belə ərinti ilə əridilərək qatışdırılmışdır. Alınmış yeni ərintidə neçə faiz gümüş vardır?

283. Spirtlə suyun qarışığında spirt sudan 4 dəfə azdır. Bu qarışıq 20 l su əlavə etdikdən sonra spirt 12% olan qarışıq alındı. Əvvəlcə qarışıqda nə qədər su vardır?

284. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 22y + 122} = 2\sqrt{37} - \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2} \\ \log_{(x+1)}^4 + \log_y^4 = 0 \end{cases}$$

285. $f(x) = -x + 5 + 3\ln(x + 2)$ funksiyasının qrafikinə toxunan absis oxuna paraleldir. Toxunma nöqtəsinin korrdinatlarını tapın.

286. Tənliyi həll edin: $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} - \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = 2$

287. Tənliyi həll edin: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots - \frac{1}{1024} = \frac{x+1}{512}$

288. $y = \lg(4x^2 - 3x - 10)$ funksiyasının törəməsi mənfi olmadıqda, x -in ən kiçik tam qiymətini tapın.

289. $y = \frac{16}{x}$ funksiyasının qrafikinə $y = 15x + 8$ düz xətti ilə kəsişmə nöqtəsində iki toxunan çəkilmişdir. Bu toxunanların kəsişmə nöqtəsinin absisini tapın.

290. a parametrinin hansı qiymətlərində $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 3ax + 2,3$ funksiyası bütün ədəd oxunda artır?

291. Tənliyi həll edin:

$$\frac{10}{x+10} + \frac{10 \cdot 9}{(x+10)(x+9)} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{(x+10)(x+9)(x+8)} + \dots + \frac{10 \cdot 9 \dots 2 \cdot 1}{(x+10)(x+9) \dots (x+1)} = 11$$

292. Hesablayın: $M = \sqrt{\underbrace{444\dots4}_{200} - \underbrace{888\dots8}_{100}}$

293. Eyniliyi isbat edin: $1 + 2 \cos 7x = \frac{\sin 10,5x}{\sin 3,5x}$.

294. α, β, γ iti bucaqları elədir ki, $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 1$. $tg^2 \alpha + tg^2 \beta + tg^2 \gamma \geq \frac{3}{8}$ bərabərsizliyi isbat edin.

295. Tənliyi həll edin: $x^3 + 6 = 7\sqrt[3]{7x - 6}$

296. Nihad verilmiş üçrəqəmli ədədi 2 əsasdan loqarifmalayıb alınan ədəddən hər hansı natural ədədi çıxıb fərqi də bu ədədə böldü. Asəf isə həmin üçrəqəmli ədədi 3 əsasdan loqarifmasını alıb, digər iki əməliyyatı əvvəlki kimi apardı. Nəticədə məlum oldu ki, onlar qarşılıqlı tərs ədədlər almışlar. Üçrəqəmli ədədi tapın.

297. Tənliyin dərəcə ilə ən kiçik müsbət kökünü tapın:
 $\operatorname{tg}(85^0 + x) + \operatorname{tg}(5^0 - x) = 2$.

298. a parametrinin, $27x^3 - 27ax^2 + 62,5 = 0$ tənliyinin üç müxtəlif kökü olduğu, ən kiçik tam qiymətini tapın.

299. Dövrü 3-ə bərabər olan $y=f(x)$ funksiyası həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin olunmuşdur. $f(2)=5$ olduğu məlumdur. $2f(8)-3f(-4)$ ifadəsinin qiymətini tapın.

300. a -nın hansı qiymətlərində $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 2a \sin 2y + \cos 2y$ tənliyini ödəyən $(x; y)$ həqiqi ədədlər cütü vardır?

301. Tənliyi həll edin: $\log_2(x-2)^4 - \log_2|x-2| - 9 = 0$.

302. a parametrinin hansı qiymətlərində $2\cos^2 2x = (a+1)\cos 2x$ tənliyinin $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ parçasında üç kökü vardır?

303. $f(x) = x^3$ funksiyasının yuxarıdan və aşağıdan qabarıqlığı intervallarını tapın.

304. İnteqralları hesablayın:

$$1) \int e^{\sin x} \cos x dx; \quad 7)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a}};$$

$$2) \int x \cos x^2 dx; \quad 8)$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx;$$

$$3) \int \frac{dx}{2 + \sqrt{x}}; \quad 9)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad a > 0;$$

$$4) \int (5x + 3)^8 dx; \quad 10)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}, \quad a \neq 0;$$

$$5) \int \frac{dx}{(x+a)^k}; \quad 11)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2}, a \neq 0 \quad 6) \int \frac{xdx}{x^2 + a}; \quad 12)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}, a \neq 0 \quad 13)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}; a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0 \quad 14)$$

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}; \alpha, a \neq 0 \quad 15)$$

$$\frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}; \alpha, a \neq 0 \quad 16)$$

$$\int \frac{3x+4}{x^2+3x+5} dx; \quad 17)$$

$$\int \frac{4x-5}{\sqrt{x-x^2}}; \quad 18)$$

$$\int \ln x dx; \quad 19)$$

$$\int x \cos x dx; \quad 20)$$

$$\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$$

304. Müəyyən inteqralın həndəsi mənasından istifadə edərək

$$\int_{0,5}^2 \sqrt{2x-x^2} dx \text{ -ni hesablayın.}$$

305. Oturacağının radiusu R -ə və hündürlüyü H -a bərabər konus formada sıxlığı d olan qum topasını dağıtmağa sərf olunan işi hesablayın.

306. Qayığın öz hərəkəti onun sürətilə mütənasib olan suyun müqavimət qüvvəsilə azalır. Qayığın başlanğıc sürəti 10 m/san-dir, 5

saniyədən sonra isə onun sürəti 8 m/san olur. Nə vaxt sürət 1 m/san -ə qədər azalır?

307. R radiuslu dairədə α radian mərkəzi bucağa uyğun sektorun sahəsini tapın. $\alpha = \pi$, $R = 2 \text{ sm}$ olarsa sektorun sahəsini hesablayın.

$$308. \quad f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x < -1 \text{ olduqda,} \\ 4, & -1 \leq x \leq 2 \text{ olduqda,} \\ 2x - 1, & x > 2 \text{ olduqda} \end{cases} \quad \text{funksiyası verilir.}$$

$f(-5)$ -i tapın.

309. $y = \frac{4}{x^2 + 2x + 3}$ funksiyasının qiymətlər çoxluğunu və ən böyük qiymətini tapın.

$$310. \quad \sin \frac{5\pi}{3} \cdot \cos \frac{5\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} \cdot \operatorname{ctg} 3 \text{ ifadəsinin işarəsini təyin edin.}$$

311. $f(x)$ funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunmuş cüt funksiyadır. $f(3) < f(4)$ olduğu məlumdur, $f(-3)$ və $f(-4)$ -ü müqayisə edin.

312. $f(x)$ funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunmuş, dövrü funksiyadır. əsas dövrü $T=4$ və $f(2)=3$ olarsa $f(14)$ -ü tapın.

$$313. \quad f(x) = \{x\} \text{ funksiyasının ən kiçik müsbət dövrünü tapın.}$$

$$314. \quad f\left(\frac{x+1}{2}\right) = x + 2 \text{ olarsa, } f(x) \text{-i tapın.}$$

315. a parametrinin hansı qiymətində $y = ax^2 - 4x + 5$ funksiyası $(-\infty; 1]$ aralığında azalan, $[1; \infty)$ aralığında artandır.

316. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ funksiyasının işarə sabitliyi aralıqlarını tapın.

317. $y = \sqrt{|x|} - 1$ funksiyasının qrafikini qurun və qrafik əsasında onun işarə sabitliyi aralığını, artma və azalma aralıqlarını göstərin.

318. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 9}$ funksiyasının ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

319. Sektorun qövsünün uzunluğu onun perimetrindən 2 dəfə kiçikdir. Uyğun mərkəzi bucaq neçə radiandır?

320. $A\left(\frac{\pi}{6}; m\right)$ nöqtəsinin $y = 2 \sin 3x$ funksiyasının qrafiki üzərində yerləşdiyini bilərək, m -i tapın.

321. $y = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ funksiyasının ən kiçik müsbət dövrünü tapın.

322. $y = \sin 4t$ və $y = 3 \sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$ harmonik rəqslərinin cəmini tapın.

323. İsbat edin ki, $f(x) = x^2 + 1$, $x \geq 0$ funksiyasının verilmiş aralıqda tərsi var. Tərs funksiyanı tapın, onun təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu göstərin, habelə qrafikini qurun.

324. İsbat edin ki, $\arctg \alpha + \arctg \beta + \arctg \gamma = \pi$ isə, onda $\alpha + \beta + \gamma = \alpha\beta\gamma$

325. $\arccos(-0,4)$ ilə $\arccos 0,4$ ədədlərini müqayisə edin.

326. Hesablayın: $\cos\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8}\right)$.

327. Bərabərsizliyi həll edin: $\operatorname{ctg}^2 x - (\sqrt{3} - 1) \operatorname{ctg} x - \sqrt{3} < 0$.

328. $z_1 = 4i$ və $z_2 = i - 3$ olduqda $\left(\frac{z_1 + z_2}{3z_1}\right)^6$ -nı tapın.

329. Qoşmasının kvadratına bərabər olan kompleks ədədi tapın.

330. Kompleks müstəvidə $z_1 = 6 + 8i$, $z_2 = 4 - 3i$ ədədlərinə uyğun olan M_1 və M_2 nöqtələri qeyd olunmuşdur. $\vec{OM}_1$ və $\vec{OM}_2$ vektorları arasındakı bucağın tənböləni üzərindəki nöqtələrə uyğun kompleks ədədləri tapın.

331. Polyar koordinatları 4 və $\frac{\pi}{6}$ olan nöqtənin Dekart koordinatlarını tapın.

332. $\operatorname{arcs} z = \frac{\pi}{4}$ və $|z-1|=1$ şərtlərini ödəyən kompleks ədədi tapın.

333. $\sqrt[3]{i}$ ifadəsinin bütün qiymətlərini tapın.

334. Kökləri $x_1 = -1$ və $x_2 = 3 + 4i$ olan həqiqi əmsallı ən kiçik dərəcəli tənlik qurun.

335. Affiksləri üç z_1, z_2, z_3 kompleks ədədlər olan M_1, M_2, M_3 nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşir. $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2}$ nisbətinin həqiqi ədəd olduğunu isbat edin.

336. İsbat edin ki: $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$ (Eyler düsturları).

337. Cəbri şəkildə verilmiş $a + bi$ kompleks ədədin kvadrat kökünü hesablamaq üçün olan düsturun çıxarılışını göstərin.

338. $|z - 1 - i| \leq 4$ şərtini ödəyən kompleks ədədi təsvir edən nöqtələr harada yerləşir?

339. Limiti hesablayın: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3-x} - 1}{4-2x}$

340. Limiti hesablayın: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x}{\operatorname{tg} 5x}$

341. Limiti hesablayın: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{x+3}$

342. a -nın hansı qiymətində $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 6x}{x-3}, & x < 3 \text{ olduqda,} \\ ax + 2, & x \geq 3 \text{ olduqda} \end{cases}$

funksiyası $x = 3$ nöqtəsində kəsilməzdir?

343. İsbat edin ki, $x^3 + 4x + 3 = 0$ tənliyinin $[-1; 0]$ parçasında kökü var. Bu kökü 0,1 dəqiqliklə tapın.

344. $f(x) = 2^x$ funksiyanın qrafikini, absisləri $x_1 = 0$ və $x_2 = 1$ olan nöqtələrdə kəsən düz xəttin bucaq əmsalını tapın.

345. $f(x) = |x - 1|$ funksiyanın $x \neq 1$ olduqda törəməsini tapın. $x=1$ nöqtəsində bu funksiya diferensiallanandırımı?

346. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının hər birinin x_0 nöqtəsində törəməsi yoxdursa, $f(x) + g(x)$ cəmi x_0 nöqtəsində diferensiallanan ola bilərmi?

347. $y = f(x)$ funksiyanın törəməsi yalnız müsbət qiymətlər alırsa, onun tərs funksiyanın törəməsi mənfi qiymətlər ala bilərmi?

348. $f(x) = \sin 2x - \sqrt{2}x$ olduqda $f'(x) = 0$ tənliyini və $f'(x) < 0$ bərabərsizliyini həll edin.

349. Funksiyanın törəməsini tapın:

1) $y = \arcsin(\sin x)$;

2) $y = 2^{\cos 2x}$;

3) $y = \sqrt{\log_7 x}$.

350. $y = 12 - x$ və $y = 4\sqrt{x}$ funksiyalarının qrafikləri hansı bucaq altında kəsişirlər?

351. İsbat edin ki, $y = 3\sin 2x$ funksiyası $y'' - 4y = 0$ tənliyini ödəyir.

352. Cisim ox ətrafında $\varphi(t) = 1,5t^2 - 2t + 1$ (rad) qanunun ilə fırlanır. Zamanın $t=5$ san. anı üçün $\omega(t)$ bucaq sürətini tapın.

353. $\cos 61^\circ$ ifadəsinin təqribi qiymətini hesablayın.

354. Naqildən keçən elektrik yükünün miqdarı $q(t) = t + \frac{2}{t}$ düsturu ilə verilsə, t zamanının hansı anında cərəyan şiddəti sıfıra bərabər olar?

355. İsbat edin ki, $x^4 - 4x - 1 = 0$ tənliyinin $[-1; 0]$ parçasında yeganə kökü var.

356. $f(x) = \sin x + \cos x$ funksiyasının $[0; \pi]$ parçasında ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

357. $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$ funksiyasını araşdırın və qrafikini qurun.

358. Radiusu $R=3\text{sm}$ olan yarım kürə daxilinə təpəsi yarımkürənin mərkəzində olan konus çəkilmişdir. Konusun həcmnin ən böyük qiymətini tapın.

359. $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ funksiyasının qrafikinə uyğun nöqtələri

(absisləri eyni olan) arasındakı məsafə $\frac{\pi}{2}$ -yə bərabər olan iki ibtidai funksiyasını tapın.

360. Düzxətli hərəkət edən maddi nöqtənin sürəti $v(t) = 2t - 3$ düsturu ilə verilir. $t = 0$ başlanğıc anında nöqtənin koordinat başlanğıcında olduğunu bilərək onun x koordinatını t zamanının funksiyası kimi tapın.

361. $y = c_1(x - c_2)^2$ parabolalar ailəsinin diferensial tənliyini tapın.

362. $y = 3\sin x - 4\cos x$ funksiyası $y'' + y = 0$ diferensial tənliyinin həllidirmi?

363. $x^2 - xy + y^2 = c^2$ ifadəsinin $(x - 2y)y' = 2x - y$ diferensial tənliyinin inteqralı olduğunu isbat edin.

364. $x(t) = \frac{1}{3}\sin\left(0,4t + \frac{\pi}{4}\right)$ harmonik rəqsinin diferensial tənliyini yazın.

365. $y'' + 9y = 0$ tənliyinin $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapın.

366. Cismnin temperaturu 200°S -dir. Temperaturu 0°S olan havada 10 dəq. soyudulduqdan sonra onun temperaturu 100°S oldu. Cismnin $T(t)$ temperaturunun $T'(t) = -k(T - T_1)$ (burada T_1 -ətraf mühitin temperaturudur) tənliyini ödəyən qanun üzrə dəyişdiyini bilərək, neçə dəqiqədə sonra temperaturunun 50°S olduğunu tapın.

367. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$ xətləri ilə hüdudlanmış əyrixətli trapesiyanın sahəsini tapın.

$$368. F(x) = \int_0^x \frac{t^2 - t}{1 + t^2} dt \text{ düsturu ilə verilən funksiyanın ekstremum}$$

nöqtələrini tapın.

369. Kütləsi 5 kq olan maddi nöqtə düz xətt boyunca $F(t) = 6t - \frac{2}{t^3}$ qüvvəsinin təsiri altında hərəkət edir. $t=1$ san. anında

sürətin $v_0 = 3m/san$ olduğunu bilərək 2 saniyədən 5 saniyəyədək zaman müddətində cismin getdiyi yolu tapın.

370. İstənilən $A \subset u$ və $B \subset u$ çoxluqları üçün $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ xassələrinin ödənildiyini isbat edin. (Bu xassələr De Morqan qanunları adlanır).

371. A və B çoxluqları universal u çoxluğunun kəsişən alt çoxluqları olduqda 1) $A \cap B'$; 2) $A \cup B'$; 3) $(A \cup B)'$; 4) $(A \cap B)'$; 5) $A' \cup B'$ və 6) $A' \cap B'$ çoxluqlarını Eyler-Venn diaqramlarının köməyi ilə təsvir edin və onlar arasında bərabər olanları göstərin.

372. İstənilən A, B, C çoxluqları üçün $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$ eyniliyini isbat edin.

373. A, B universal u çoxluğunun alt çoxluğudursa $(A/B)' = A' \cup (A \cap B)$ eyniliyini isbat edin.

374. İfadəni sadələşdirin: $(A \cap B) \cap (B' \cap A)$.

375. Rənglənmiş hissələrin çoxluq cəbri ifadəsini yazın (Şəkil 92).

376. $n(A \cup B \cup C) = 30$, $n(A \cap B) = 22$ və $n(C) = 10$ olduğu məlumdur. $n[(A \cup B) \setminus C]$ - tapın.

377. Eyniliyi isbat edin: $A \Delta B = A' \Delta B'$, burada Δ ilə göstərilən çoxluqların simmetrik fərqi işarə edilmişdir.

378. Rənglənmiş hissələrin çoxluq cəbri ifadəsini yazın (Şəkil 95).

379. İsbat edin ki, həqiqi ədədlər çoxluğu rəşional və irrasional ədəd çoxluğundan ibarət iki sinifə ayrılır.

380. İlk 200 natural ədədlər içərisində 3, 5 və 7 rəqəmlərinin heç birinə bölünməyən neçə ədəd vardır?

381. Məktəbin X-XI siniflərində oxuyan 150 şagirdin 90 nəfəri riyaziyyat, 80 nəfəri fizika, 40 nəfəri isə həm riyaziyyat, həm də fizika

dərnəyinə yazılmışdır. Şagirdlərin neçə nəfəri bu dərnəklərin heç birində iştirak etmir?

382. İsbat edin ki, istənilən sonlu A, B, C çoxluqları üçün $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

383. 4, 5, 9 rəqəmlərindən 3-ə bölünən neçə müxtəlif 8 rəqəmli ədəd düzəltmək olar?

384. 1, 2, 3, 4 və 5 rəqəmlərindən rəqəmləri təkrarlanmamaqla düzəldilən bütün 3 rəqəmli ədədlərin cəmini tapın.

385. Məxrəci 93 olan neçə ixtisar olunmayan düzgün kəsir vardır?

386. $\{1, 2, \dots, 2n\}$ çoxluğunda cüt ədədlər yalnız cüt nömrəli yerlərdə olmaqla bütün mümkün permutasiyaların sayını tapın.

387. $\{1, 2, \dots, n\}$ çoxluğunun verilmiş iki elementi yanaşı olmayan neçə permutasiyası vardır.

388. Tənliyi həll edin: $n! = 362880$

389. 1, 2, 3, 4, 5, 6 rəqəmlərindən rəqəmləri təkrarlanmayan və 3-ə bölünməyən neçə üçrəqəmli ədəd düzəltmək olar?

390. 0-dan fərqli bütün rəqəmlərdən 1000-dən kiçik və rəqəmləri təkrarlanmayan neçə müxtəlif natural ədəd düzəltmək olar?

391. Toplantıda 7 oğlan və 3 qız vardır.

1) 3 qız yanaşı olduqda;

2) kənarlarda oğlanlar olmaqla, qızlar yanaşı olmadıqda, onlar neçə müxtəlif üsulla sıraya düzülə bilər?

392. $f(x) = A_{7-x}^{x-3}$, $x \in N$ funksiyasının qiymətlər oblastını tapın.

393. 6 nar və 5 almadan, hərəsində ən azı bir alma olmaqla, 3 meyvədən ibarət neçə müxtəlif hədiyyə hazırlamaq olar?

394. $\{1, 3, 4, 6, 8, 9\}$ çoxluğunun elementlərindən rəqəmləri təkrarlanmayan neçə üçrəqəmli ədəd düzəltmək olar? Bu ədədlərdən neçəsi 500-dən kiçik, neçəsi 700-dən böyükdür?

395. Qutuda 8 ağ və 6 qırmızı kürəcik var. Aşağıdakı halların hər birində 5 kürəciyin seçilməsi üsullarının sayını tapın.

1) Kürəciklər istənilən rəngdə ola bilər;

2) Onların 3-ü ağ, 2-si qırmızı olsun;

3) Onların 5-i də ağ olsun;

4) Onlar eynirəngli olsun.

396. $f(x) = C_{x+1}^{2x-8}$ funksiyasının qiymətlər oblastını tapın.

397. Elektromontyor ardıcıl nömrəli 15 sayğacdən 10-nu təzə bina-nın mənzillərində quraşdırmalıdır.

1) Montyorun neçə seçmə imkanı var?

Aşağıdakı halların hər birində onun neçə seçmə imkanı var?

2) O, ilk iki sayğacı və qalanlarını quraşdırmalıdırsa;

3) O, ya birinci, ya da ikinci sayğacı və qalanlarını quraşdırmalıdırsa;

4) O, ilk 5 sayğacdən 3-nü və qalanlarını quraşdırmalıdırsa;

5) O, ilk 5 sayğacın ən azı 3-nü və qalanlarını quraşdırmalıdırsa;

6) O, son 5 sayğacdən ən çoxu 3-nü və qalanlarını quraşdırmalıdırsa.

398. 12 müxtəlif informasiyanı 4 kompüterlə:

1) hər kompüter 3 informasiya almaqla;

2) Kompüterlərdən biri 6, qalanlarının hər biri 2 informasiya almaqla;

3) Kompüterlərdən hansısa 6, qalanları 2 informasiya almaqla, neçə müxtəlif üsulla almaq olar?

399. Müstəvidə l_1 düz xətt üzərində n nöqtə və ona paralel l_2 düz xətt üzərində m nöqtə verilmişdir. Təpələri bu nöqtələrdə olan üçbucaqların sayını tapın.

400. $(\sqrt{x} + \sqrt{2})^{18}$ -in ayrılışında x^8 daxil olan həddi tapın.

401. $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^9$ binomunun açılışında tam ədədlər olan hədləri tapın.

402. $(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5})^{124}$ binomunun açılışında neçə hədd tam ədəddir?

403. Çoxhəddlinin ən böyük əmsalını tapın: $(\sqrt{5} + \sqrt{2}x)^{20}$.

404. Çoxhəddlinin əmsallarının cəmini tapın: $\left(3\sqrt{2}x - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^8$.

405. Eyniliyi isbat edin:

$$1) \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2};$$

$$2) \sum_{k=0}^n (k+1)C_n^k = (n+2)2^{n-1}$$

406. $a_n = 6^n + 8^n$ isə, a_{83} -ün 49-a bölünməsindən alınan qalığı tapın.

407. $\sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k}$ cəmini hesablayın.

408. İsbat edin ki, $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in N$, ardıcılığının bütün hədləri üçün $a_n < 3$ bərabərsizliyi ödənilir.

409. $\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^n$ binomunun açılışında üçüncü həddə x -in qüvvətinin əmsalı 31-dir. n -i tapın.

410. $|a| = \sqrt{3}|b|$ olduqda $(a+b)^{50}$ binomunun açılışında mütləq qiymətcə ən böyük olan həddi tapın.

411. $C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^m : C_{n+1}^{m-1} = 5 : 5 : 3$ isə n və m -i tapın.

412. Eyniliyi isbat edin:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = C_{n+1}^2 + 2(C_n^2 + C_{n-1}^2 + \dots + C_2^2)$$

413. a, b, c, d, e və f hərflərindən, 1) a və b hərfləri göstərilən ardıcılıqla daxil olmaqla; 2) a və b hərfləri sıraları ilə fərqlənməklə daxil olmaqla dörd-dörd necə aranjeman düzəltmək olar?

414. Altı a, b, c, d, e və f hərflərindən dörd-dörd: 1) a daxil olan, 2) a ilə başlayan necə aranjeman düzəltmək olar?

415. Qabarıq n bucaqlının diaqonallarının kəsişmə nöqtələri sayını, bu nöqtələrdən üst-üstə düşənlər olmadığını bilərək tapın.

Təkrarlı birləşmələr

Hər hansı çoxluğun n sayda müxtəlif elementlərinin hər birinin yalnız bir dəfə daxil olduğu təkrarsız birləşmələrlə (məsələn, 384-399, 411-415 çalışmaları belə birləşmələrə aiddir) yanaşı eyni bir elementin birdən çox daxil olması mümkün olan təkrarlı birləşmələrə də baxmaq lazım gəlir.

Fərz edək ki, $a, b, c, \dots, e$ elementləri uyğun olaraq $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ dəfə təkrarlanan M çoxluğu verilir. $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = m$ olsun. M

çoxluğunu nizamlanması nəticəsində $a, b, c, \dots, e$ elementləri uyğun olaraq $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ dəfə təkrarlanan m sayda elementi olan permutasiyalar alınır. Həmin permutasionlar təkrarlı permutasiyalar adlanır.

Beləliklə α sayda a, β sayda b, γ sayda c və s. λ sayda e elementlərindən ibarət M çoxluğunun elementlərinin müəyyən qayda ilə hər bir nizamlı düzülüşünə $a, b, c, \dots, e$ elementləri uyğun olaraq $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ dəfə təkrarlanan $a, b, c, \dots, e$ elementlərindən düzəlmiş təkrarlı permutasion deyilir. $m = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda$ ədədinə permutasionun tərtibi deyilir.

Verilmiş elementlərdən düzəlmiş bütün mümkün olan təkrarlı permutasiyaların sayı $\overline{P}_{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda}^{(m)}$ ilə işarə edilir. Burada $m = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda$ bütün elementlərin sayı, $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ isə hər bir elementin təkrarlanması saylarıdır. Məsələn, a, b elementlərinin hər biri 2 dəfə təkrarlanan tərtibi $m = 2 + 2 = 4$ olan təkrarlı permutasiyalar bunlardır:

$aabb, abab, baab, bbaa, baba$.

Teorem 1. Çoxluğun $a, b, c, \dots, e$ elementləri uyğun olaraq $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ dəfə təkrarlanan $a, b, c, \dots, e$ elementlərindən düzəlmiş bütün mümkün müxtəlif təkrarlı permutasiyaların sayı $\frac{(\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda)!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots \lambda!}$ -a

bərabərdir. Yəni, $\overline{P}_{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda}^{(m)} = \frac{(\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda)!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots \lambda!}$, burada $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = m$

Təkrarlı permutasiyalar haqqında verilən nəzəri məlumatı uyğun çalışmalarıla möhkəmləndirmək lazımdır.

416. “Riyaziyyat” sözündən neçə anagram (bir kəlmənin hərfləri ilə başqa söz düzəltmə) düzəltmək olar?

417. 3 ağ və 2 qara dairəni yanaşı qoymaqla neçə naxış düzəltmək olar?

418. 2, 3, 5 rəqəmləri vasitəsilə 2 rəqəmi 3 dəfə, 3 və 5 rəqəmlərinin hər biri isə 2 dəfə təkrarlanmaqla necə yeddi rəqəmli ədəd yazmaq olar?

419. Eyni ölçüdə 10 dairəcik vardır. Bunlardan 3-ü ağ, 2-i qara və 5-i qırmızıdır. Dairəcikləri yanaşı qoymaqla neçə müxtəlif naxış düzəltmək olar?

420. 2, 3, 0, 3, 4, 2, 3 rəqəmləri vasitəsilə neçə müxtəlif yeddirəqəmli ədəd yazmaq olar?

Fərz edək ki, n sayda müxtəlif $a, b, c, \dots, e$ elementləri olan M çoxluğu verilir. Bu elementlərdən hər birində k element olan bütün mümkün olan çoxluqlar düzəldək. Elementləri sayı k olan çoxluğun hər bir elementi verilmiş $a, b, c, \dots, e$ elementlərin birindən ibarətdir. $k > 1$ olduqda k elementli çoxluğun elementlərindən bəziləri bir neçə dəfə təkrarlana (əlbəttə k -dan çox olmamaqla) bilər. Tərtib olunan bu çoxluqların hər biri, verilmiş n elementdən hər birində k element olan təkrarlı kombinasiyon adlanır. Beləliklə, elementlərinin hər biri verilmiş n elementin birindən ibarət olan k elementli hər bir M çoxluğuna verilmiş n elementdən hər birində k element olan təkrarlı kombinasiyon deyilir.

Məsələn, a, b elementlərindən hər birində üç element olan təkrarlı kombinasiyonlar aaa, aab, abb, bbb -dir. a, b, c elementlərindən hər birində iki element olmaqla düzəldilən təkrarlı kombinasiyonlar isə bunlardır: aa, ab, ac, bb, bc, cc . Verilmiş n elementdən hər birində k element olmaqla düzəldilən təkrarlı kombinasiyonlar, təkrarsız kombinasiyonda olduğu kimi, biri birindən ona daxil olan elementlərlə fərqlənir. n elementdən hər birində k element olmaqla düzəldilən müxtəlif təkrarlı kombinasiyonların sayı $m C_n^k$ ilə işarə edilir. Bilmək lazımdır ki, burada $k > n$ ola bilər.

Teorem 2. n elementli çoxluqdan hər birində k element olmaqla düzəldilən bütün mümkün müxtəlif təkrarlı kombinasiyonların sayı $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ düsturu ilə hesablanır.

Təkrarlı kombinasiyonlara aid müxtəlif məsələlər həll edilir.

421. Baxçada 10 adda gül vardır. Bunlardan hər birində 20 gül olmaqla neçə üsulla buket düzəltmək olar?

422. 10 müxtəlif kitabdan 12-si neçə üsulla satıla bilər?

423. Eyni n əşyanı p nəfərə neçə üsulla paylamaq olar?

Fərz edək ki, n müxtəlif $a, b, c, \dots, e$ elementləri verilir. n elementlərindən hər birində k element olan və k elementlərinin hər biri verilmiş n elementlərinin birindən ibarət bütün mümkün olan nizamlı çoxluqlar düzəldək. $k > 1$ olduqda bu çoxluqların bəzilərində ayrı-ayrı elementlər bir neçə dəfə təkrarlana bilər (k dəfədən çox olmamaqla). Həmin çoxluqların hər biri verilmiş n elementdən hər birində k element olan təkrarlı aranjemanlardır.

Beləliklə, elementlərindən hər biri verilmiş n elementlərinin birindən ibarət, k elementli hər bir nizamlı M çoxluğuna verilmiş n elementdən hər birində k element olan təkrarlı aranjeman deyilir.

Məsələn, verilmiş iki a, b elementlərindən hər birində 3 element olmaqla düzəldilə bilən bütün mümkün olan müxtəlif təkrarlı aranjemanlar bunlardır: $aaa, aab, aba, baa, abb, bab, bba, bbb$. Verilmiş n elementdən hər birində K element olan müxtəlif təkrarlı aranjemanlar, təkrarsız aranjemanlarda olduğu kimi, bir-birindən ya onlara daxil olan elementlərlə, yaxud da onların sırası ilə fərqlənir.

n elementdən hər birində k element olan müxtəlif təkrarlı aranjemanların sayı $\overline{A}_n^k$ ilə işarə edilir.

Teorem 3. n elementli çoxluqdan hər birində k element olmaqla düzəldilən bütün mümkün müxtəlif təkrarlı aranjemanların sayı n^k -ya bərabərdir. Yəni $\overline{A}_n^k = n^k$. Təkrarlı aranjemanlara aid müxtəlif çalışmalar yerinə yetirmək olar.

424. 1) 1, 2, 3 rəqəmləri vasitəsilə neçə beşrəqəmli ədəd yazmaq olar?

2) 1, 2, 3, 4 rəqəmləri vasitəsilə neçə üçrəqəmli ədəd yazmaq olar?

425. n əşyanı neçə üsulla k qutuya qoymaq olar?

426. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 rəqəmləri vasitəsilə 10000-dən kiçik neçə müxtəlif ədəd yazmaq olar?

427. 1, 2, 3, 4, 5 rəqəmləri vasitəsilə 4-ə bölünən neçə müxtəlif dödrəqəmli ədəd yazmaq olar?

428. Binanın divarında bayraq üçün 8 yuva vardır. Yuvaların hər birində yaşıl və ya qırmızı bayraq yerləşdirilməlidir. Bayraqları binanın divarında neçə müxtəlif üsulla yerləşdirmək olar?

429. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots + a_nx^n$ çoxhədlisinin əmsallarını onun törəmələrinin sıfır nöqtəsindəki qiymətləri vasitəsilə ifadə edin.

430. Törəmənin tətbiqilə $(x+1)^{10}$ çoxhədlisində x^3 -in əmsalını tapın.

431. Törəmənin tətbiqilə $(3x-1)^9$ çoxhədlisində x^2 -in əmsalını tapın.

432. Törəmənin tətbiqilə Nyuton binomu düsturunu isbat edin.

433. A, B, C ixtiyari hadisələdirsə heç olmasa iki hadisə baş vermişdir hadisəsinin riyazi ifadəsini yazın.

434. 4 düzgün metal pul eyni zamanda atılır. Bu sınaqda ən çoxu bir gerbin yuxarı düşməsi hadisələrini göstərin.

435. Yeddi kart 1, 2, 3, ..., 7 ədədləri ilə nömrələnib, qutuya yığılmışdır. Elementar hadisələr fəzasını yazın.

436. Qabda 5 qırmızı, 4 mavi və 3 ağ kürəcik vardır. Bir kürənin seçilməsi sınağında elementar hadisələr fəzasının elementlərinin sayını tapın.

437. Hədəfə üç atəş açılır. A_k ilə ($k = 1, 2, 3$) k -cı atəşdə hədəfin vurulması işarə edək. A_k və $\overline{A_k}$ hadisələri üzərində $\cup$ və $\cap$ əməllərindən istifadə edərək: 1) üç atəşin hər üçünün hədəfə dəyməsi hadisəsinə; 2) üç atəşin hədəfdən yayınması hadisəsinə; 3) heç olmasa bir atəşin hədəfə dəyməsi hadisəsinə yazın.

438. İki metal pul atıldıqda hər ikisində gerb üzünün yuxarı düşməsi hadisəsinin əksi olan hadisəni deyın.

439. 600 pomidor ştilini yoxladıqda onlardan 100 ədədinin tələf olduğu bilindi. Əkilən ştilin bitməsi ehtimalının təqribi qiymətini tapın.

440. Üç zər atılır. Zərlərin üçündə də yuxarıya düşən üzdə xalların sadə ədədlər olması hadisəsinin eyni imkanlı bütün nəticələrinin sayını və bu hadisə üçün əlverişli nəticələrin sayını tapın.

441. Əlaçı tələbə imtahana salınmış 150 sualdan 149-nu öyrənib imtahana gəlmişdir. Hər biletdə 5 sual salınmış və biletlər diqqətlə qarışdırılmışdır. 1) Tələbə biletin suallarının 5-i də bilir hadisəsinin ehtimalını tapın. 2) Tələbə biletin suallarından birini bilmir hadisəsinin ehtimalını tapın.

442. 1) B, R, C, Ə həriflərinin hərəsini bir karta yazıb qutuya yığıdılar. Kartları diqqətlə qarışdırdıqdan sonra bir-bir təsadüfən çıxaraq sıraya düzdükdə, "Cəbr" sözünün alınma ehtimalını tapın.

2) "Riyaziyyat" sözünün də həmin qayda ilə alınma ehtimalını tapın.

443. Qabda 20 eyni kürəcik vardır. Onların 12-si qırmızı, qalanları ağdır. Kürələrdən təsadüfən 5-i seçilir. Seçilmiş 5 kürənin 3-ü qırmızıdır hadisəsinin ehtimalını tapın.

444. Murad dostunun telefonunun son iki rəqəmini unutmuşdur. Bu rəqəmlərin müxtəlif olduğunu bilərək onun ilk dəfə təsadüfən yığıldığı nömrənin düzgün olması ehtimalını tapın.

445. Qutuda 10 qırmızı, 6 yaşıl və 8 ağ kürəcik vardır. Qutudan təsadüfən 3 kürəcik çıxarılır: 1) kürəciklər müxtəlifdir hadisəsinin; 2) kürəciklərin 3-ü də qırmızıdır hadisəsinin ehtimalını tapın.

446. Düzgün olmayan zərin atılma sınağında hər bir nəticənin ehtimalı $P(E_1) = \frac{1}{n}$, $P(E_2) = \frac{1}{3}$, $P(E_3) = \frac{1}{6}$, $P(E_4) = 0$, $P(E_5) = \frac{1}{6}$, $P(E_6) = \frac{1}{4}$ olmuşdur, burada E_k , $1 \leq k \leq 6$, zərin atılmasında k xalın düşməsi hadisəsidir. 1) E_1 və E_3 hadisələrindən, heç olmasa, birinin baş verməsi hadisəsinin; 2) E_2 və E_4 hadisələrindən, heç olmasa, birinin baş verməsi hadisəsinin; 3) E_5 və E_6 hadisələrinin heç birinin baş verməməsi hadisəsinin ehtimalını tapın.

447. Cüt-cüt ortaq nəticələri olmayan (uyuşmayan) A, B, C hadisələri u elementar hadisələr fəzasını əmələ gətirirsə və $P(A' \cap B') = \frac{3}{7}$ olarsa, $P(C)$ ehtimalını tapın.

448. Elementar hadisələr fəzası $\{E_1, E_2, E_3\}$ olan sınaq üçün: 1) $P(E_1) = \frac{1}{7}$, $P(E_2) = \frac{5}{14}$, $P(E_3) = \frac{1}{2}$, 2) $P(E_1) = \frac{1}{3}$, $P(E_2) = \frac{5}{6}$, $P(E_3) = \frac{1}{2}$ hallarından hansı mümkündür?

449. Məktəbin 15 şagirdi riyaziyyat dərnişinin üzvüdür. Bunların 3-cü oğlan qalanları qızıdır. Xüsusi qabiliyyəti olan 8 nəfərdən ən çoxu bir nəfərin oğlan olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

450. $P(A \cap B) = \frac{2}{15}$ isə $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ ehtimalını tapın.

451. $U = \{A, B, C, D\}$ elementar hadisələr fəzasının A, B, C, D hadisələrinin cüt-cüt ortaq nəticələri yoxdursa (qarşılıqlı uyuşmayandırısa) və $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$, $P(C) = \frac{3}{8}$ isə $P(D)$ -ni tapın.

452. $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ çoxluğundan təsadüfən üç müxtəlif ədəd seçilir. Seçilmiş ədədlərin: 1) cəminin cüt; 2) hasilinin cüt olması ehtimalını tapın.

453. A və B hər hansı sınağın iki hadisəsi, $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$,

$P(A) = \frac{5}{8}$ və $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ isə, $P(A/B)$ şərti ehtimalını tapın.

454. Qutuda radiusları eyni olan 14 qırmızı, 10 yaşıl və 12 sarı kürəcik vardır. Qutudan təsadüfən 1 kürə götürülür. O, sarı deyildirsə, qırmızı olması ehtimalını tapın.

455. $A = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ çoxluğunun hər bir alt çoxluğu karta yazılaraq qutuya salınır. Təsadüfən bir kart çıxarılır. Kartdakı alt çoxluğun 6 elementli olduğu məlumdursa, 4-ün bu kartda olmadığı ehtimalını tapın.

456. Atılan iki zərin birincisində 4 xal düşmüşdür. İkinci zərdə düşən xalın 6 olması ehtimalı nəyə bərabərdir?

457. Dəmir pul və zər atılır. İsbat edin ki, “rəqəm düşdü” və “tək xal düşdü” hadisələri asılı deyil.

458. A hadisəsi B hadisəsindən asılı deyil. İsbat edin ki, A hadisəsi $\bar{B}$ hadisəsindən də asılı deyil.

459. Üç eyni formalı qutunun birincisində 5 ağ və 5 qara, ikincisində 4 ağ və 6 qara, üçüncüsündə isə 7 ağ və 3 qara kürəcik vardır. Qutuların birindən ağ kürə çıxdığını bilərək onun ikinci qutudan çıxması ehtimalını tapın.

460. Tirdəki 5 tüfənglə atılan güllələrin hədəfə dəymə ehtimalları uyğun olaraq 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6-dır. bu tüfənglərdən birini təsadüfən götürmüş atıcının bir atəşlə hədəfi vurma ehtimalını tapın.

461. Kinoteatrın tamaşa zalında 10 sıra, hər sırada isə 10 yer vardır. Sıra və sıradakı yerin nömrələri cəminin cüt, yoxsa tək olması daha ehtimallıdır?

462. Əvvəlki məsələni: 1) 6 sıra, hər sırada isə 6 yer və 2) 7 sıra, hər sırada isə 7 yer olduqda həll edin.

463. D kvadratlanan müstəvi fiqur, D_1 isə onun daxilində yerləşən ixtiyari oblast olsun. D oblastının daxilində təsadüfən götürülən bir nöqtənin D_1 oblastından olması ehtimalını tapın.

464. Katetləri 6 və 8 olan düzbucaqlı üçbucağın daxilində təsadüfən götürülən bir nöqtənin bu üçbucağın təpələrindən 2-dən böyük məsafədə olan oblastın olması ehtimalını tapın.

III FƏSİL.

II fəsilə aid həllər, şərhlər və cavablar

1. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)n$ ədədinin 7^{100} -ə bölünməsi üçün onun sadə vuruqlarına ayrılışında 7 ədədinin 100 dəfə olması ayrılışında 7 ədədinin 100 dəfə olması kifayətdir. $1, 2, 3, \dots, n$ ədədlərini hər birində 49 ədəd olmaqla qruplara bölək:

1) $1, 2, 3, \dots, 48, 49$; 2) $50, 51, \dots, 97, 98; \dots k+1$; 3) $49k+1, 49k+2, \dots, 49k+49; \dots$

Asanlıqla müəyyən etmək olar ki, bu qrupların hər birində 6 dənə 7 vuruğu və $k+1$ ədədi 7-yə bölünmürsə iki $49k+9$ şəkildə 7 vuruğu vardır. 7-lərin sayının 100 olması üçün 97 dənə 7 daxil olan 12 tam qrup (yeddiinci qrupda 9 dənə 7, qalanların hər birində isə 8 dənə 7 vardır) və daha üç 7 lazımdır. On ikinci qrupun sonuncu ədədi $49 \cdot 12 = 588$ dir. Bunlara daha üç $588+7=595$, $595+7=602$, $602+7=609$ ədədi də əlavə etmək lazımdır. Beləliklə, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)n$ hasilinin 7^{100} -ə bölünməsi üçün ən kiçik n ədədi 609-dur.

2.

$$ad + bc = 4 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y+2z}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} - 4 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \times \\ \times \cos \frac{x+y+2z}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2} = 0.$$

Deməli, $ad + bc = 0$

3. 1) $\operatorname{tg}^2 x - (\sqrt{3} + 1) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} \geq 0$ (1) olmalıdır. (1) bərabərsizliyin sol tərəfi $\operatorname{tg} x$ -ə nəzərən kvadrat üçhədlidir, kökləri isə $\sqrt{3}$ və 1 dir. Odur ki, $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$ (2) və ya $\operatorname{tg} x \leq 1$ (3) olduqda (1) bərabərsizliyi ödənilir. (2) bərabərsizliyindən $\pi k + \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, (3) bərabərsizliyindən isə $\pi k - \frac{\pi}{2} < x \leq \pi k + \frac{\pi}{4}$.

Nəticədə $\frac{\pi}{3}(3k+1) \leq x < \frac{\pi}{2}(2k+1)$ və ya $\frac{\pi}{2}(2k-1) \leq x \leq \frac{\pi}{4}(4k+1)$, burada $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3$ alırıq.

2) $\left| \frac{2}{1-x} \right| \leq 1$ olmalıdır. Odur ki, $\left| \frac{x-1}{2} \right| \geq 1$ və ya $|x-1| \geq 2$, buradan: a) $x-1 \geq 2$, $x \geq 3$; b) $x-1 \leq -2$, $x \leq -1$. Deməli, $x \geq 3$ və ya $x \leq -1$

3) $0 \leq \arcsin(\log_2 x) \leq \frac{\pi}{2}$ olmalıdır, odur ki, $0 \leq \log_2 x \leq 1$, buradan $1 \leq x \leq 2$

4) $\operatorname{ctg} \pi x$ funksiyasının varlığı üçün $\pi x \neq \pi k$ və ya $x \neq k$ olmalıdır, burada $k \in \mathbb{Z}$. $\arccos(2^x)$ funksiyasının varlığı üçün isə $-1 \leq 2^x \leq 1$ olmalıdır. $2^x \geq -1$ bərabərsizliyi x -in ixtiyari qiymətlərində, $2^x \leq 1$ bərabərsizliyi isə $x \leq 0$ olduqda ödənilir. Deməli bütün mənfi tam ədədlər baxılan funksiyanın təyin oblastıdır.

5) $0 \leq x^2 - 1 \leq 1$ və ya $1 \leq x^2 \leq 2$ olmalıdır. Sol bərabərsizlikdən $x \geq 1$ və ya $x \leq -1$ sağ bərabərsizlikdən isə $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ alınır. Beləliklə, iki bərabərsizliklər sistemi müəyyən olunur:
$$\begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \\ x \geq 1 \end{cases}$$

və
$$\begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \\ x \leq -1 \end{cases}$$

Birinci sistemdən $1 \leq x \leq \sqrt{2}$, ikincidən isə $-\sqrt{2} \leq x \leq -1$ alırıq, nəticə isə $[-\sqrt{2}, -1]$, $[1, \sqrt{2}]$ olur.

6) $|xy| \leq 1$ olmalıdır, buradan $|y| \leq \frac{1}{|x|}$. Bu bərabərsizlik iki bərabərsizliyə ayrılır: a) $x > 0$ isə, onda $-\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{x}$ və b) $x < 0$ isə, onda $\frac{1}{x} \leq y \leq -\frac{1}{x}$.

a) və b) – dən alınır ki, axtarılan oblast iki hiperbolanın qolları ilə əhatə olunmuşdur, başqa sözlə koordinat müstəvisinin 26-cı şəkildə göstəriləndiyi kimi xətlənmiş bütün nöqtələrindən ibarətdir.

4. 1) Verilmiş funksional asılılığı qeyri-müəyyən şəkildə göstərək:

$$(y-1)x^2 + (y+1)x + 2(y-1) = 0 \quad (1)$$

Buradan $x = \frac{y+1 \pm \sqrt{-7y^2 + 18y - 7}}{2(y-1)}$ alırıq. Aşkardır ki,

$$7y^2 - 18y + 7 \leq 0$$

münasibəti ödənilməlidir.

Buradan $\frac{2-4\sqrt{2}}{7} \leq y \leq \frac{9+4\sqrt{2}}{7}$.

Bu əməliyyat $y \neq 1$ olduğunu fərz etməklə aparılmışdır. (1)-də y yerində 1 yazmaq müəyyən edirik ki, $x = 0$. Beləliklə, $y = 1$ ola bilər. Deməli, baxılan funksiyanın dəyişmə oblastı $\left[\frac{9-4\sqrt{2}}{7}, \frac{9+4\sqrt{2}}{7} \right]$ -

dir.

2) Verilmiş funksional asılılığı

$$y = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \sqrt{2} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

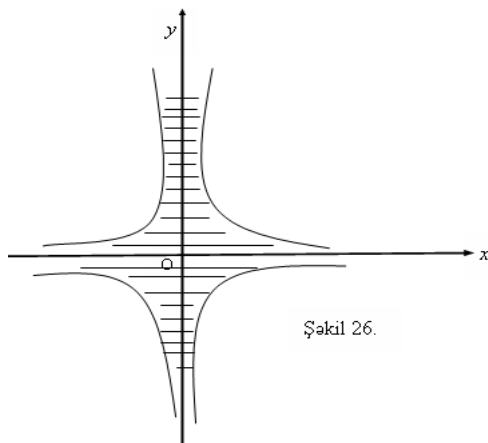
şəkilində göstərək. $-1 \leq \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$ olduğundan $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$

olar. Deməli baxılan funksiyanın dəyişmə oblastı $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ -dir.

5. 1) $\sqrt[3]{(-x+1)^2} + \sqrt[3]{(-x-1)^2} = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2} = y$ olduğundan

funksiya cütüdür. 2) $\frac{a^{-x} + a^{-(-x)}}{2} = \frac{a^x + a^{-x}}{2} = y$ olduğundan funksiya

cütüdür. 3) $\sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x \neq \pm y$ olduğundan



funksiya nə tək, nə cütdür. 4)

$$\lg \frac{1-x}{1+x} = \lg \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} = -\lg \frac{1+x}{1-x} = -$$

olduğundan funksiya təkdir.

6. Arqumentin verilmiş aralıqdan götürülmüş ixtiyari iki müxtəlif x_1, x_2 qiymətləri üçün

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

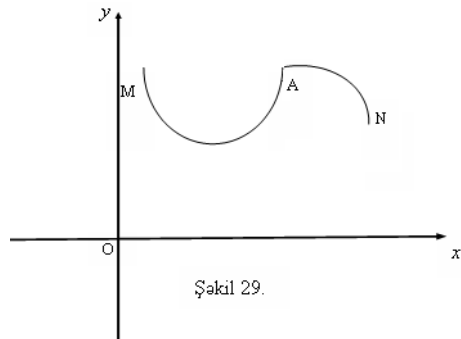
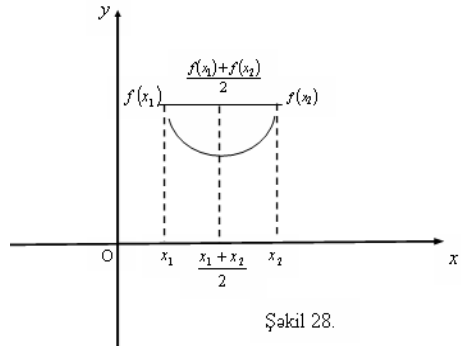
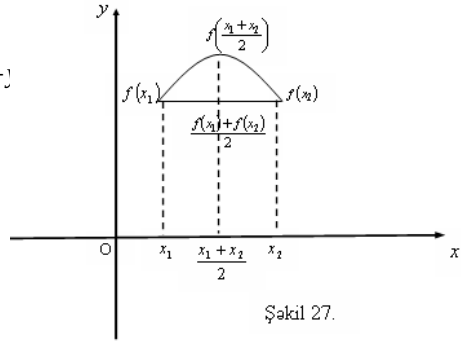
bərabərsizliyini ödəyən $y = f(x)$ funksiyasına (əyrisinə) qabarıqdır deyilir.

Arqumentin verilmiş aralıqdan götürülmüş ixtiyari iki müxtəlif x_1, x_2 qiymətləri

üçün
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

bərabərsizliyini ödəyən $y = f(x)$ funksiyasına (əyrisinə) çökükdür deyilir. Əyrinin çöküklüyünə və qabarıqlığına verilən təriflərin həndəsi mənalərini də bilmək lazımdır. Qabarıq funksiyanın qrafikinə ixtiyari vətərinin ortası qövsün uyğun nöqtəsindən aşağıda yerləşir (Şəkil 27), çökük funksiyanın qrafikinə ixtiyari vətərinin ortası qövsün uyğun nöqtəsindən yuxarıda yerləşir (Şəkil 28). Aşkardır ki, eyni

$y = f(x)$ əyrisi qabarıq və çökük hissələrdən ibarət ola bilər. Əyrinin qabarıq hissəsini çökük hissəsindən ayıran A nöqtəsinə dönmə nöqtəsi deyilir (Şəkil 29).



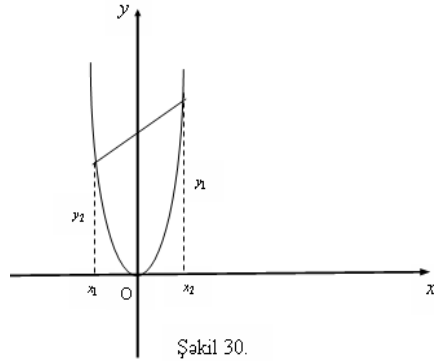
1) Fərz edək ki, x_1, x_2 arqumentin ixtiyari qiymətləridir. Onda $y_1 = f(x_1) = x_1^2$; $y_2 = f(x_2) = x_2^2$, $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2$.

$y = x^2$ funksiyasının qabarıqlığını və çöküklüyünü araşdırmaq üçün

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 = \frac{2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2}{4} = \\ &= \frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{4} = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 > 0 \text{ fərqi} \text{ n} \text{ə baxırıq. Baxılan f} \end{aligned}$$

müsbət olduğundan, verilmiş funksiyanın qrafiki qabarıqdır (Şəkil 30).

2) x arqumentinin ixtiyari iki qiyməti x_1, x_2 olsun, həm də bu qiymətlərin hər ikisi $(0, \pi)$ və ya $(\pi, 2\pi)$ aralıqlarınadaxildir. $f(x_1) = \sin x_1$, $f(x_2) = \sin x_2$, $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.



Şəkil 30.

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) &= \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} - \sin \frac{x_1 + x_2}{2} = \\ &= \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cos \frac{x_1 - x_2}{2} - \sin \frac{x_1 + x_2}{2} = \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \left(\cos \frac{x_1 - x_2}{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

fərqi nə baxaq. $|\cos \alpha| \leq 1$ olduğundan $\cos \frac{x_1 - x_2}{2} - 1$ ifadəsi mənfidir

və ya sıfıra bərabərdir. $0 < x < 2\pi$ olduğundan $\cos \frac{x_1 - x_2}{2} - 1 < 0$.

$0 < x_1 < \pi$ isə, onda $0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \pi$, beləliklə isə, $\sin \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$.

Deməli, x_1, x_2 arqumentləri $(0, \pi)$ aralığına daxildirsə, onda

$\sin \frac{x_1 + x_2}{2} \left(\cos \frac{x_1 - x_2}{2} - 1 \right) < 0$, yəni baxılan fərq mənfidir. Beləliklə, $(0, \pi)$ intervalında funksiyanın qrafiki qabarıqdır. $\pi < x_1 < 2\pi$, $\pi < x_2 < 2\pi$ isə, onda $\pi < \frac{x_1 + x_2}{2} < 2\pi$, beləliklə isə, $\sin \frac{x_1 + x_2}{2} < 0$ və $\sin \frac{x_1 + x_2}{2} \left(\cos \frac{x_1 - x_2}{2} - 1 \right) > 0$, yəni baxılan fərq müsbətdir. Yəni $(\pi, 2\pi)$ intervalında funksiyanın qrafiki qabarıqdır. (Şəkil 31)

7. 1) $\sin 2\pi x = \sin(2\pi x + 2\pi) = \sin[2\pi(x+1)]$ olduğundan funksiyanın dövrü 1-ə bərabərdir.

2) Funksiyanın dövrünü T ilə işarə edək, onda $A \cos \lambda(x+T) + B \sin \lambda(x+T) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$,
 $A[\cos \lambda(x+T) - \cos \lambda x] + B[\sin \lambda(x+T) - \sin \lambda x] = 0$,
 $-2A \sin \left(\lambda x + \frac{\lambda T}{2} \right) \sin \frac{\lambda T}{2} + 2B \cos \left(\lambda x + \frac{\lambda T}{2} \right) \sin \frac{\lambda T}{2} = 0$,
 $\sin \frac{\lambda T}{2} \left[B \cos \left(\lambda x + \frac{\lambda T}{2} \right) - A \sin \left(\lambda x + \frac{\lambda T}{2} \right) \right] = 0$.

Kvadrat mötərizədəki ifadə x -in bütün qiymətlərində sıfıra bərabər olmadığından x -in ixtiyari qiymətlərində $\sin \frac{\lambda T}{2} = 0$.

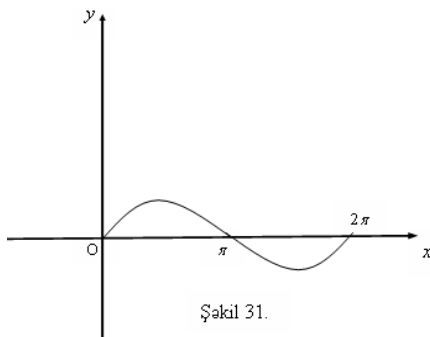
Beləliklə, $\frac{\lambda T}{2} = \pi, T = \frac{2\pi}{\lambda}$

3) Funksiyanın dövrü p olarsa, onda

$$\sin(ax+b) = \sin[a(x+p)+b]$$

bərabərliyi doğrudur. İki sinusun bərabər olması şərtinə

əsasən a) $ax + ap + b + ax + b = \pi(2k+1)$, b) $ax + ap + b - ax - b = 2\pi k$



Şəkil 31.

alınır. a) şərtindən $p = \frac{\pi(2k+1)-2ax-2b}{a}$ tapırıq. Göründüyü kimi bu halda p ədədi x dəyişənindən asılıdır, odur ki, dövr ola bilməz. b) şərtindən $p = \frac{2\pi b}{a}$ alırıq. $k=1$ olduqda p -in ən kiçik müsbət qiyməti $\frac{2\pi}{a}$ -ya bərabərdir. Göründüyü kimi b ədədi dövrün qiymətinə təsir etmir. Deməli dövr $\frac{2\pi}{a}$ -dır.

$$4) \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

$\sin 2x$ funksiyasının dövrü π olduğundan araşdırılan funksiyanın da dövrü π -dir.

$$5) y = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1 + \cos(2\pi + 2x)}{2} = \frac{1 + \cos 2(\pi + x)}{2}$$

Deməli, verilmiş funksiyanın dövrü π -dir.

6) Araşdırılan funksiyanın dövrü T olsun. Onda $\sin^4(x+T) = \sin^4 x$ və ya $\sin^4(x+T) - \sin^4 x = 0$ və ya $[\sin^2(x+T) + \sin^2 x][\sin^2(x+T) - \sin^2 x] = 0$ eyniliyi ödənilməlidir. $\sin^2(x+T) + \sin^2 x \geq 0$, yəni $\sin^2(x+T) + \sin^2 x$ eyniliklə sıfıra bərabər olmadığından $\sin^2(x+T) - \sin^2 x = 0$ və ya $\frac{1 - \cos(2x+2T)}{2} - \frac{1 - \cos 2x}{2} = 0$ və ya $\cos 2x - \cos(2x+2T) = 0$, $2\sin(2x+T)\sin T = 0$ eyniliyi ödənilməlidir. $\sin(2x+T)$ eyniliklə sıfıra bərabər olmadığından $\sin T = 0$. Sonuncu bərabərliyi ödəyən ən kiçik müsbət ədəd π olduğundan araşdırılan funksiyanın dövrü də π -dir.

7)

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Araşdırılan funksiyanın dövrü $\frac{\pi}{2}$ -yə bərabərdir.

$$8) y = |\cos x| = \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}. \quad \cos 2x \text{ funksiyaının}$$

ən kiçik müsbət dövrü π olduğundan y funksiyaının da dövrü π -dir.

9) Araşdırılan funksiyanın dövrü T olsun. Onda $\sin^3(x+T) = \sin^3 x$ və ya $\sin^3(x+T) = \sin^3 x$ və ya $\sin^3(x+T) - \sin^3 x = 0$ və ya

$[\sin(x+T) - \sin x][\sin^2(x+T) + \sin(x+T)\sin x + \sin^2 x] = 0$ eyniliyi ödənilməlidir.

$$\sin^2(x+T) + \sin(x+T)\sin x + \sin^2 x = \left[\sin(x+T) + \frac{\sin nx}{2} \right]^2 + \frac{3}{4}\sin^2 x \geq 0$$

olduğundan başqa sözlə hasildəki ikinci vuruq eyniliklə sıfıra bərabər

$$\text{olmadığından } \sin(x+T) - \sin x = 0 \quad \text{və ya} \quad 2 \cos\left(x + \frac{T}{2}\right) \sin \frac{T}{2} = 0$$

eyniliyi ödənilməlidir. $\cos\left(x + \frac{T}{2}\right)$ eyniliklə sıfıra bərabər olmadığından

$$\sin \frac{T}{2} = 0. \text{ Sonuncu bərabərliyi ödəyən ən kiçik müsbət ədəd } 2\pi -$$

dir. Deməli araşdırılan funksiyanın dövrü 2π -yə bərabərdir.

10) İxtiyari x ədədinə tam ədə əlavə olunarsa, onda onun yalnız tam hissəsi dəyişər, kəsir hissəsi isə əvvəlki kimi qalar. Ən kiçik müsbət tam ədəd 1 olduğundan, araşdırılan funksiyanın dövrü 1-ə bərabərdir.

8. 1) Fərz edək ki, $y = \cos x^2$ funksiyaının p dövrü vardır, onda x dəyişəninin ixtiyari qiymətində $\cos(x+p)^2 = \cos x^2$.

İki konusun bərabərliyi şərtinə əsasən alırıq: 1) $x^2 + 2px + p^2 + x^2 = 2\pi k$ və ya 2) $x^2 + 2px + p^2 - x^2 = 2\pi k$. 1)

şərtindən $p = -x \pm \sqrt{-x^2 + 2\pi k}$, 2) şərtindən isə $p = -x \pm \sqrt{x^2 + 2\pi k}$.

Deməli hər iki halda p ədədi x dəyişənindən asılıdır, odur ki, p verilmiş funksiyanın dövrü ola bilməz. $\cos x^2$ dövrü funksiya deyil.

2) Fərz edək ki, y dövrü T olan funksiyadır, onda $x + T + \sin(x + T) = x + \sin x$ və ya $\sin(x + T) - \sin x = -T$ və ya $2 \sin \frac{T}{2} \cos\left(x + \frac{T}{2}\right) = -T$. Buradan $\cos\left(x + \frac{T}{2}\right) = -\frac{T}{2 \sin \frac{T}{2}}$ sonuncu

bərabərliyin sağ tərəfi sabit kəmiyyətdir, sol tərəfi isə x -in funksiyasıdır. Odur ki, sonuncu bərabərliyin x -in ixtiyari qiymətində ödənilməsi T ədədi yoxdur. Deməli verilmiş funksiyanın dövrü yoxdur.

3) $\sin \sqrt{2}x = \sin(\sqrt{2}x + 2\pi)$, $\cos \sqrt{5}x = \cos(\sqrt{5}x + 2\pi)$ olduğundan $\sin \sqrt{2}x$ funksiyasının dövrü $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$, $\cos \sqrt{5}x$ funksiyasının dövrü isə $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$ -dir.

$y = \sin \sqrt{2}x + \cos \sqrt{5}x$ funksiyasının dövrü T olarsa, onda $\frac{T}{\frac{2\pi}{\sqrt{2}}} = k$ və $\frac{T}{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}} = l$, burada k və l tam ədədlərdir. Son iki

bərabərlikdən $\frac{2k\pi}{\sqrt{2}} = \frac{2l\pi}{\sqrt{5}}$ və ya $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{l}{k}$ alınır ki, bu da mümkün

deyil. Çünki, $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ irrasional, $\frac{l}{k}$ isə rasioanl ədəddir. Deməli, verilmiş y funksiyasının T dövrü olmasını fərz etməklə ziddiyyət alındı. Həmin funksiyanın dövrü yoxdur.

9. $f(x + C) = \frac{1 - f(x)}{1 + f(x)}$ bərabərliyi x -in ixtiyari qiymətində ödənilməsi, onda x yerində $x + C$ yazdıqda $f(x + 2C) = \frac{1 - f(x + C)}{1 + f(x + C)} = \frac{1 - \frac{1 - f(x)}{1 + f(x)}}{1 + \frac{1 - f(x)}{1 + f(x)}} = f(x)$ alınır. Buradan isə alınır ki,

baxılan funksiya dövrü funksiyadır və bu dövrlərdən biri $2C$ -yə bərabərdir.

10. Fərz edək ki, araşdırılan funksiyanın dövrü T -yə bərabərdir, yəni x -in ixtiyari qiymətində $f(x+T) = f(x)$ bərabərliyi ödənilir. Bu bərabərlikdən alınır ki, $f(x+T) - f(x) = 0$ və ya

$$[\cos(x+T) - \cos x] + [\cos \alpha_1(x+T) - \cos \alpha_1 x] + \dots + [\cos \alpha_n(x+T) - \cos \alpha_n x] = 0$$

Sonuncu bərabərlik eyniliklə ödənildiyindən o, x -in ixtiyari qiymətində doğrudur. Fərz edək ki, $x=0$, onda

$$-(1 - \cos T) - (1 - \cos \alpha_1 T) - (1 - \cos \alpha_2 T) - \dots - (1 - \cos \alpha_n T) = 0$$

və ya

$$2 \sin^2 \frac{T}{2} + 2 \sin^2 \frac{\alpha_1 T}{2} + 2 \sin^2 \frac{\alpha_2 T}{2} + \dots + 2 \sin^2 \frac{\alpha_n T}{2} = 0$$

Bu bərabərliyin sol tərəfi mənfi olmayan kəmiyyətlərin cəmi olduğundan onun ödənilməsi üçün hər bir toplananın sıfıra bərabər olması zəruri və kafidir, yəni $\sin \frac{T}{2} = \sin \frac{\alpha_1 T}{2} = \sin \frac{\alpha_2 T}{2} = \dots = \sin \frac{\alpha_n T}{2} = 0$.

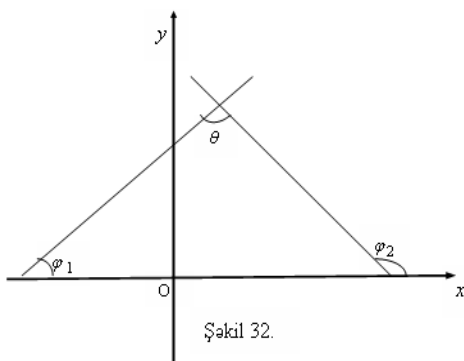
Bu bərabərliklərdən $T = 2m\pi$, $\alpha_1 T = 2k_1\pi$, $\alpha_2 T = 2k_2\pi$, ..., $\alpha_n T = 2k_n\pi$ alınır,

burada m və k_i - tam ədədlərdir. Sonuncu sistemi həll edib

$$\alpha_1 = \frac{k_1}{m}, \alpha_2 = \frac{k_2}{m}, \dots, \alpha_n = \frac{k_n}{m}$$

alırıq, deməli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ rasional ədədlərdir.

11. Fərz edək ki, l_1 düz xətti absis oxunun müsbət istiqamətilə φ_1 bucağını, l_2 düz xətti isə φ_2 bucağını əmələ gətirir (Şəkil 32). Şəkildən görünür ki, $\varphi_2 = \theta + \varphi_1$,



Şəkil 32.

buradan $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$, odur ki, $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

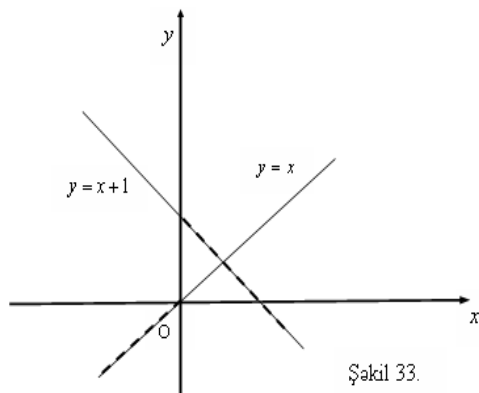
12. Axtarılan düz xəttin ümumi tənliyi $y = kx + b$ (1) şəkildədir. Bu düz xətt $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ nöqtələrindən keçir. Odur ki, $y_1 = kx_1 + b$, $y_2 = kx_2 + b$. Buradan ardıcıl olaraq $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$,

$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $b = y_1 - kx_1$ tapılır. k və b -in qiymətlərini (1)-də yerinə

yazıb $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ və ya $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ alırıq.

Aşkardır ki, deyilənlər yalnız $x_1 \neq x_2$ olduqda doğrudur. $x_1 = x_2$ olduqda isə bu nöqtələrdən keçən düz xətt absis oxuna perpendikulyardır və onun tənliyi $x = a$ şəkildədir (burada $a = x_1 = x_2$).

13. 1) $x \geq 0$ olduqda $y = x$ funksiyasının qrafiki birinci koordinat bucağının, koordinat başlanğıcı daxil olmaqla, tənböləndir, $x < 0$ olduqda $y = -x + 1$ funksiyasının qrafiki isə, ordinat oxunun nöqtələri müstəsna olmaqla $y = -x + 1$ düz xəttinin ikinci kvadratına yerləşən hissəsidir (Şəkil 33).



Şəkil 33.

2) $y = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2} = |x+2| + |x-1| + |x-3|$ yazmaq olar.

a) $x \leq -2$ olarsa, onda $x+2 \leq 0$, $x-1 < 0$, $x-3 < 0$. Beləliklə, $|x+2| = -(x+2) = -x-2$, $|x-1| = -(x-1) = -x+1$, $|x-3| = -(x-3) = -x+3$, odur ki, $y = -x-2-x+1-x+3 = -3x+2$.

b) $-2 \leq x \leq 1$ isə, onda $x+2 \geq 0$, $x-1 \leq 0$, $x-3 < 0$. Beləliklə, $y = x+2-x+1-x+3 = -x+6$

c) $1 \leq x \leq 3$ isə, onda $x+2 > 0$, $x-1 \geq 0$, $x-3 \leq 0$. Beləliklə, $y = x+2+x-1-x+3 = x+4$

ç) $x \geq 3$ isə, onda $x+2 > 0$, $x-1 > 0$, $x-3 \geq 0$. Beləliklə, $y = x+2+x-1+x-3 = 3x-2$

Deməli, $y = \begin{cases} -3x+2, & x \leq -2 \\ -x+6, & -2 \leq x \leq 1 \\ x+4, & 1 \leq x \leq 3 \\ 3x-2, & 3 \leq x \end{cases}$

Bundan sonra verilmiş funksiyanın qrafikini asanlıqla qurmaq olar. Bu qrafik göstərilən şərtlərlə dörd düz xəttin hissələrindən ibarət olar.

14. 1) Bütün nöqtələr $x+y+1=0$, $y+x-1=0$, $x-y+1=0$ düz xətlərinin əmələ gətirdiyi kvadratin daxilində yerləşir (Şəkil 34).

2) Axtarılan nöqtələr birinci kvadrantda $y+x=1$ düz xəttindən aşağıda başqa sözlə düz bucaq təpəsi koordinat başlanğıcında olan, katetləri isə koordinat oxları üzərində yerləşən və vahidə bərabər olan bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucağın daxili oblastında yerləşir (Şəkil 35).

3) Əvvəlcə qeyd edək ki, koordinat oxları üzərində koordinatları verilən tənliyi ödəyən nöqtə yoxdur.

Doğrudan da ordinat oxunun ixtiyari nöqtəsinin absisi $x=0$ dır, $x=0$ olduqda

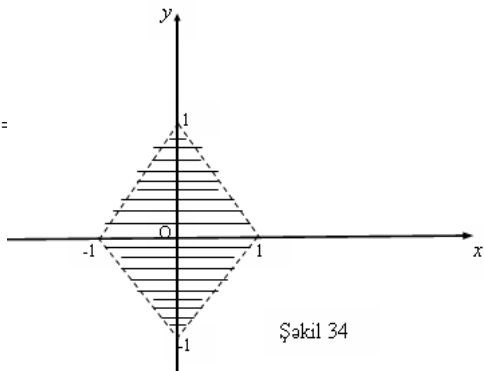
isə $\frac{|x|}{x}$ -in mənası yoxdur; ab-

sis oxunun ixtiyari nöqtəsinin ordinatı $y=0$ dır, $y=0$ olduqda

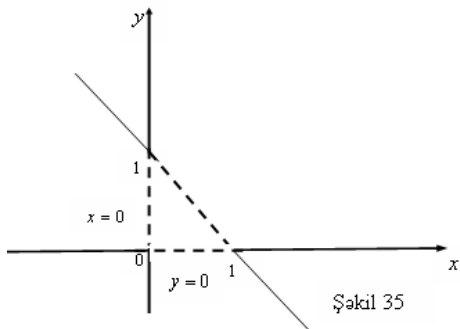
isə $\frac{|y|}{y}$ -in mənası yoxdur.

Dörd kvadratin hər birində

yerləşən nöqtələrə baxaq. Fərz edək ki, P birinci kvadrantın ixtiyari nöqtəsidir, yəni $x > 0$, $y > 0$. Onda $\frac{x}{x} + \frac{y}{y} = 2$ və ya $2=2$



Şəkil 34



Şəkil 35

Deməli, birinci kvadrantın ixtiyari nöqtəsinin koordinatları (oxlar üzərindəki nöqtələr müstəsna olmaqla) verilmiş tənliyi ödəyir.

P ikinci kvadrantdadırsa, yəni $x < 0, y > 0$, onda

$$-\frac{x}{x} + \frac{y}{y} = -1 + 1 = 0 \neq 2$$

Deməli, ikinci kvadrantda axtarılan nöqtə yoxdur.

P üçüncü kvadrantdadırsa, yəni $x < 0, y < 0$ isə onda

$$-\frac{x}{x} - \frac{y}{y} = -2 \neq 2.$$

Deməli, axtarılan nöqtə üçüncü kvadrantda da yoxdur.

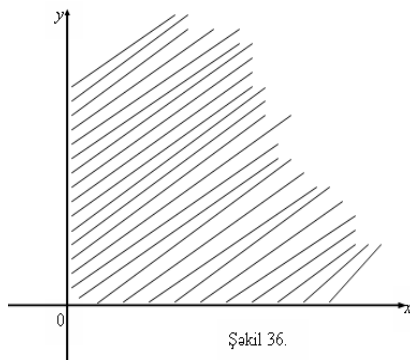
Nəhayət P nöqtəsi dördüncü kvadrantdadırsa, yəni $x > 0, y < 0$ isə, onda

$$\frac{x}{x} - \frac{y}{y} = 1 - 1 = 0 \neq 2.$$

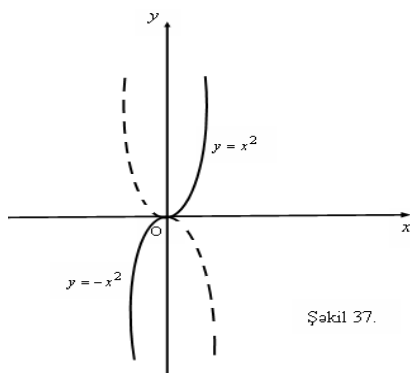
Beləliklə, dördüncü kvadrantda da koordinatları verilmiş tənliyi ödəyən nöqtə yoxdur.

Deməli, axtarılan nöqtələr yalnız birinci kvadrantda yerləşir (Şəkil 36).

15. 1) Funksiya bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur. $x \geq 0$ olarsa, onda verilmiş funksiyayı $y = x^2$ şəklində yazmaq olar. Beləliklə, $x \geq 0$ olduqda baxılan funksiyanın qrafikinin bir hissəsi $y = x^2$ parabolasının birinci kvadranta yerləşən hissəsidir, koordinat başlanğıcı da parabolanın bu hissəsinə daxildir. $x < 0$ olduqda isə, onda funksiya $y = -x^2$ şəklinə düşür. Odur ki, $y = -x^2$ parabolasının üçüncü kvadranta yerləşən, koordinat başlanğıcı müstəsna olmaqla, hissəsi verilmiş funksiyanın qrafikinə aiddir. Beləliklə, verilmiş funksiyanın qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik olan $y = x^2$ və $y = -x^2$ parabolalarının hissələrindən ibarətdir (Şəkil 37). Şəkində bu qrafik bütöv xətlə göstərilir.

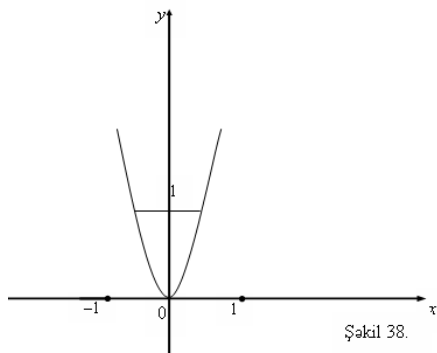


Şəkil 36.



Şəkil 37.

2) Funksiya bütün ədəd oxunda təyin olmuşdur. $x < -1$ və ya $x > 1$ olduqda $y = x^2$ olduğundan bu parobalanın $y = 1$ düz xəttindən yuxarıda yerləşən hissəsi verilmiş funksiyanın qrafikinə daxildir. $-1 \leq x \leq 1$ olduqda $y = 1$ olduğundan uc nöqtələrinin koordinatları $(-1; 1)$ və $(1; 1)$ olan $y = 1$ düz xətti parçası da verilmiş



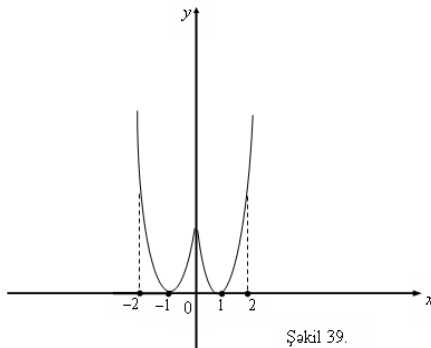
Şəkil 38.

funksiyanın qrafikinə aiddir. Araşdırılan funksiyanın qrafiki 38-ci şəkildə səlis xətlə göstərilmişdir.

3) $(-x^2) - 2|-x| + 1 = x^2 - 2|x| + 1 = y$ olduğundan funksiya cütdür və onun qrafiki ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir. Funksiyanın kökləri -1 və 1 ədədləridir, yəni absis oxunun -1 və 1 nöqtələri qrafikin üzərindədir. $x = 0$ olduqda

$y = 1$ odur ki, qrafik ordinat oxunu $(0; 1)$ nöqtəsində kəsir. $x = -\frac{-2}{2} = 1$ olduqda

funksiyanın minimumu vardır. Funksiya cüt olduğundan $x = -1$ olanda da funksiyanın minimumu vardır. $y = (|x| - 1)^2$



Şəkil 39.

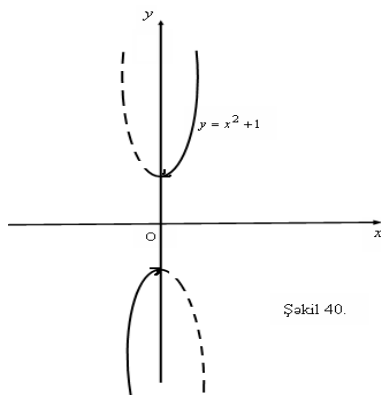
olduğundan x -in ixtiyari qiymətində funksiya mənfi deyildir. Qrafik 39-cu şəkildə göstərilir.

4) Funksiya, sıfırdan fərqli bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur. $\frac{(-x)^3 + (-x)}{|-x|} = -\frac{x^3 + x}{|x|} = -y$ olduğundan funksiya təkdir və onun qrafiki

koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir. $x > 0$ isə, onda $|x| = x$ və $y = x^2 + 1$, $x < 0$ isə, onda $|x| = -x$ və $y = -(x^2 + 1)$.

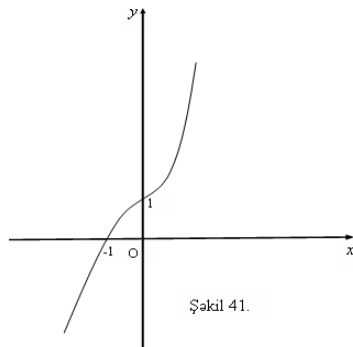
Beləliklə, $x > 0$ olduqda qrafik $y = x^2 + 1$ parabolasının sağ, $x < 0$ olduqda isə $y = -(x^2 + 1)$ parabolasının soludur. Qrafik 40-cı şəkildə səlis xətlə göstərilir.

5) Funksiyanın təyin oblastı bütün ədəd oxudur. $x = -1$ olduqda funksiya $y = 0$ olduğundan qrafik absis oxunu $(-1; 0)$ nöqtəsində kəsir. $x = 0$ isə onda $y = 1$, odur ki, qrafik ordinat oxunu $(0; 1)$ nöqtəsində kəsir. $y = x^3$ tək funksiya olduğundan, onun qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir. Odur ki, $y = (x+1)^3$ funksiyasının qrafiki $(-1; 0)$ nöqtəsinə nəzərən simmetrikdir (Şəkil 41). Ümumiyyətlə verilmiş funksiyanın qrafikini belə qırmaq olar: əvvəl $y = x^3$ kub parabolasını qurub, sonra onu absis oxu üzrə -1 qədər köçürməli.

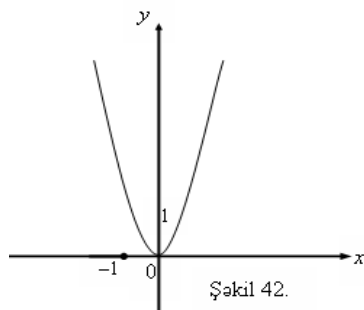


Şəkil 40.

6) Funksiya bütün ədəd oxu üzərində təyin olmuşdur. Verilmiş funksiyanı $y = x^2(x^2 - x + 1)$ şəkildə yazaq. $x^2 - x + 1$ kvadrat üçhədlisinin kökləri xəyali olduğundan x -in ixtiyari həqiqi qiymətində $x^2 - x + 1 > 0$. Beləliklə, araşdırılan funksiyanın yalnız bir (ikiqat) sıfır kökü vardır. $x^2(x^2 - x + 1) \geq 0$ olduğundan funksiyanın qrafiki absis oxundan aşağıda yerləşmir, yalnız koordinat başlanğıcı qrafikin üzərindədir, qrafik nöqtələrə görə qurulur (Şəkil 42).



Şəkil 41.



Şəkil 42.

7) Sürət və məxrəcin kökləri xəyali olduğundan kəsir müsbətdir, deməli x -in ixtiyari qiymətində funksiya müsbətdir və onun qrafiki

absis oxundan yuxarıda yerləşir. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$ yazmaq

olar. Buradan görünür ki, $x \rightarrow \pm\infty$ olduqda $y \rightarrow 1$. Odur ki, $y = 1$ qrafikin asimptotudur. $x = 0$ isə, onda $y = 1$, yəni $(0;1)$ nöqtəsi qrafikin üzərindədir. Verilmiş funksiyanı

$$y = \frac{x^2 - x + 1 + 2x}{x^2 - x + 1} = 1 + \frac{2x}{x^2 - x + 1} = 1 + \frac{2}{-1 + \left(x + \frac{1}{x}\right)}$$

$x > 0$ isə, məlum olduğu kimi $x + \frac{1}{x} \geq 2$, yəni $x = 1$ olduqda

$x + \frac{1}{x}$ ifadəsi 2-yə bərabər minimum qiymətini alır. $x < 0$ olduqda isə,

$x + \frac{1}{x} \leq -2$, yəni $x = -1$ olduqda $x + \frac{1}{x}$ ifadəsi -2-yə bərabər olan

maksimum qiymətini alır. Beləliklə, verilmiş funksiyanın $x = -1$ olduqda 3-ə bərabər maksimum, $x = 1$ olduqda isə $\frac{1}{3}$ -ə bərabər

minimum qiyməti vardır. Deməli, x dəyişəni $-\infty$ dan -1 -ə qədər dəyişdikdə funksiya 1-dən ($y \neq 1$)

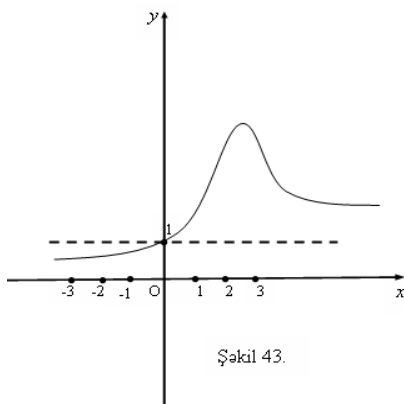
$\frac{1}{3}$ -ə qədər azalır, -1 -dən $+1$ -ə

qədər artdıqda funksiya $\frac{1}{3}$ -dən 3-

ə qədər artır, nəhayət x dəyişəni 1-dən $+\infty$ -a qədər artdıqda funksiya 3-dən 1-ə qədər ($y \neq 1$) azalır (Şəkil 43).

8) Funksiyanın təyin oblastı iki aralıqdır: $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$.

Sağdan və soldan $x \rightarrow 0$ isə, onda $y \rightarrow -\infty$.



Şəkil 43.

Qrafikin ordinat oxundan ibarət şaquli asimptotu vardır. $x \rightarrow +\infty$ isə onda $y \rightarrow 0 (y > 0)$. Beləliklə, qrafikin sağ tərəfidə asimptotik olaraq absis oxuna yaxınlaşır. $y = 0$ isə, onda $x = \frac{2}{3}$. Deməli, qrafik absis

oxunu $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ nöqtəsində kəsir. İndi funksiyanın maksimumunu təyin

edək. $y = \frac{3x-2}{5x^2} = a$ və ya $5ax^2 - 3x + 2 = 0$. Bu tənliyin

diskriminantını sıfıra bərabər edib, $a = \frac{9}{40}$ alırıq. $y = \frac{9}{40}$ qiyməti

üçün absis $x = \frac{4}{3}$. Beləliklə, $x = \frac{4}{3}$ olduqda $y_{\max} = \frac{9}{40}$.

Nəhayət qeyd edək ki, $x = 1$ və $x = 2$ olduqda funksiya $y = \frac{1}{5}$.

Onda verilmiş funksiyanın qrafikini alırıq (Şəkil 44).

9) $\frac{a+x}{a-x} \geq 0$ və $\frac{a-x}{a+x} \geq 0$ (1) bərabərsizlikləri ödənildikdə kök

həqiqidir. (1) şərti iki ciddi bərabərsizliklər sisteminə gəlir. $\begin{cases} a+x > 0 \\ a-x > 0 \end{cases}$

(2) və ya $\begin{cases} a+x < 0 \\ a-x < 0 \end{cases}$ (3) $a > 0$ isə, onda (2)-dən alınır ki, $-a < x < a$

(4). (3) sisteminin isə həlli yoxdur. $a < 0$ isə, onda (3)-dən alırıq ki,

$a < x < -a$ (5). (2) sisteminin isə

həlli yoxdur. (4) və (5)-dən alınır

ki, $-|a| < x < |a|$ (6) olduqda

köklər həqiqidir.

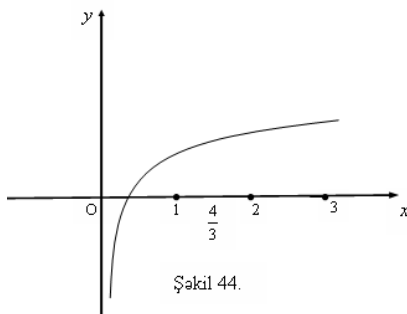
Funksiyanın varlığı üçün

$\frac{a+x}{a-x} \neq \frac{a-x}{a+x}$ (7) olamsı zəruri-

dir, buradan $x \neq a$. (6) və (7)

şərtlərindən alınır ki, verilmiş

funksiyanın təyin oblastı



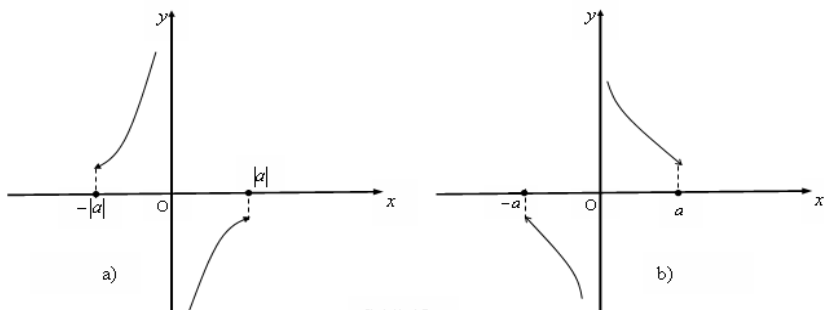
Şəkil 44.

$-|a| < x < 0$ və $0 < x < |a|$ intervallarıdır. İndi verilmiş funksiyanı sadələşdirək. Surət və məxrəci $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ ifadəsinə vurub

$$y = \frac{\frac{a+x}{a-x} + 1}{\frac{a+x}{a-x} - 1} = \frac{a}{x} \text{ alırıq. İndi qrafiki qurmaq olar. Bu funksiyanın}$$

qrafiki, $x = \pm|a|$ düz xətləri arasında yerləşən $y = \frac{a}{x}$ parabola hissəsidir. $a < 0$ isə qrafik 45a, $a > 0$ isə 45 b şəklindədir.

10) $x = 0$ isə, onda $y = 0$. Deməli qrafik koordinat başlanğıcından keçir. $f(-x) = -f(x)$ olduğundan funksiya təkdir, odur ki, qrafikin



Şəkil 45.

sol hissəsi koordinat başlanğıcına nəzərən sağ hissəsilə simmetrikdir. $x \geq 0$ olduqda funksiyanı

$$y = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1})}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} =$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} \text{ şəkildə göstərmək olar. } x \neq 0 \text{ isə, onda}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} \text{ alırıq. Aşkardır ki, } x \rightarrow 0 \text{ isə, onda}$$

$$\frac{y}{x} \rightarrow 1, \text{ yəni } y = x \text{ düz xətti qrafikə } (0;0) \text{ nöqtəsində toxunandır.}$$

Sonra

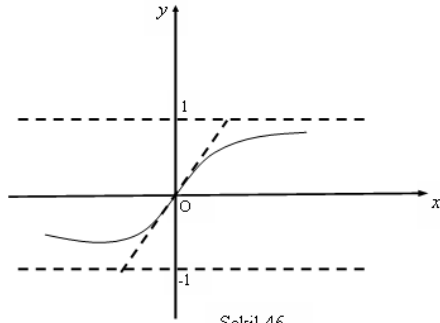
$$y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}. \text{ Buradan}$$

alınır ki, $x \rightarrow +\infty$ isə, onda $y \rightarrow 1$, odur ki, $y = 1$ düz xətti qrafikin üfiqi asimptotudur. Qrafikin koordinat başlanğıcına görə simmetrikliliyinə görə $y = -1$ düz xəttidə onun asimptotudur. (Şəkil 46)

11. Funksiya arqumentinin ixtiyari qiymətində təyin olunmuşdur.

$$2^{-x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2^x = y$$

olduğundan funksiya cütdür. Odur ki, qrafik ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir. Məlumdur ki, $a > 0$ isə $a + \frac{1}{a} \geq 2$. x -

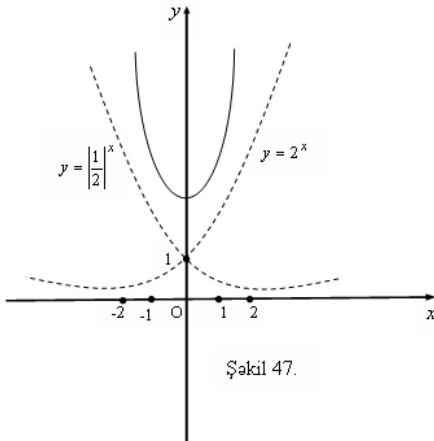


Şəkil 46.

in ixtiyari qiymətində $2^x > 0$

və $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$ olduğundan $2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 2$.

Beləliklə, funksiyanın 2-yə bərabər minimumu vardır. x -in $-\infty$ -dan 0-a qədər dəyişməsilə funksiya $+\infty$ -dan 2-yə qədər azalır, x -in 0-dan $+\infty$ -a qədər dəyişməsilə isə funksiya 2-dən $+\infty$ -a qədər artır. Qurmanı belə aparmaq



Şəkil 47.

olar: 2^x və $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ funksiya-

larının qrafiklərini qururuq, sonra arqumentin eyni qiymətlərində bu qrafikin nöqtələrinin ordinatlarını toplayırıq.

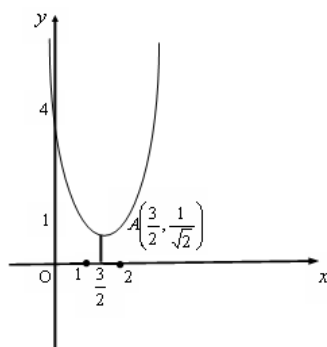
47-ci şəkildə 2^x və $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

funksiyalarının qrafikləri qırıq xətlərlə, verilmiş funksiyanınki isə səlis xətlə göstərilmişdir.

12) $y_1 = x^2 - 3x + 2$ funksiyasına baxaq. $x = \frac{3}{2}$ olduqda bu funksiyanın $-\frac{1}{4}$ -ə bərabər minimumu vardır; beləliklə y_1 funksiyası x arqumenti $-\infty$ -dan $\frac{3}{2}$ -ə qədər dəyişdikdə azalır və arqument $\frac{3}{2}$ -dən $+\infty$ dəyişdikdə artır. α -ın artması ilə 2^α artdığından verilmiş y funksiyası $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ intervalında azalır və $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ intervalında artır.

y_1 funksiyasının minimumu $-\frac{1}{4}$ -ə bərabər olduğundan, verilmiş funksiyanın $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ -yə bərabər olan minimumu vardır. $x = 0$ və ya $x = 3$ olarsa, onda $y = 4$.

Beləliklə, funksiyanın qrafiki 48-ci şəkildə göstərilir.

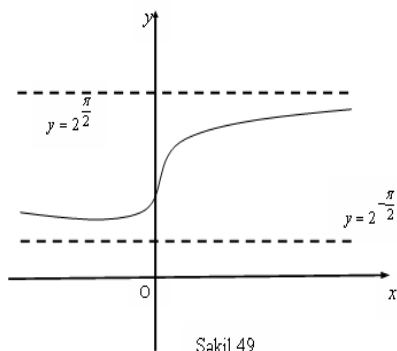


Şəkil 48.

13) Funksiya bütün ədəd oxundan təyin olunmuşdur. $\arctg x$ funksiyası artan olduğundan və əsası birdən böyük olan üstlü funksiya da artan olduğu üçün araşdırılan funksiya artandır. $-\frac{\pi}{2} < \arctg x < \frac{\pi}{2}$

olduğundan $2^{-\frac{\pi}{2}} < y < 2^{\frac{\pi}{2}}$.

Beləliklə, verilmiş funksiyanın qrafiki $y = 2^{-\frac{\pi}{2}}$ və $y = 2^{\frac{\pi}{2}}$ düz xətləri arasındakı zolaqda yerləşir. Bu düz xətlərin özləri qrafikin asimptotlarıdır. Qrafiki dəqiqləşdirmək məqsədilə qeyd edək ki, $x = 0$ olduqda $y = 1$. Qrafik 49-cu şəkildə göstərilir.

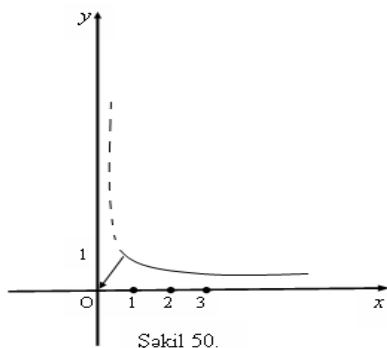


Şəkil 49.

14) Funksiyanın təyin oblastı $\begin{cases} \frac{1+x^2}{2x} + 1 \geq 0 \\ \frac{1+x^2}{2x} - 1 \geq 0 \end{cases}$ və ya $\begin{cases} \frac{(x+1)^2}{2x} \geq 0 \\ \frac{(x-1)^2}{2x} \geq 0 \end{cases}$

bərabərsizliklər sistemindən tapılır. Buradan görünür ki, $x > 0$.

Verilmiş funksiyayı $y = \frac{\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2}} = \frac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|}$ şəklində



Şəkil 50.

yazaq. $0 < x < 1$ isə, onda $y = x$,
 $x \geq 1$ olduqda isə $y = \frac{1}{x}$. Beləliklə,

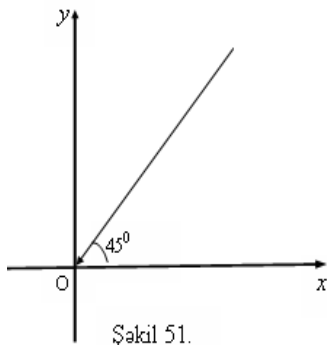
$$y = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$
 funksiyasının qrafiki-

ni qurmalyıq

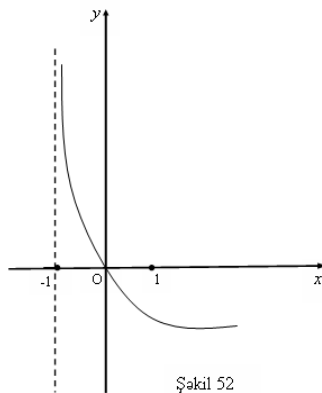
(Şəkil 50). Bu şəkildə qrafik
səlis xətlə göstərilmişdir.

15) Funksiyanın təyin oblastı
 $(0; \infty)$ - intervalıdır. Loqarifmanın

tərifinə görə $a^{\log_a x} = x$ olduğundan, $y = x$, burada $x > 0$. Qrafik 51-
ci şəkildə göstərilir.



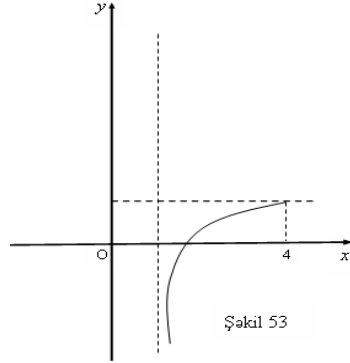
Şəkil 51.



Şəkil 52

16) Funksiyanın təyin oblastını $x+1 > 0$ şərtindən tapırıq.
Buradan $x > -1$. $x \rightarrow -1$ -də $y \rightarrow +\infty$. Buradan alınır ki, $x=-1$ düz
xətti şaquli asimptotdur. $x=0$ olduqda $y=0$. deməli qrafik koordinat
başlanğı-cından keçir (Şəkil 52).

17) $\log_2 x$ -in varlığı üçün $x > 0$, $\log_2 \log_2 x$ -in varlığı üçün isə $\log_2 x > 0$ olmalıdır, yəni $x > 1$ və $x = 1$ qrafikin asimptotudur. $\log_2 x = 1$ yəni $x = 2$ isə, onda $y = 0$. Beləliklə qrafik absis oxunu $(2; 0)$ nöqtəsində kəsir. $x \rightarrow 1$ isə onda $y \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$ isə, onda $y \rightarrow \infty$, həm də x arqumenti y -ə nisbətən “surətlə” artır. $x=4$ olduqda $y=1$. Deyilənlərə əsasən qrafik qurulur (Şəkil 53).

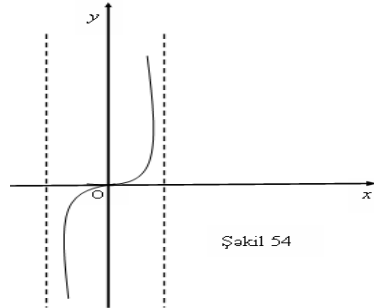


Şəkil 53

18) Təyin oblastını $(x+1)(x-1) < 0$ bərabərsizliyi ilə eynigüclü olan $\frac{1+x}{1-x} > 0$ bərabərsizliyindən tapırıq,

buradan $-1 < x < 1$. Beləliklə qrafik $x=1$ və $x=-1$ düz xətləri arasındakı zolaqda yerləşir. Sağdan $x \rightarrow -1$ da $y \rightarrow -\infty$, soldan $x \rightarrow 1$ da isə $y \rightarrow \infty$ olduğundan $x=1$ və $x=-1$ düz xətləri qrafikin asimptotlarıdır.

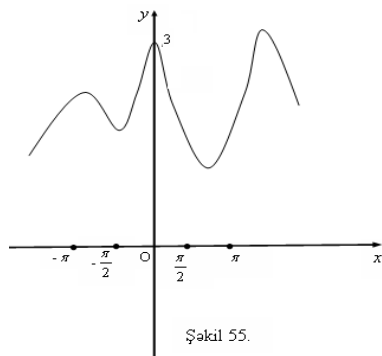
$\frac{1}{2} \log_2 \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1+x}{1-x}$ olduğundan funksiya təkdir. Odur ki, qrafik koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir. $x=0$ olduqda $y=0$ olduğundan qrafik koordinat başlanğıcından keçir (Şəkil 54).



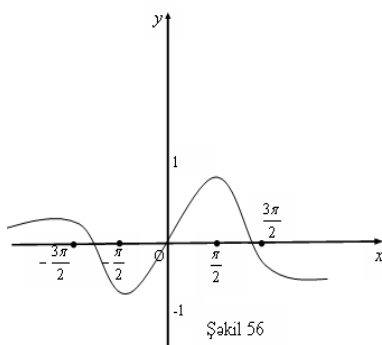
Şəkil 54

19) Funksiya bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur.

$$\begin{aligned}
 y &= 4 \left(\cos^4 \frac{x}{2} + 2 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^4 \frac{x}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \right) = \\
 &= 4 \left[\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \right] = 4 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 x \right) = 4 - 2 \sin^2 x = 4 - (1 - \cos 2x) = \\
 &= 3 + \cos 2x. \quad y = 3 + \cos 2x.
 \end{aligned}$$



Şəkil 55.



Şəkil 56

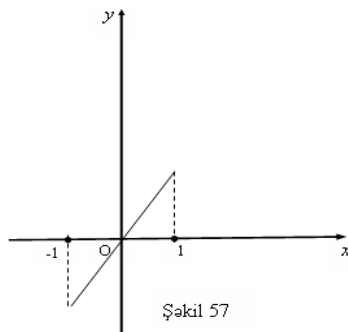
Beləliklə, $\cos 2x$ funksiyasının qrafikini qurub, sonra isə onu ordinat oxu boyunca üç vahid yuxarı qaldırıyıq. (Şəkil 55)

20) $\cos x = 0$ olduqda $tg x$ -in mənası olmadığından $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$.

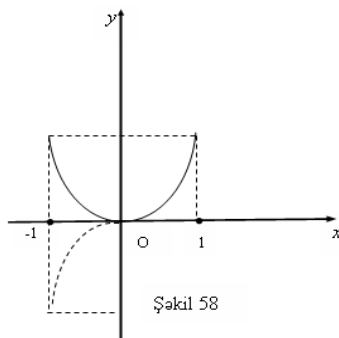
$\cos x \neq 0$ isə onda $y = \sin x$. Deməli, verilmiş funksiyanın qrafiki $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, burada $k = 0; \pm 1; \pm 2, \dots$, nöqtələri kənar edilmiş sinusoiddir (Şəkil 56).

21) x -hər hansı ədədin sinusu olduğundan, funksiya $[-1; 1]$ parçasında təyin olunmuşdur. $y = \sin(\arcsin x) = x$, odur ki, funksiyanın qrafiki birinci və üçüncü koordinat bucaqlarının tənbölənindən ibarət $x = -1$ və $x = 1$ düz xətləri arasında yerləşən parçadır (onun ucları da daxil olmaqla) (Şəkil 57).

22) Funksiya $[-1; 1]$ parçasında təyin olmuşdur. $y_1 = \arcsin x$ funksiyasının qrafikini qurub, sonra qrafikin ordinatı mənfə olan hissəsini absis oxuna nəzərən inikəs etməklə verilmiş funksiyanın qrafikini alırıq (Şəkil 58).



Şəkil 57



Şəkil 58

23) Funksiyanın mənası olması üçün $\left| \frac{1-x^2}{1+x^2} \right| \leq 1$ olmalıdır. Bu

münasibət x -in bütün qiymətlərində doğrudur, beləliklə funksiya bütün həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin olunmuşdur. funksiya cüt olduğundan odur ki, yalnız $x \geq 0$ üçün ona baxaq. Verilmiş bərabərlikdən alınır ki,

$$\cos y = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Münasiblik üçün $\operatorname{tg} \frac{y}{2}$ -ni tapaq:

$$\operatorname{tg} \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}} = \sqrt{x^2} = x \quad (1).$$

$$0 \leq y < \pi, \quad 0 \leq \frac{y}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{olduğundan}$$

$\operatorname{tg} \frac{y}{2} \geq 0$. Odur ki, (1) bərabərliyində kökün qarşısında müsbət işarəni götürmək lazımdır. (1)-dən $\frac{y}{2} = \operatorname{arctg} x$

və ya $y = 2\operatorname{arctg} x$ alırıq. Beləliklə,

verilmiş funksiyanın $0 \leq x < +\infty$ yarım intervalında qrafiki (Şəkil 59). $y = \operatorname{arctg} x$ -in qrafikinə ordinatını iki dəfə böyütməklə alınır.

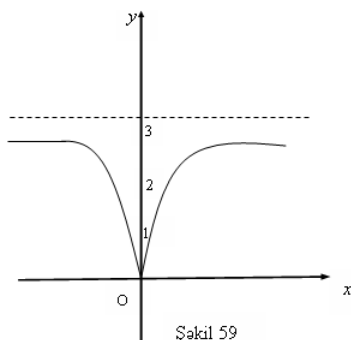
$$16. \quad 0 < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \quad \text{və} \quad -1 < \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1 \quad \text{olduğundan}$$

araşdırdığımız funksiya x -in ixtiyari qiymətində təyin olunmuşdur.

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \arccos \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = \arccos \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$$

-dir. Odur ki, $y = \arccos \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. $x \geq 0$ isə, onda

$$\arccos \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$



Deməli, $y = 0$. $x < 0$ olduqda $\arccos \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} = \pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

onda $y = \pi - 2 \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

17. Tənliyin sol tərəfinin varlığı üçün $x > 0$ (1) olmalıdır. Tənliyin sağ tərəfinin varlığı üçün isə $-x^2 - 3x - 2 \geq 0$ və ya $x^2 + 3x + 2 \leq 0$ ödənilməlidir. Bu bərabərsizliyin sol tərəfinin kökləri -1 və -2 ədədləridir. Beləliklə, sonuncu bərabərsizliyin ödənilməsi, beləliklə isə verilmiş tənliyin sağ tərəfinin varlığı üçün x -in $-2 \leq x \leq -1$ (2) bərabərsizliyini ödəməsi lazımdır. (1) və (2) münasibətləri bir-birinə zidd olduğundan verilmiş tənliyin həqiqi həlli yoxdur.

18. Tənliyin sol tərəfinin varlığı üçün $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ bərabərsizliyi ödənilməlidir. 2 və 3 ədədləri bu bərabərsizliyin sol tərəfinin kökləridir. Oudur ki, bu bərabərsizlik $x \geq 3$ və ya $x \leq 2$ (1) olduqda ödənilir. Tənliyin sağ tərəfinin varlığı üçün $9x - 10 - 2x^2 \geq 0$ və ya $2x^2 - 9x + 10 \leq 0$ olmalıdır. 2 və 2,5 ədədləri bu bərabərsizliyin sol tərəfinin kökləridir. Oudur ki, bu bərabərsizlik $2 \leq x \leq 2,5$ (2) olduqda ödənilir. (1) və (2) –dən alınır ki, verilmiş bərabərsizliyin hər iki tərəfi eyni zamanda yalnız $x=2$ olduqda mənalıdır. 2 ədədi verilmiş tənliyin köküdür, çünki $x=2$ olduqda verilmiş tənliyin hər iki tərəfi sıfıra bərabərdir.

19. Verilmiş bərabərliyi çevirmədən sonra

$y = nx^2 - 2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$ şəkildə yazsa

bilərik. Məlumdur ki, $y = ax^2 + bx + c$ funksiyasının $x = -\frac{b}{2a}$

olduqda minimumu vardır, burada $a > 0$. Oudur ki, verilmiş funksiyanın

$x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ olduqda minimumu vardır.

20. Verilmiş funksiyanın bütün ədəd oxunda kəsilməz olması üçün $a - x^2 \neq 0$ olmalıdır. Bu isə yalnız $a < 0$ olduqda mümkündür. Deməli, a -nın $(-\infty, 0)$ intervaldakı qiymətlərində verilmiş funksiya bütün ədəd oxunda kəsilməzdir.

21. İkiqat argument düsturundan istifadə edərək tənliyin sol tərəfini çevirək. Sağ tərəfdə isə sinuslar cəmini hasilə çevirək. Bu çevirmələrdən sonra verilmiş tənlik iki $\sin 4x = 0$, $\cos 4x = \cos^2 3x$ tənliklərinə ayrılır. Sonuncu tənliyin sağ tərəfində qüvvətin dərəcəsinə aşağı saldıqdan sonra $\cos 4x - \cos 6x = 2 - \cos 4x$ alırıq. bu tənliyin sol tərəfindəki kosinusların fərqi hasilə çevirdikdən sonra alınmış tənlik aşağıdakı iki tənliyə ayrılır. $\sin x = 0$, $\sin 5x = 2 \sin 2x \cos x$. Sonuncu tənliyin sağ tərəfini sinusların cəmi şəkilində göstərək. Onda alınmış tənlik asanlıqla $2 \cos 4x \sin x = \sin x$ şəklinə gətirilir. Buradan $\sin x = 0$, $\cos 4x = \frac{1}{2}$. Beləliklə, $x = \frac{k\pi}{4}$, $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$.

22. Verilmiş tənliyi $\log_{\cos} \left(\frac{1}{2} - \cos x \right) + 2 \log_{\frac{1}{2} - \cos x} \cos x - 3 = 0$

şəklinə gətirmək olar. $\log_{\cos} \left(\frac{1}{2} - \cos x \right) = y$ əvəz edib $y^2 - 3y + 2 = 0$,

buradan $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ alırıq. Onda $\log_{\cos x} \left(\frac{1}{2} - \cos x \right) = 1$ və $\log_{\cos x} \left(\frac{1}{2} - \cos x \right) = 2$.

Birinci tənlikdən $\cos x = \frac{1}{4}$, $x = 2k\pi \pm \arccos \frac{1}{4}$, ikinci tənlikdən isə $2 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0$, $x = 2k\pi \pm \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ alırıq.

23. Məsələni qrafik həll etmək məqsəduyğundur. Sistemin ikinci tənliyi radiusu a , mərkəzi koordinat başlanğıcında olan çevrənin tənliyidir. $\cos \frac{\pi a}{2} > 0$ və ya $0 \leq |a| < 1$, $4n-1 < |a| < 4n+1$,

$n = 1, 2, 3, \dots$. Onda birinci tənlik $4(x + y - 2) = 2 \left(2x - y^2 - \frac{20}{9} \right)$

şəklinə düşür, buradan $y_1 = \frac{2}{3}$, $y_2 = -\frac{8}{3}$. Beləliklə, a -nın göstərilən qiymətlərində məsələ çevrənin iki paralel düz xətlə kəsişmə

nöqtələrinin tapılmasına gəlir. $\cos \frac{\pi a}{2} < 0$, yəni $4n-3 < |a| < 4n-1$,
 $n=1,2,3,\dots$ olduqda birinci tənlik $x+y-2=0$ düz xətt tənliyinə
gəlir. İndi bu düz xəttin çevrə ilə kəsişmə nöqtələrini tapmaq lazımdır.

$0 \leq |a| < \frac{2}{3}$, $1 < |a| < 2$ olduqda həll yoxdur.

$|a| = \frac{2}{3}$, $|a| = \sqrt{2}$ olduqda sistemin 1-həlli, $\frac{2}{3} < |a| < 1$,
 $\sqrt{2} < |a| < 3$, $4n-3 < |a| < 4n-1$ ($n=2,3,\dots$) olduqda 2 həlli,
 $4n-1 < |a| < 4n+1$ ($n=1,2,\dots$) olduqda 4 həlli vardır.

24. $\sin 2x > 0$ isə, onda $1 + \sin 2x > 1$, $1 - \sin 2x \leq 1$. Odur ki,
verilmiş tənlik $-\log_{\frac{1}{3}}^{(1+\sin 2x)} + \log_{\frac{1}{3}}^{(1-2x)} = 1$ ilə eynigüclüdür.

Sonuncu tənlikdən potensiallaşdıramadan sonra $\frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x} = \frac{1}{3}$ və

buradan $\sin 2x = \frac{1}{2} (> 0)$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ alırıq.

Tamamilə analoji olaraq $\sin 2x < 0$ isə, onda $1 + \sin 2x < 1$,
 $-\sin 2x > 1$. Beləliklə, verilmiş tənlik $\log_{\frac{1}{3}}^{(1+\sin 2x)} - \log_{\frac{1}{3}}^{(1-\sin 2x)} = 1$
şəklinə düşür. Buradan $\sin 2x = -\frac{1}{2} (< 0)$, $x = -(-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ tapırıq.

Onda son nəticə $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ olur.

25. Tənliyin hər tərəfini $\sqrt{2+p}$ -yə bölüb $\frac{1}{\sqrt{2+p}} = \sin \alpha$ ilə
əvəz edək. Onda $\cos \alpha = \frac{\sqrt{1+p}}{\sqrt{2+p}}$ və $\sin(x+\alpha) = \frac{1+\sqrt{1-p}}{\sqrt{2+p}}$ alırıq.

Alınmış sonuncu tənliyin sağ tərəfi $-1 \leq \frac{1+\sqrt{1-p}}{\sqrt{2+p}} \leq 1$
bərabərsizliyini ödəməlidir. $\frac{1+\sqrt{1-p}}{\sqrt{2+p}}$ kəsri həmişə müsbət

olduğundan, $1 + \sqrt{1-p} \leq \sqrt{2+p}$ bərabərsizliyinin ödənilməsi kifayətdir. Sonuncu bərabərsizliyi həll edib $p \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ və $p \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ alırıq. Bu bərabərsizliklərə verilmiş tənliyin təyin oblastı ilə birlikdə baxıb $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq p \leq 1$ tələb ediləni alırıq.

26. Sistemin birinci tənliyində $2^{x-y} = t$ əvəz edib $t_1 = -2, t_2 = 1$ alırıq. $2^{x-y} \neq -2$. $2^{x-y} = 2^0$, $x = y$. Onda sistemin ikinci tənliyi $2^{2x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = 5$ şəklinə düşər. Buradan $x_1 = -\frac{1}{2}, y_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{2}$ alırıq.

27. Fərz edək ki, birinci və ikinci cismin sürətləri uyğun olaraq x və y -dir. Şərtə görə $x > y$. Bərabərsürətli hərəkətin $\vartheta = \frac{S}{t}$ düsturundan istifadə etməklə alırıq ki, birinci cismin radiusu R olan tam dövrdə hərəkətinə sərf edilən vaxt $\frac{2\pi R}{x}$, ikincinin bu dövrü etməsi üçün sərf edilən vaxt isə $\frac{2\pi R}{y}$ -dir, burada S -gedilən yol, t - zaman, ϑ - sürətdir. Məsələnin şərtinə görə $\frac{2\pi R}{y} - \frac{2\pi R}{x} = t (t > 0)$.

İki cismin çevrə üzrə növbəti görüşündən sonra onların sonrakı görüşü birinci cisim ikincini tam dövr ötdükdən sonra başqa sözlə birinci və ikinci cisimlərin aralarındakı məsafələrin fərqi $2\pi R$ -ə bərabər olduqda baş verir. Buna sərf edilən vaxt a -ya bərabərdir.

Beləliklə, $xa - ya = 2\pi R (a > 0)$. Çevirmədən sonra
$$\begin{cases} x - y = \frac{2\pi R}{a} \\ x - y = \frac{t}{2\pi R} xy \end{cases}$$
 tənliklər sistemini və onu həll edib: $y = x - \frac{2\pi R}{a}, \frac{2\pi R}{a} = \frac{t}{2\pi R} x \left(x - \frac{2\pi R}{a} \right)$,

$$x^2 - \frac{2\pi R}{a}x - \frac{(2\pi R)^2}{at} = 0, \quad x_{1,2} = \frac{\pi R}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{\pi R}{a}\right)^2 + \frac{(2\pi R)^2}{at}} = \frac{\pi R}{a} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4a}{t}}\right)$$

alırıq. $a > 0, t > 0$ olduğundan $1 + \frac{4a}{t} > 1$, odur ki, $\sqrt{1 + \frac{4a}{t}} > 1$ və tənliyin iki kökü mənfi olduğundan məsələnin mənasına görə atılmalıdır. Beləliklə, birinci cismin sürəti $x = \frac{\pi R}{a} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a}{t}}\right)$,

onda $y = \frac{\pi R}{a} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a}{t}} - 2\right) = \frac{\pi R}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{4a}{t}} - 1\right)$. Göründüyü kimi $y > 0$.

28. Tənliyin sol tərəfini vuruqlarına ayıraq: $(\sqrt{a+x} - x)(\sqrt{a+x} + x) = \sqrt{a+x} + x$. Buradan çevirmədən sonra $(\sqrt{a+x} - x)(\sqrt{a+x} - x - 1) = 0$ alırıq. Bu tənlik iki tənliyə ayrılır: $\sqrt{a+x} + x = 0$ (1), $\sqrt{a+x} = x + 1$ (2). Şərtə görə $a \geq 0$ və bizi $x \geq 0$ qiyməti maraqlandırdığından $\sqrt{a+x} \geq 0$. Bu şərtlə (1) bərabərliyi yalnız $a = 0$ və $x = 0$ olduqda ödənə bilər. (2) tənliyinə gəldikdə isə görürük ki, verilmiş şərtlə onun hər iki tərəfi mənfi deyil, beləliklə $a + x = x^2 + 2x + 1$, buradan $x^2 + x + 1 - a = 0$ və $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$. $a \geq \frac{3}{4}$ olduqda hər iki kök həqiqidir, ikinci kök

isə mənfidir. $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}$ birinci kökün mənfi olmaması üçün

əlavə olaraq $\sqrt{4a-3} \geq 1$ şərti ödənilməlidir. Beləliklə, $a \geq 1$ olduqda

(2) tənliyinin mənfi olmayan həqiqi $x = \frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}$ kökü vardır.

Nəticədə belə cavab alırıq: $a = 0, x = 0$. $a \geq 1$ olduqda

$x = \frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}$; $0 < a < 1$ olduqda isə axtarılan kök yoxdur.

29. $11=x$ olduğundan $12=x+1$. Onda verilmiş ifadə
 $x^{17} - (x+1)x^{16} + (x+1)x^{15} - (x+1)x^{14} + \dots - (x+1)x^2 + (x+1)x - 1 = x^{17} - x^{17} - x^{16} + x^{16} + x^{15} -$
 $- x^{15} - x^{14} + \dots - x^3 - x^2 + x^2 + x - 1 = x - 1 = 10$ olar.

30. Aşağıdakı həll aşkardır:

$$x = \text{ixtiyari}, y = 0, z = 0;$$

$$x = 0, y = \text{ixtiyari}, z = 0; \quad (1)$$

$$x = 0, y = 0, z = \text{ixtiyari}$$

$xyz \neq 0$ olsun. Tənliklər sisteminin hər bir tənliyini $x^2 y^2 z^2$ -na bölüb verilən sistemlə eynigüclü

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3, \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} + 4, \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 5 \end{cases} \quad (2)$$

sistemi alırıq.

(2) tənliklərini tərəf-tərəfə toplayıb mütərizələri açıdıqdan sonra

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 12 = 0 \text{ və buradan } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -3 \text{ və}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 \text{ alırıq. Birinci halda (2) sistemi}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x} + 3\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3, \\ \left(\frac{1}{y} + 3\right)^2 = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} + 4, \\ \left(\frac{1}{z} + 3\right)^2 = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 5 \end{cases} \text{ şəklinə düşür. Buradan } x = -\frac{5}{6}, y = -1,$$

$$z = -\frac{5}{4} \text{ alırıq. İkinci halda isə } x = \frac{9}{13}, y = \frac{3}{4}, z = \frac{9}{11} \text{ olur.}$$

31. Aşağıdakı çevirmələri aparaq:

$$(\sin 6x + \sin 18x) + (\sin 8x + \sin 16x) + 16 \sin 3x = 0,$$

$$2 \sin 12x \cos 6x + 2 \sin 12x \cos 4x + 16 \sin 3x = 0,$$

$$2 \sin 12x (\cos 6x + \cos 4x) + 16 \sin 3x = 0,$$

$$4 \sin 3x (\cos 6x \cos 5x \cos 3x \cos x + 1) = 0.$$

İki tənlik alırıq.

$$1) \sin 3x = 0, \text{ buradan } x = \frac{\pi k}{3}, k = 0, \pm 1, \dots$$

$$2) \cos 6x \cos 5x \cos 3x \cos x = -1.$$

Bu tənliyin heç olmasa bir həlli varsa, $|\cos nx| \leq 1$ olduğundan, onun bütün həlləri $|\cos nx| = 1$ tənliyini yəni $\sin 3x = 0$ tənliyini ödəyir. Beləliklə ikinci tənlikdən yeni həll alınmır, odur ki, verilmiş tənliyin bütün həlləri $x = \frac{k\pi}{3}, k = 0, \pm 1, \dots$ düsturu ilə verilir.

321. Məsələni aşağıdakı kimi də ifadə etmək olar: x, y -in hansı həqiqi qiymətlərində $x + yi = \frac{c-1}{2c-1}$ tənliyinin (məchul c üçün) həqiqi həlli vardır? Aşkardır ki, bu tənlik $(2c-i)(x+iy) = c-i$ tənliylə eynigüclüdür. Bu tənlik isə öz növbəsində $(2x-1)c = -y, 2cy = x-1$ tənliklər sisteminə gəlir. $x = \frac{1}{2}$ isə, onda bu sistemin həlli yoxdur; $y=0$

isə, onda sistemin $x=1$ olduqda $c=0$ həlli vardır; $x \neq \frac{1}{2}$ və $y \neq 0$

olduqda isə onda yalnız və yalnız $\frac{-y}{2x-1} = \frac{x-1}{2y}$ və ya

$2x^2 - 3x + 1 + 2y^2 = 0$ olduqda sistemin həlli vardır. Alınmış bərabərsizliyin hər tərəfini 2 -yə bölüb və sol tərəfdə tam kvadrat ayırısaq (x -ə nəzərən) alırıq ki, z nöqtəsinin x, y koordinatları (z ədədinin

həqiqi və xəyali hissələri) $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{16}$ tənliyini ödəyir. Əvvəl

alınmış $x \neq \frac{1}{2}$ şərtini nəzərə almaqla belə nəticəyə gəlirik ki, axtarılan

nöqtələr çoxluğu radiusu $\frac{1}{4}$ mərkəzi $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ nöqtəsində olan, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ nöqtəsi kənar edilmiş çevrədir.

32₂. Tənliyin hər tərəfini $\sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 15} - \sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 13}$ ifadəsinə vurub $2(x+1) = (x+1)(\sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 15} - \sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 13})$ alırıq. $x = -1$ verilmiş tənliyin kökü olmadığından o

$$\begin{cases} \sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 15} + \sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 13} = x + 1 \\ \sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 15} - \sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 13} = 2 \end{cases} \quad \text{sistemilə}$$

eynigüclüdür. Buradan çevirmədən sonra onunla eynigüclü

$$\begin{cases} 2\sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 15} = x + 3, \\ 2\sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 13} = x - 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 4(x^3 - 4x^2 + x + 15) = (x + 3)^2, \\ 4(x^3 - 4x^2 - x + 13) = (x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(4x^2 - 5x - 17) = 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad \text{sistemlərini, sonuncu sistemdən isə } x_1 = 3,$$

$$x_2 = \frac{5 + 3\sqrt{33}}{8} \quad (x_3 = \frac{5 - \sqrt{33}}{8} \text{ sistemin ikinci şərtini ödəmir}).$$

33. $\log_b^a > 0$, $\log_c^b > 0$, $\log_a^c > 0$ olduğundan ədədi və həndəsi orta arasındakı bərabərsizliyi tətbiq etməklə

$$\begin{aligned} \frac{\log_b^a}{a+b} + \frac{\log_c^b}{b+c} + \frac{\log_a^c}{c+a} &= \frac{2\log_b^a}{a+b} + \frac{2\log_c^b}{b+c} + \\ + \frac{2\log_a^c}{c+a} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{8\log_b^a \log_c^b \log_a^c}{(a+b)(b+c)(c+a)}} = \frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq \frac{3 \cdot 6}{(a+b) + (b+c) + (c+a)} = \frac{9}{a+b+c} \end{aligned}$$

alıraq.

34. Fərz edək ki, $a \neq 0$, $b \neq 0$ onda aşkar çevriməldən sonra

$$\text{verilmiş sistem} \begin{cases} a \cos^2(x+y) + b \cos^2(x-y) = a+b-2, \\ \frac{a}{\cos^2(x+y)} + \frac{b}{\cos^2(x-y)} = a+b+2, \\ \frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)} = \frac{a}{b} \end{cases} \quad \text{şəklinə düşür.}$$

Birinci və ikinci tənlikləri tərəf-tərəf vurub, üçüncünü nəzərə almaqla $a^2 + b^2 + ab \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) = (a+b)^2 - 4$ və buradan

$(a^2 - b^2)^2 = -4ab$ alınır. $a = 0, b \neq 0$ və ya $a \neq 0, b = 0$ isə, onda verilmiş sistemin həlli yoxdur. Doğrudan da, məsələn $a = 0$ və $b \neq 0$

olduqda sistem
$$\begin{cases} b \sin^2(x-y) = 2, \\ btg^2(x-y) = 2, \\ tgxtgy = -1 \end{cases}$$
 şəklinə gəlir. Buradan

$\sin^2(x-y) \neq 0$, $\cos^2(x-y) = 1$ alırıq ki, bu da eyni zamanda ödənilməz.

35. Aşkardır ki, baxılan sistemin aşağıdakı müsbət həlləri vardır: $x_1 = x_3 = x_5 = x_7 = m$, $x_2 = x_4 = x_6 = x_8 = n$. Sistemin başqa müsbət həllərinin olmadığını göstərək. Doğrudan da fərz edək ki, $x_1 < m$, onda $x_2 > n$ (Çünki, $x_1 + x_2 = m + n$) və $x_3 < m$ (çünki, $x_2 \cdot x_3 = nx_1 < mn$). Analoji olaraq $x_4 > n$, $x_5 < m$, $x_6 > n$, $x_7 < m$, $x_8 > n$, lakin $x_8 = \frac{nx_1}{m} < n$ alınır ki, bu əvvəlki bərabərsizliklərə ziddir. Eyni qayda ilə $x_1 > m$ fərz etdikdə ziddiyyət alınır.

36. $(1+x)^n$ binomunun açılışında x^i -nin qarşısındakı əmsal C_n^i , $x^{n-(i+k)}$ -nin qarşısındakı əmsal isə $C_n^{n-(i+k)}$ -dir. Onda $\sum_{i=0}^{n-k} C_n^i C_n^{n-(i+k)}$

ifadəsi $(1+x)^n (1+x)^n$ -nin açılışında x^{n-k} -nin qarşısındakı əmsaldır. Digər tərəfdən $(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}$ olduğundan bu əmsal C_{2n}^{n-k} - ya bərabərdir. Yəni
$$\sum_{i=0}^{n-k} C_n^i C_n^{n-(i+k)} = C_{2n}^{n-k} \quad (1)$$

Məlumdur ki, $C_n^k = C_n^{n-k}$ eyniliyi doğrudur. Odur ki, $C_n^{n-(i+k)} = C_n^{n-n+i+k}$ və $C_{2n}^{n-k} = C_{2n}^{2n-n+k} = C_{2n}^{n+k}$ (1) bərabərliyində

bunları nəzərə alıb tələb edilən $\sum_{i=0}^{n-k} C_n^i C_n^{i+k} = C_{2n}^{n+k}$ eyniliyini alırıq.

37. Tam ədədlər sahəsində kökəlməyə onun cütlüyü dəyişmədiyinə həmişə aşağıdakı əvəzetməni aparmaq olar:

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-1} &= 2m-1, \\ \sqrt[3]{2y-2} &= 2t, \\ \sqrt[4]{4z-3} &= 2n-1\end{aligned}\quad (1)$$

Burada m, n müsbət tam, t isə tam ədədlərdir. (1) ifadələrini verilmiş tənlikdə yerinə yazıb $(2m-1)+2t+(2n-1)=10$ və ya $m+t+n=6$, buradan $t=6-m-n$ (2) alırıq. (1) münasibətlərindən x, y, z tapıb və (2) -ni nəzərə alsaq $x = 2m^2 - 2m + 1$, $y = 4(6-m-n)^3 + 1$, $z = (n^2 - n)(4n^2 - 4n + 2) + 1$ tapırıq, burada m, n ixtiyari tam ədədlərdir.

38. a və b ədədlərindən birini loqarifmlərin əsası qəbul edək. Məsələn, a əsasdan loqarifməyə keçək:

$$\log_{N_1}^{M_1} = \frac{\log_a^{M_1}}{\log_a^{N_1}} = \frac{\log_a^{(a^{m_1}b^{n_1})}}{\log_a^{(a^{p_1}b^{q_1})}} = \frac{m_1 + n_1 \log_a b}{p_1 + q_1 \log_a b} = \alpha; \log_a b = x$$

olsun, onda $\frac{m_1 + n_1 x}{p_1 + q_1 x} = \alpha$ tənliyini və buradan $x = x_1$ kökünü yəni $\log_a b = x_1$ tapırıq. Sonra

$$\log_{N_2}^{M_2} = \frac{\log_a^{M_2}}{\log_a^{N_2}} = \frac{\log_a^{(a^{m_2}b^{n_2})}}{\log_a^{(a^{p_2}b^{q_2})}} = \frac{m_2 + n_2 \log_a b}{p_2 + q_2 \log_a b}$$

İndi $\log_a b$ yerində onun x_1 qiymətini yazıb $\log_{N_2}^{M_2}$ - i hesablayırıq.

39. 56, 98, 7, 14 ədədlərini vuruqlarına ayıraq: $56 = 2^3 \cdot 7$, $98 = 2 \cdot 7^2$, $7 = 7$, $14 = 2 \cdot 7$. Ədədlərdən hər biri 2 və 7 ədədlərinin qüvvətləri hasilinə bərabərdir. Onlardan birini, məsələn 2-ni loqarifmin əsası qəbul edək. 2 əsasdan loqarifməyə keçək:

$$\log_{98}^{56} = \frac{\log_2 56}{\log_2 98} = \frac{\log_2 (2^3 \cdot 7)}{\log_2 (2 \cdot 7^2)} = \frac{3 + \log_2 7}{1 + 2 \log_2 7} = \alpha; \log_2 7 = x \text{ olsun,}$$

onda $\frac{3+x}{1+2x} = \alpha$ tənliyini alırıq. Buradan $x = \frac{\alpha-3}{1-2\alpha}$, yəni

$$\log_2^7 = \frac{\alpha - 3}{1 - 2\alpha}. \text{ Sonra } \log_7^{14} = \frac{\log_2^{14}}{\log_2^7} = \frac{1 + \log_2^7}{\log_2^7}. \log_2^7\text{-in yerinə}$$

onun qiymətini yazıb $\log_7^{14} = \frac{2 + \alpha}{3 - \alpha}$ alırıq.

40. Üç a, b, c ədədlərindən birini məsələn a -nı loqarifmanın əsası qəbul edək. a əsasdan loqarifma keçək:

$$\log_{N_1}^{M_1} = \frac{\log_a^{M_1}}{\log_a^{N_1}} = \frac{\log_a^{(a^{m_1} b^{n_1} c^{k_1})}}{\log_a^{(a^{p_1} b^{q_1} c^{r_1})}} = \frac{m_1 + n_1 \log_a b + k_1 \log_a c}{p_1 + q_1 \log_a b + r_1 \log_a c} = \alpha$$

$$\log_{N_2}^{M_2} = \frac{\log_a^{M_2}}{\log_a^{N_2}} = \frac{\log_a^{(a^{m_2} b^{n_2} c^{k_2})}}{\log_a^{(a^{p_2} b^{q_2} c^{r_2})}} = \frac{m_2 + n_2 \log_a b + k_2 \log_a c}{p_2 + q_2 \log_a b + r_2 \log_a c} = \beta$$

$\log_a b = x$ və $\log_a c = y$ olsun, onda iki məchullu iki tənliklər sistemi alırıq:

$$\begin{cases} \frac{m_1 + n_1 x + k_1 y}{p_1 + q_1 x + r_1 y} = \alpha, \\ \frac{m_2 + n_2 x + k_2 y}{p_2 + q_2 x + r_2 y} = \beta \end{cases}$$

Fərz edək ki, bu tənliklərin $x = x_1$ və $y = y_1$ həlləri vardır, yəni $\log_a b = x_1$, $\log_a c = y_1$. Sonra $\log_{N_3}^{M_3}$ -ü tapırıq:

$$\log_{N_3}^{M_3} = \frac{\log_a^{M_3}}{\log_a^{N_3}} = \frac{\log_a^{(a^{m_3} b^{n_3} c^{k_3})}}{\log_a^{(a^{p_3} b^{q_3} c^{r_3})}} = \frac{m_3 + n_3 \log_a b + k_3 \log_a c}{p_3 + q_3 \log_a b + r_3 \log_a c}.$$

$\log_a b$ və $\log_a c$ -nin yerində onların x_1, y_1 qiymətlərini yazıb $\log_{N_3}^{M_3}$ -ü tapırıq.

41. Verilmiş ədədləri vuruqlarına ayırıq: $6 = 2 \cdot 3$, $63 = 3^2 \cdot 7$, $21 = 3 \cdot 7$, $18 = 2 \cdot 3^2$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $147 = 3 \cdot 7^2$. Ədədlərdən hər biri 2, 3 və 7 ədədlərinin qüvvətləri hasilinə bərabərdir. Onlardan birini,

məsələn 2-ni loqarifmin əsası qəbul edək. 2 əsasdan loqarifməyə keçək.

$$\log_2^{63} = \frac{\log_2(3^2 \cdot 7)}{\log_2(2 \cdot 3)} = \frac{2\log_2^3 + \log_2^7}{1 + \log_2^3} = \alpha,$$

$$\log_{21}^{18} = \frac{\log_2(2 \cdot 3^2)}{\log_2(3 \cdot 7)} = \frac{1 + 2\log_2^3}{\log_2^3 + \log_2^7} = \beta. \quad \log_2^3 = x, \quad \log_2^7 = y$$

olsun. Onda iki məchullu iki tənliklər sistemi alırıq:
$$\begin{cases} \frac{2x + y}{1 + x} = \alpha, \\ \frac{1 + 2x}{x + y} = \beta \end{cases}$$

$$\text{Buradan } x = \log_2^3 = \frac{\alpha\beta + 1}{3\beta - 2\beta - 2}, \quad y = \log_2^7 = \frac{\alpha\beta - \alpha - 2}{3\beta - \alpha\beta - 2}.$$

İndi $\log_{42}^{147}$ -ni hesablayırıq.

$$\log_{42}^{147} = \frac{\log_2(3 \cdot 7^2)}{\log_2(2 \cdot 3 \cdot 7)} = \frac{\log_2^3 + 2\log_2^7}{1 + \log_2^3 + \log_2^7} \quad \text{və} \quad \log_2^3 \quad \text{və} \quad \log_2^7 \quad \text{-nin}$$

yerində tapılan qiymətlərini yazıb $\log_{42}^{147} = \frac{3\alpha\beta - 2\alpha - 3}{\alpha\beta + 3\beta - \alpha - 3}$ alırıq.

Analoji olaraq üç loqarifmə verildikdə dördüncü loqarfimi tapılır, həm də ədədlər və loqarifmaların əsası vahiddən fərqli dörd müsbət a, b, c, d ədədlərinin qüvvətləri hasilinə bərabər olur. Məsələnin həlli, üç məchullu üç tənliklər sisteminin həllinə gəlir.

Ümumiyyətlə $\log_{N_1}^{M_1} = \alpha_1, \log_{N_2}^{M_2} = \alpha_2, \dots, \log_{N_n}^{M_n} = \alpha_n$ kimi n loqarifm verilə bilər. Onda $\log_{N_{n+1}}^{M_{n+1}}$ -i hesablamaq tələb olunur, burada $M_1, M_2, \dots, M_n, M_{n+1}, N_1, N_2, \dots, N_n, N_{n+1}$ ədədlərindən hər biri vahiddən fərqli $n+1$ müsbət ədədin qüvvətləri hasilidir. Məsələ n məchullu n tənliklər sisteminin həllinə və sonra $\log_{N_{n+1}}^{M_{n+1}}$ - in hesablanmasına gəlir.

42. Aşkırdır ki, $x > 2$ və ya $y > 2$ olduqda (x, y) nöqtəsi verilmiş tənliyi ödəməz. Odur ki, bu tənliyi ödəyən nöqtələr üçün $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$ olmalıdır. Odur ki, baxılan ixtiyari x, y üçün

$f(x, y) = \frac{y}{x} \geq \frac{1}{2}$. Beləliklə, $f(x, y)$ funksiyasının ən kiçik qiyməti $\frac{1}{2}$ -ə bərabərdir.

43. $tg^3 \alpha = \frac{3tg \alpha - tg^3 \alpha}{1 - 3tg^2 \alpha}$ bərabərliyinin hər tərəfini kvadrata

yüksəltmək,

$$tg^6 \alpha - 3(2 + 3tg^2 3\alpha)tg^4 \alpha + 3(3 + 2tg^2 3\alpha)tg^2 \alpha - tg^2 3\alpha = 0 \text{ alırıq.}$$

$$\alpha = 10^0, 50^0, 70^0 \text{ olduqda } 2 + 3tg^2 3\alpha = 3, \quad 3 + 2tg^2 3\alpha = \frac{11}{3} \text{ və}$$

$$\text{buradan } tg^2 3\alpha = \frac{1}{3} \text{ alırıq. Onda } 3tg^6 \alpha - 27tg^4 \alpha + 33tg^2 \alpha - 1 = 0$$

yazırıq. Burada $tg^2 \alpha = x$ əvəz edib $3x^3 - 27x^2 + 33x - 1 = 0$ tənliyini alırıq. Deməli $x_1 = tg^2 10^0$, $x_2 = tg^2 50^0$, $x_3 = tg^2 70^0$ ədədləri sonuncu tənliyin kökləridir. Viyet teoreminə görə bu tənlikdən $x_1 + x_2 + x_3 = 9$,

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 11, \quad x_1 x_2 x_3 = \frac{1}{3}. \quad x_1, x_2, x_3 \text{-ün qiymətlərini məlum}$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1 x_2 x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)[(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)]$$

eynilikdə yerinə yazıb $tg^6 10^0 + tg^6 50^0 + tg^6 70^0 = 1 + 9(81 - 33) = 433$ alırıq ki, bu da tələb ediləndir.

44. Üstlü tənliyin kökü ilə əlaqədar məktəb təcrübəsində və ali məktəblərə qəbulda xeyli mübahisələrə təsadüf edirik. Odur ki, bu sadə misal və sonrakı 45-47 çalışmaları üzərində həmin məsələyə müəyyən qədər aydınlıq gətirməyi lazım bilirik.

Baxılan tənliyin sol tərəfində məchul qüvvətin əsasına həm də üstünə daxildir. Məsələnin mahiyyəti belədir: qüvvətin əsasına və üstünə məchul daxil

olan tənlik üçün məchulun hansı qiymətlərini mümkün hesab etməli?

Bu sualın daha konkret forması:

- 1 ədədi $x^{2x} = 1$ tənliyinin köküdürmü?

- Hə, çünki tənlikdə x yerində -1 ədədini yazdıqda biz doğru ədədi bərabərlik alırıq.

- Yox, -1 bu mənfi ədəddir, $y = x^{2x}$ mürəkkəb üstlü funksiya (və ya üstlü-qüvvət və ya qüvvət-üstlü) yalnız $x > 0$ üçün təyin olunmuşdur.

- Bununla əlaqədar mübahisə etməyin mənası yoxdur, çünki x -in hansı qiymətlərində $y = x^{2x}$ yazılışından istifadə etmək barədə dəqiq razılaşma yoxdur.

- Şagirdlər çox vaxt $x^{2x} = x^0$, $2x = 0$, $x = 0$ yazmaqla “0”-da verilmiş tənliyin kökü hesab edirlər. Lakin $x=0$ məchulun mümkün qiymətləri çoxluğuna daxil deyil, 0^0 -in isə mənası yoxdur. Bu cavabların hansı doğrudur? Tənliyə aid əsas anlayışdan istifadə etməklə bunu araşdırmağa çalışaq. Lakin burada tənliyin dəqiq tərifini verməyə ehtiyac yoxdur: bizə yalnız onu bilmək lazımdır ki, hər bir $f(x) = g(x)$ tənliyi iki $f(x)$ və $g(x)$ funksiyanı əlaqələndirir. Lakin qeyd etməliyik ki, məktəbdə dəyişənli ifadə anlayışını daxil etdikdən sonra (riyaziyyat elminin özündə buna forma demək daha münasib hesab edilir) $f(x)$ və $g(x)$ ifadələrinə funksiya deyil forma demək daha təbiidir. Əlbəttə, $f(x)$ forması ilə, onunla təyin onunla, x dəyişəninin hər bir mümkün qiymətinə ədədini qarşı qoyan $x \rightarrow f(x)$ funksiyası arasındakı əlaqə o qədər sıx və təbiidir ki, uyğun fərq tənlik istilahı ilə şərhə müstəsna olaraq terminoloji xarakterlidir. Tənliyin sol və sağ tərəflərinə ədədi formalar kimi baxmaq daha münasibdir. Beləliklə, hər bir tənlik uyğun formalar cütü ilə təyin olunur. Lakin forma – bu sadəcə olaraq bir və bir neçə hərfin dəyişən hesab edildiyi hər hansı ifadə deyildir. Yuxarıda dəyişənin mümkün qiymətləri haqqında danışdıq və bu olduqca mühümdür: Verilmiş ifadədə bir və ya bir neçə hərfi dəyişən hesab edərkən habelə onların hansı qiymətlər ala biləcəyini də göstərmək lazımdır. Dəyişənin bu qiymətlərinə (dəyişən bir neçədirsə, qiymətlər yığımı) adətən mümkün qiymətlər deyilir; mümkün qiymətlər çoxluğunda formanın təyin oblastı deyilir. Məlumdur ki, funksiya üçün də belə istilahdan istifadə olunur. Nəzəriyyənin tələbi belədir. Təcrübədə isə bu tələb demək olar ki, yerinə yetirilmir, bu və ya digər ədədi formaya, bir qayda olaraq onun təyin oblastını aşkar göstərmədən baxılır. Lakin bununla həmişə nəzərdə tutulur ki, təyin oblastı dəyişənin, formada yerinə ayzdıqda hər hansı ədəd alındığı və ya necə deyərlər formanın mənalı olduğu, bütün

qiymətlərindən ibarətdir. Beləliklə, təbii təyin oblastı, başqa sözlə “ən böyük” mümkün qiymətlər çoxluğu anlayışı yaranır.

Bu anlayışdan gizli qaydada çox istifadə olunur. Xüsusi halda “...təyin oblastını tapın” tip məsələdə yəqin ki, təbii təyin oblastı nəzərdə tutulur, əksi halda bu məsələnin mənası yoxdur. Eyni zamanda məhz təbii təyin oblastı anlayışı anlaşılmazlığa səbəb olur. Dəqiq razılaşma yoxdursa hər kəs dəyişənin bu və ya digər qiymətini bildiyi kimi təbiidir və ya yox kimi baxmaqla şərh edə bilər. Məsələn, kiçik yaşlı məktəblilər üçün formasının natural ədədlərdən ibarət təbii təyin oblastı vardır, yuxarı sinif şagirdləri üçün isə bu oblast bütün həqiqi ədədlərdən və ya hətta kompleks ədədlərdən ibarətdir. Odur ki, məsələn XI sinif şagirdlərinə $x^2 = |x + 2|$ tənliyini həll etmək tapşırığını verəndə məchulun həqiq və ya kompleks (ola bilər ki, yalnız tam) qiymətlərinə baxıldığını göstərməmək doğru deyildir. Baxılan tənliklə əlaqədar xüsusi şəkildə, məhz u^{ϑ} şəklində formanın təbii təyin oblastının müxtəlif cür şərh edilməsi nəticəsində mübahisələr yaranır. Odur ki, u^{ϑ} ifadəsinə baxaq. Buna iki u və ϑ dəyişənindən ibarət forma kimi baxmaq istəyirik. Lakin bunun üçün hansı tərifi əsaslanmaq lazımdır? Şübhəsiz ki, məktəb dərsliklərində verilən tərifi əsaslanmaq lazımdır. Son vaxtlarda məktəb üçün yazılmış dərsliklərdə verilən təriflərə əsasən u^{ϑ} formasının təyin oblastı: 1) $u > 0$ olan bütün u, ϑ cütləri; 2) $u < 0$, ϑ - tam olan u, ϑ cütləri, 3) $u = 0$, ϑ - müsbət tam ədəd olan bütün u, ϑ cütləri hesab edilir.

Dərsliklərdə ixtiyari həqiqi ədədin kökü anlayışına tərif verilir, lakin bəzi hallarda kəsr üst anlayışı aydın olmur. Dərsliklərin əksəriyyətində müsbət əsaslı qüvvətdən söhbət getdikdə, xüsusi qeyd edilir ki, kəsr üstlü qüvvətin tərifində əsası mənfi ədəd olan qüvvətə

baxılmır. Lakin [15]-də $x^{\frac{1}{3}}$ -in $\sqrt[3]{x}$ -lə eyniləşdirilməsi bu mühüm qeydə ziddir. Xüsusi olaraq qeyd edək ki, söhbət tərfi necə verməkdən deyil, çəktəb dərsliklərində verilən tərifdən gedir. Xüsusi halda ixtiyari müsbət ϑ üçün 0^{ϑ} -ni 0-a bərabər götürmək və ya kəsr üstlü qüvvətin uyğun köklə aşkar eyniləşdirmək heç nəyə mane olmaz. Buna bəzən fikir verilmir və biz də dərslikdə verilən tərifi əsaslanmalıyıq.

İndi bir x dəyişənli $u(x)^{\vartheta(x)}$ formasına baxaq. Yuxarıda deyilənlərdən alınır ki, bu formanın təbii təyin oblastı x –in aşağıdakı üç “növbə” qiymətlərindən ibarətdir:

- 1) $u(x) > 0$, $\vartheta(x)$ -in mənası vardır;
- 2) $u(x) < 0$, $\vartheta(x)$ - tam ədəddir;
- 3) $u(x) = 0$, $\vartheta(x)$ – müsbət tam ədəddir.

Beləliklə, bu vaxta qədər istifadə olunan dərsliklərdə $u(x)^{\vartheta(x)}$ şəklində formanın təyin oblastı olaraq nəyin götürülməsi barədə xüsusi razılaşdırma olmamasına baxmayaraq onlardakı təriflə birlikdə “xüsusi şərt qoyulmadıqda tənliyin təbii təyin oblastı götürülməlidir” fikri bu məsləni birqiymətli həll etməyə imkan verir. Xüsusi halda, indi demək olar ki, -1 ədədi $x^{2x} = 1$ tənliyinin köküdür.

Analoji olaraq bu tərifdən və razılaşdırmadan alınır ki, -1 ədədi $x^{\frac{2x}{3}}$ tənliyinin kökü deyildir, çünki $(-1)^{-\frac{2}{3}}$ simvolu təyin olunmamışdır, yəni mənası yoxdur, -8 ədədi $x^{\frac{x}{3}} = x^{-\frac{8}{3}}$ tənliyinin kökü deyildir, çünki $(-8)^{\frac{8}{3}}$ simvolunun mənası yoxdur; 0 və $-\frac{1}{2}$ ədədləri $x^{2x+5} = x^4$ tənliyinin köküdür.

0 ədədi $x^{\frac{x+5}{2}} = x^2$ tənliyinin kökü deyildir, çünki $0^{\frac{5}{2}}$ simvolunun mənası yoxdur; $-\frac{1}{2}$ ədədi bu tənliyin köküdür. 0 və $-\frac{1}{2}$ ədədləri

$x^{\frac{2x+5}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$ tənliyinin kökləri deyildir; 0 və $-\frac{1}{2}$ ədədləri

$\sqrt[3]{x^{2x+5}} = \sqrt[3]{x^4}$ tənliyinin köküdür.

Üstlü-qüvvət tənliyində mənfi əsasın “əksinə” olanlar onu əsas götürürlər ki, üstlü funksiya yalnız müsbət əsas üçün təyin olunmuşdur. Lakin, aydındır ki, bu dəlilin isə dəxli yoxdur, çünki burada üstlü deyil üstlü-qüvvət funksiyasından daha dəqiq $u(x)^{\vartheta(x)}$ şəklində formadan söhbət gedir. Onu da qeyd etmək ki, göstərilən dəlil bundan əlavə x -in

qüvvətin əsası 1 olan qiymətlərini də qəbul etmir. Çox vaxt belə sual da yaranır; “Qüvvətin əsası mənfi olduqda tənliyin kökünü necə tapmalı axı mənfi əsas üçün loqariflama ilə əlaqədar olan tənliklərin həllinin əsas priyomları “işlənir”. Lakin sonralar bu çətinliyin qarşısını almaq mümkün olur. Doğrudan da fərz edək ki, $u(x)^{\vartheta(x)} = f(x)$ şəklində tənlik verilir. Onun $u(x) < 0$ olan köklərini axtarmalıyıq. Bu x -lər üçün qüvvətin $\vartheta(x)$ üstü tam ədəd olmalıdır, lakin n -in tam qiymətlərində və ixtiyari a üçün $|a^n| = |a|^n$ düsturu doğrudur. Odur ki, x -in baxılan qiymətlərində verilmiş tənliyin nəticəsi $|u(x)|^{\vartheta(x)} = |f(x)|$ tənliyidir. Bu tənlikdə qüvvətin əsası artıq müsbətdir, odur ki, onu həll etmək kifayətdir, nəticəni isə yoxlamaq lazımdır – verilmiş tənliyin hər tərəfinin modulunu götürdükdə kənar köklər alınə bilər. Bu baxımdan 45-47 misallarını da araşdırıq.

45. Əvvəlcə qeyd edək ki, bu üstlü-qüvvət tənlik deyildir, lakin burada üst kəsr ədəddir, odur ki, x –in yalnız müsbət qiymət aldığını qəbul etmək lazımdır. Formal həldə çətinlik yoxdur: tənliyin hər

tərəfini x -ə vurub $x^{\frac{3}{5}} = y$ əvəz etdikdən sonra $y^3 - 7y + 6 = 0$ və ya $(y-1)(y^2 + y - 6) = 0$ tənliyini və buradan $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = -3$

alırıq. Lakin $y = x^{\frac{3}{5}}$ müsbət olmalıdır, odur ki, bizi yalnız y_1 və y_2 maraqlandırır; Onda x –in uyğun qiymətləri $x_1 = 1$ və $x_2 = 2^{\frac{5}{3}}$ -dir. Bu da verilmiş tənliyin kökləridir. [20] -də $x_3 = -3^{\frac{5}{3}}$ cavabı da göstərilir. Bu tapılan y_3 -ə uyğundur. Buradan belə nəticə çıxarmaq olar ki, həmin kitabın müəllifi uyğun izahatla əlaqədar başqa yanaşmanı əsas götürmüşdür.

46. Əvvəlcə verilmiş sistemin $x > 0$ olan həllini tapıq. Onda sistemin hər iki tənliyini loqarifmalayıb onunla eynigüclü $(2y-1)\log_5 x = \log_5^3, 4y\log_5^x = 1$ sistemini alırıq. Buradan isə $y = \log_5^5, x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ tapırıq.

İndi $x < 0$ olan hal üçün həlli axtaraq. Onda qüvvətin $2y - 1$ və $4y$ üstləri tam ədəd olmalıdır. Verilmiş sistemin tənliklərinin hər tərəfinin modulunu götürüb onun $|x|^{2y-1} = 3, |x|^{4y} = 5$ (1) nəticəsini alırıq. Bu sistemdə yuxarıdakı kimi $y = \log_{\frac{5}{9}}^5, |x| = \frac{\sqrt{5}}{3}$ alırıq. Beləliklə də (1) sisteminin bir ($x < 0$ olduğunu nəzərə almaqla) $x = -\frac{\sqrt{5}}{3}, y = \log_{\frac{5}{9}}^5$ həlli vardır. Bu ədədlər cütü yalnız və yalnız $2\log_{\frac{5}{9}}^5 - 1$ və $4\log_{\frac{5}{9}}^5$ ədədləri tam olduqda verilmiş sistemin həllidir, bu isə aşkardır ki, $\log_{\frac{5}{9}}^5$ ədədi $\frac{k}{2}$ şəkildə olduqda doğrudur, burada k tam ədəddir.

25. $9^k = 5^k$ şəklində yazmaq olar. Buradan görünür ki, k -in heç bir qiymətində ödənilmir. Beləliklə, verilmiş sistemin yeganə $y = \log_{\frac{5}{9}}^5, x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ həlli vardır.

47. Əvvəlki misalda əvvəlcə müsbət həlli tapdıq. Burada isə ondan fərqli olaraq dərhal $|x|^{x+y} = |y|^{12}, |y|^{x+y} = |x|^3$ (1) sisteminə baxırıq. Bu sistem verilən sistemin nəticəsidir. $x \geq 0, y \geq 0$ olduqda o verilən sistemlə eynidir, x, y -in qalan qiymətlərində isə bu modulun xassəsindən alınır. Hər şeydən əvvəl qeyd edək ki, (x, y) (1) sisteminin həllidirsə, onda $x \neq 0, y \neq 0$. Odur ki, $|x| > 0, |y| > 0$, ona görə də sonrakı çevirmələrdə müsbət əsaslı qüvvətin xassəsindən istifadə edə bilərik. (1) sisteminin birinci tənliyindən $|y| = |x|^{\frac{x+y}{12}}$ və ikinci tənlik $|x|^{\frac{(x+y)^2}{12}} = |x|^3$ (2) şəklinə düşür. Aşkardır ki, alınmış tənliklər aşağıdakı hallarda ödənilir.

1) $|x| = 1, 2) x + y = 6, 3) x + y = -6$. Bu hallara baxaq.

1) (1) sistemindən $|y|^{12} = 1$ alırıq, buradan $|y| = 1$ və beləliklə baxılan halda (1) sisteminin dörd həlli vardır: (1; 1), (1; -1), (-1; 1) və (-1; -1)

Bu cütləri verilmiş sistemdə yerinə yazmaqla müəyyən edirik ki, onun həlli yalnız bunlardan ikisidir. (1; 1) və (1; -1)

2) Bu halda verilmiş sistemə qayıtmaq məqsədəuyğundur: O, indi üstlü-qüvvət tənliklər sistemi olmur və $x^6 = y^{12}$, $y^6 = x^3$ şəklinə düşür. Buradan $x = y^2$ tənliyini alırıq və onu $x + y = 6$ tənliylə birlikdə həll edib iki cüt həll alırıq: (4; 2) və (9; -3). Bu cütlərin hər ikisi verilmiş sistemin həllidir.

3) Bu halda da verilmiş sistemə qayıda bilərik. Onda $xy^2 = 1$, $x + y = -6$ sistemini alırıq. $x = -6 - y$ olduğunu sistemin birinci tənliyində yerinə yazıb

$$y^3 + 6y^2 + 1 = 0 \quad (3) \text{ alırıq.}$$

Aşkıdır ki, bu tənliyin rəşional kökü yoxdur. Lakin riyazi analizə əsaslanaraq deyə bilərik ki, həqiqi ədədlər sahəsində onun yalnız bir həlli vardır və bu həll (-7; -6) intervalında yerləşir.

Doğrudan da $f(y) = y^3 + 6y^2 + 1$ funksiyası $y = -7$, $y = -6$ olduqda müxtəlif işarəli qiymətlər alır və kəsilməz olduğundan (-7; -6) intervalında heç olmasa bir kökü vardır. Bu kökün yeganəliyini $f(y)$ funksiyasını törəmənin tətbiqilə araşdırmaqla isbat etmək olar, lakin sadəliklə də bunu almaq mümkündür. $y^3 + 6y^2 + 1 = 0$ tənliyində $y -$

in yerində $\frac{1}{z}$ yazıb $z^3 + 6z + 1$ tənliyini alırıq. Bu tənliyin sol tərəfi $z -$ dən asılı ciddi artan funksiyadır, odur ki, onun birdən artıq kökü ola bilməz. Buradan alınır ki, $y^3 + 6y^2 + 1 = 0$ tənliyində birdən artıq kökü yoxdur. Nəticədə alırıq ki, verilmiş sistemin aşağıdakı həlləri vardır: (1; 1), (1; -1), (4; 2), (9; -3) və $\left(\frac{1}{a^2}, a\right)$, burada a ilə

$x^3 + 6x^2 + 1 = 0$ tənliyinin kökü işarə edilmişdir.

44-47 misallarının araşdırılması göstərir ki, üstlü-qüvvət tənliklərinin bütün təbii təyin oblastlarında, həllində müəyyən çətinliklər ola bilər. Odur ki, şagirdlərə belə məsələlər təklif edəndə burada

məqsədin nədən ibarət olduğunu dəqiq anlatmaq lazımdır. Şagirdlərin tənliyin hər iki tərəfini loqarifmalamaq və loqarifmaların çevrilməsi düsturlarını necə mənimsədiklərini yoxlamaq nəzərdə tutulursa, onda yalnız qüvvətin əsasının müsbət olduğu köklərin axtarılması ilə kifayətlənmək məqsədəuyğundur və bunu məsələnin ifadəsində açıq şəkildə göstərmək, xüsusən bu imtahanda və yoxlama yazı işləri üçün verilsə, lazımdır.

Eyni zamanda sinifdənkənar və maraq məşğələlərində belə məsələləri tam şəkildə qoymaq münasibdir, çünki ən azı yuxarıda araşdırdığımız 45 və 46 məsələləri göstərdi ki, bu zaman müstəqil əhəmiyyəti olan maraqlı riyazi suallar yarana bilər. 46 misalı göstərdi ki, elementar məsələlərin həllində riyazi analiz elementlərinə aid biliklər necə lazım ola bilər, 45 misalında yaranan sual isə təbii olaraq daha ümumi məsələnin qoyulmasına gətirir: a və b -in hansı tam qiymətlərində $\log_b^a$ rəasionaldır? Hətta bu tip sual şagirdlərə artıq məlumdursa, 45 misalı onlara göstərir ki, “təmiz maraqdan alınan” məsələdən gözlənilmədən “Praktikada” necə istifadə olunur.

Ümumiyyətlə riyaziyyatda qəbul edilən tərifin ümumiliyinin, bəzən isə tərifin özünün nə isə həmişəlik qeyd edilmiş olmayıb, məsələdən və işin metodundan asılı olduğunu şagirdlərə başa salmaq lazımdır. Məsələn, riyazi analizdə hər hansı məna verilməyən 0^0 ifadəsini, birləşmələr nəzəriyyəsinə 1-ə bərabər götürmək münasibdir. Bundan əlavə riyazi analizdə $u(x)^{v(x)}$ şəklində funksiyanın yalnız $u(x) > 0$ olan x -lər üçün təyin olduğunu demək lazım gəlir. Bu həmin funksiyayı $e^{v(x)\ln u(x)}$ superpozisiyası şəklində göstərmək üçün lazımdır. (Məsələn, onun törəməsini hesablamaq üçün). Xatırlamaq lazımdır ki, müasir riyaziyyatın halqa adlanan anlayışına onun müxtəlif bölmələrində fərqli təriflər verilir.

Məktəb riyaziyyat kursunda qüvvətin tərfi ilə əlaqədar, yaxşı olar ki, əlavə olaraq ixtiyari $\alpha > 0$ üçün $0^\alpha = 0$ olduğu şərti qoyulsun. Habelə, köklə uyğun kəsir üstlü qüvvətin fərfini də saxlamaq vacibdir,

yəni, məsələn $\sqrt[3]{x}$ və $x^{\frac{1}{3}}$ müxtəlif formalar hesab edilməlidir, çünki bunların təyin oblastları müxtəlifdir. Eləcə də $\sqrt[n]{x}$ radikal işarəsini natural ədədlər üçün deyil bütün həqiqi $x \neq 0$ ədədləri üçün

genişləndirmək lazım deyildir. 44-47 məsələlərinin həlli ilə əlaqədar nəticə olaraq qeyd edək ki, məktəbdə riyaziyyatın təlimi zamanı məsələlər həlli və nəzəri mühakimələrdə ümumi razılaşmalara və dərsliklərdə verilən təriflərə (onlar dəyişmədiyi müddətdə) əsaslanmaq lazımdır. Bu təriflərdən və razılaşmalardan hər-hansı kənara çıxmalar isə məsələlərin ifadəsində xüsusi və açıq şəkildə göstərilməlidir.

$$48. \quad 3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ olduğundan verilmiş}$$

tənliyi $3y^2 - 5\sqrt{3}ty - 3t^2 + \frac{37}{4} = 0$ şəklində yazmaq olar, burada

$t = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. y -ə nəzərən alınmış kvadrat tənliyin diskriminantı $111(t^2 - 1)$ -dir. Deməli tənliyin yalnız $t = \pm 1$ olduqda həlli vardır.

$t = 1$ olarsa, onda $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $y_1 = \frac{5\sqrt{3}}{6}$, $t = -1$ olduqda isə

$$x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, y_2 = -\frac{5\sqrt{3}}{6} \quad (k = 0, \pm 1; \pm 2, \dots).$$

$$49. \quad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \text{ olduqda } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \leq \sin \alpha < \alpha.$$

50. Sistemin tənliklərini toplayıb

$\sin x(\sin x - 1) + \sin y(\sin y - 1) + \sin z(\sin z - 1) = 0$ alırıq. Lakin $\sin x, \sin y, \sin z$ verilmiş parçada mənfi deyildir, odur ki, $\sin x = 0$ və ya $\sin x = 1$.

$\sin x = 0$ isə, onda $\sin y = \sin z = 0$. Buradan $(0, 0, 0), (0, \pi, 0), (0, 0, \pi), (0, \pi, \pi)$ və $(\pi, 0, 0), (\pi, \pi, 0), (\pi, 0, \pi), (\pi, \pi, \pi)$ həllərini alırıq.

$\sin x = 1$ isə, onda $\sin y = \sin z = 1$, buradan $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ həlli alınır.

51. $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots, a_6, b_6$ -ni ardıcıl olaraq hesablayaraq alırıq ki, $a_1 = a_6$ və $b_1 = b_6$. Buradan asanlıqla deyə bilərik ki, verilmiş ardıcılıqlar $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_1, \dots$ və

$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_1, \dots$ şəkildədir. Belə ardıcılıqlar yalnız və yalnız $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$ və $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5$ olduqda yığılır, həm də $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1$ və $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b_1$. Ardıcılıqları

müəyyən edən şərtlərdən alınır ki, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n-1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}}$ və

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n-1} - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} - 1} \text{ buradan } a_1 = \frac{b_1}{a_1} \text{ və } b_1 = \frac{b_1 - 1}{a_1 - 1}.$$

Bu sistemi həll edib və $1 < a_1 < b_1$ olduğunu nəzərə alsaq tələb ediləni $a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ və $b_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ tapırıq.

52. Bir tərəfdən $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$ olduğundan

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \dots + \frac{x^{k-1}}{k!} + \dots \text{ və qüvvət sırasının integral-}$$

lanması haqqında məlum teoremə görə

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{x}{2!} dx + \dots + \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{k!} dx + \dots = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2!} + \dots + \frac{1}{k \cdot k!} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot k!}$$

$$\begin{aligned} \text{Digər tərəfdən isə } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1) \dots (n+k)} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1) \dots (n+k)} \right) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{k} \sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{n(n+1) \dots (n+k-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \dots (n+k)} \right) \right] = \frac{1}{k} \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=2}^m \frac{1}{n(n+1) \dots (n+k-1)} - \right. \\ &\left. - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{(n+1)(n+2) \dots (n+k)} + \frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \dots (n+m)} \right] = \frac{1}{k} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \dots (n+m)} \right) = \frac{1}{k \cdot k!} \end{aligned}$$

beləliklə $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1) \dots (n+k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot k!}$ tələb edilən isbat oldu.

53. $\log_3^x y = y$ olsun, onda verilmiş tənlik $\log_2(1 + \sqrt{3}^y) = y$ və ya

$$1 + (\sqrt{3})^y = 2^y \text{ şəklinə düşər. Buradan } \left(\frac{1}{2} \right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^y = 1. \text{ Sonuncu}$$

tənliyin sol tərəfi y -dən asılı azalan funksiya olduğundan bu tənliyin $y=2$ dən başqa kökü yoxdur. Onda $\log_3^x = 2, x = 9$.

54.

$$f(x, y, z, t) = 1 + \left(\frac{ax^2 + by^2}{ax + by} - 1 \right) + \frac{az^2 + bt^2}{az + bt} = 1 + \frac{-axz - byt}{ax + by} + \frac{az^2 + bt^2}{az + bt} = 1 + \frac{ab(z-t)(zy-xt)}{(ax+by)(az+bt)} = 1 + \frac{ab(z-t)^2}{(ax+by)(az+bt)}.$$

Beləliklə, $f(x, y, z, t) = 1 + \frac{ab(z-t)^2}{(ax+by)(az+bt)}$. Sonuncu

bərabərlikdən alınır ki, verilmiş funksiya $z = t$ olduqda ən kiçik 1 qiymətini alır. İndi verilmiş funksiyanın ən böyük qiymətini tapaq. Məsələnin şərtindən alınır ki, $0 \leq x, y, z, t \leq 1$, onda

$$\left. \begin{aligned} ax^2 \leq ax, by^2 \leq by, az^2 \leq az, bt^2 \leq bt \\ ax^2 + by^2 \leq ax + by, az^2 + bt^2 \leq az + bt \end{aligned} \right\} (1).$$

Odur ki, $f(x, y, z, t) \geq 2$, habelə bərabərlik, məsələn $x = t = 0$, $y = z = 1$ olduqda mümkündür. Deməli verilmiş funksiyanın ən böyük qiyməti 2-dir.

55. a, b, c, d rəqəmlər olduğundan aşkardır ki, $10 \leq \sqrt[3]{abcd} < 22$, habelə $a, b, c, d \in N$, odur ki, $10 \leq a + b + c + d \leq 21$. Verilmiş tənliyi $\overline{abcd} = (a + b + c + d)^3$ və ya $100a + 100b + 10c + d = (a + b + c + d)^3$ şəkildə yazmaq olar. Sonuncu bərabərliyi belə çevirək: $999a + 99b + 9c = (a + b + c + d)^3 - (a + b + c + d)$ və ya $9(111a + 11b + c) = (a + b + c + d)(a + b + c + d + 1)(a + b + c + d - 1)$. Sonuncu bərabərliyin sağ tərəfi üç ardıcıl ədədin hasilidir, odur ki, onlardan yalnız biri 9-a bölünür.

a) Fərz edək ki, $a + b + c + d$ cəmi 9-a bölünür. $10 \leq a + b + c + d \leq 21$ şərt ilə birlikdə buradan $a + b + c + d = 18$ alınır. Onda $9(111a + 11b + c) = 18 \cdot 19 \cdot 17 \Rightarrow 111a + 11b + c = 646$.

Bu bərabərlik $a = 5, b = 8, c = 3$ olduqda ödənilir, onda $d = 18 - 5 - 8 - 3 = 2$. Yəgənə mümkün natural kök $a = 5, b = 8, c = 3, d = 2$ -dir. Deməli, $\sqrt[3]{5832} = 5 + 8 + 3 + 2$

b) Fərz edək ki, $a + b + c + d + 1 = 18$. Analoji mühakimə ilə $a = 4, b = 9, c = 1, d = 3$ həlli alınır. Deməli, $\sqrt[3]{4913} = 4 + 9 + 1 + 3$.

c) Üçüncü $a + b + c + d - 1 = 18$ halında verilmiş tənliyin natural həlli yoxdur (bunu asanlıqla yoxlamaq olar).

56. $n = 1$ olduqda bərabərsizlik doğrudur. $n > 1$ isə, onda $\sqrt[n]{n} > 1$, yəni $\sqrt[n]{n} = 1 + x$, burada $x > 0$. Onda

$$n = (1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots + x^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}x^2,$$

buradan $x^2 < \frac{2}{n}$ və $x < \sqrt{\frac{2}{n}}$. $\sqrt[n]{n} = 1 + x$ olduğundan $\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$.

57. Verilmiş tənliyin mümkün qiymətləri oblastı $\cos x \neq 0$, $\cos 3x \neq 0$ və $\sin 2x \neq 0$ şərtlərindən təyin edilir, buradan $x \neq \frac{\pi}{2}k, x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$. Bu oblasta: $\sec x \sec 3x = 2 \left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 3x}{\cos 3x} - 1 \right)$,

$$\sec x \sec 3x = 2 \cdot \frac{\sin(3x - 2x)}{\sin 2x \cdot \cos 3x}$$

$$\sec x \cdot \sec 3x = 2 \cdot \frac{\sin x}{2 \sin x \cos x \cdot \cos 3x}, \sec x \cdot \sec 3x = \sec x \cdot \sec 3x.$$

Beləliklə, verilmiş tənliyin həlləri oblastı mümkün qiymətlər oblastı ilə eynidir.

58. Verilmiş sistemin birinci tənliyini $(3x - 2y)^2 + (x - 2z)^2 + (y - 3z)^2 = 0$ şəklində yazmaq olar. Bu tənlik yalnız $x = 2z, y = 3z$ olduqda ödənər. x və y -in z ilə ifadəsini ikinci tənlikdə yerinə yazıb $(2z)^2 + (3z)^2 + z^2 = 288$ və buradan $z = 2$, beləliklə isə $x = 4, y = 6$ alırıq. Deməli, verilmiş yeganə $x = 4, y = 6, z = 2$ həlli vardır.

59. Məlumdur ki, $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$ [24, səh 224]. Bu bərabərliyə əsasən

$$(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n)^2 \leq n(\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + \dots + \sin^2 \alpha_n),$$

$$(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n)^2 \leq n(\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \dots + \cos^2 \alpha_n).$$

Bu bərabərsizlikləri tərəf-tərəfə toplayaq, onda

$$(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n)^2 + (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n)^2 \leq n[(\sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1) + (\sin^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2) + \dots + (\sin^2 \alpha_n + \cos^2 \alpha_n)] = n(1 + 1 + \dots + 1) = n^2.$$

Tələb edilən isbat oldu.

60. Bərabərsizliyi isbat etmək üçün ümumiləşdirilmiş riyazi induksiya prinsipindən istifadə etmək olar. Odur ki, əvvəlcə bu haqda şagirdlərə məlumat vermək lazımdır. Bəzən n dəyişənli $A(n)$ hökmü n -nin bəzi natural qiymətlərində ödənilmir və ya mənası olmur, lakin onun $n=m$ – dən başlayaraq bütün natural ədədlər üçün doğruluğunu təkcə natural n -lər üçün deyil, habelə, məsələn 0 -dan və ya n -in hər hansı mənfi tam qiymətlərindən başlayaraq tam n -lər üçün isbat etmək mümkündür. Uyğun hallarda riyazi induksiyanın belə ümumiləşdirilmiş prinsipi kömək edir: $A(n)$ hökmü $n=m$ üçün doğrudursa və ixtiyari k üçün $A(k)$ -dan $A(k+1)$ alınrsa, onda $A(n)$ hökmü ixtiyari tam $n \geq m$ qiymətlərində doğrudur.

$n=1$ olduqda baxılan bərabərsizlik ödənilir, $n=2, 3, 4$ olduqda isə uyğun olaraq $2^2 = 2^2, 2^3 < 3^2, 2^4 = 4^2$ alırıq. İsbat edək ki, verilmiş bərabərsizlik 4 -dən böyük ixtiyari n üçün doğrudur. $n=5$ isə, onda $2^5 > 5^2$. İsbat edək ki, $k \geq 5$ olduqda $A(k)$ hökmündən $2^k > k^2$ $A(k+1)$ hökmü: $2^{k+1} > (k+1)^2$ alınır. $k \geq 5$ olduğundan $k > 1$ və $k-2 > 1$.

Sonuncu iki bərabərsizliyi tərf-tərəfə vurub $k(k-2) > 1$, $k^2 - 2k > 1$, $k^2 > 2k + 1$ alırıq. Odur ki,
 $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$. Beləliklə,
 $2^{k+1} > (k+1)^2$.

Müəllim nəzərdə tutmalıdır ki, ümumilik kvantoru vasitəsilə riyazi induksiya prinsipi belə yazılır: $\forall k[A(k) \Rightarrow^{A(1)} A(k+1)] \Rightarrow \forall n A(n)$

Bəzən isə belə yazılışdan istifadə olunur:

$$\forall n[A(n) \Rightarrow^{A(1)} A(n+1)] \Rightarrow \forall n A(n)$$

Zənnimcə adi riyazi induksiya prinsipini “Natural ədədlər” mövzusu ilə əlaqədar daxil etmək, sonrakı siniflərdə isə onun tətbiqlərini (ardıcılıqlar, ədədi və həndəsi silsilə, birləşmələr nəzəriyyəsini elementləri və s.) göstərmək və ümumiləşdirilmiş formasını öyrənmək məqsədəuyğundur. Hazırkı proqrama görə isə riyazi induksiya prin-

sipinin yalnız XI sinifdə “birləşmələr nəzəriyyəsinin elementləri” mövzusunun daxilində öyrənilməsi nəzərdə tutulur.

61. Həllin iki üsulunu göstərək:

I. Baxılan cəm a, b, c, d –dən asılı kəsilməz funksiyadır. Odur ki, toplanan kəsrlərin məxrəclərindən uyğun olaraq d, c, b, a toplananlarını atsaq $S < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 2$ və bu kəsrlərin məxrəclərinə uyğun olaraq c, d, a, b ədədlərini əlavə etsək $S > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1$ alırıq. Buradan alınır ki, $1 < S < 2$. Deməli baxılan cəm $(1; 2)$ intervalına daxildir.

II. Aşkardır ki, S cəmi ona daxil olan a, b, c, d ədədlərinə görə birclslidir, yəni bütün bu ədədləri eyni bir əmsalə vurduqda o dəyişmir. Odur ki, onun yalnız $a+b+c+d=1$ olan təyin oblastı hissəsinə baxsaq S cəminin qiymətlər çoxluğunu azaltmırıq. Sonra $a+c=x$, $b+d=y$ əvəz edək, habelə $x > 0, y > 0$ və $x+y=1$.

$$S_1 = \frac{a}{a+b+d} + \frac{c}{b+c+d} = \frac{a}{1-c} + \frac{c}{1-a} = \frac{2ac+x-x^2}{ac+1-x^2} \quad \text{cəminə}$$

baxaq. Sabit x üçün (a, c) , $a+c=x$ olduqda bütün müsbət ədədlər cütüdürsə, onda asanlıqla yoxlamaq olar ki, ac hasili 0 və $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$ arasında bütün həqiqi ədədləri alır, daha doğrusu:

$0 < ac \leq \frac{x^2}{4}$. Bu intervalda ac -in funksiyası kimi baxılan

$$S_1 = \frac{2ac+x-x^2}{ac+1-x} = 2 + \frac{3x-2-x^2}{ac+1-x} \quad \text{ifadəsi monoton dəyişir}$$

$\left(x, \frac{2x}{2-x}\right]$ yarım intervalda bütün qiymətləri alır. Analoji olaraq

göstərmək olar ki, sabit y üçün $S_2 = \frac{b}{a+b+c} + \frac{d}{a+c+d}$ ifadəsi

$\left(y, \frac{2y}{2-y}\right]$ yarım intervalında dəyişir. Onda S cəmi

$\left(x+y, \frac{2x}{2-x} + \frac{2y}{2-y}\right) = \left(1, \frac{4-4xy}{2+xy}\right)$ yarımintervalındakı bütün qiymətləri alır. $x+y=1$ olduqda x və y ixtiyari müsbət qiymətlər alırsa, onda yuxarıdakı mühakiməyə uyğun olaraq alınır ki, $\frac{4-4xy}{2+xy}$ ifadəsi

$\left[\frac{4}{3}, 2\right)$ yarımintervalında dəyişir. Buradan nəticə olaraq alınır ki, S cəmi $(1; 2)$ intervalında dəyişir.

Göründüyü kimi məsələnin riyazi analizə əsaslanan I həlli, II elementar həllindən daha münasibdir.

62. Funksiyanın böhran nöqtələrini tapaq: $f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$ olduğundan onda iki böhran nöqtəsi vardır: 0 və -1. $[-2; -0,5]$ aralığında böhran nöqtələrindən yalnız biri yerləşir: $x=-1$. $f(-2) = -5$, $f(-1) = 0$, $f(-0,5) = -0,5$ olduğundan funksiya -1 nöqtəsində 0-a bərabər ən böyük, -2 nöqtəsində isə -5-ə bərabər ən kiçik qiymətini alır. Qısa olaraq bu belə yazılır: $\max_{[-2; -0,5]} f(x) = f(-1) = 0$, $\min_{[-2; -0,5]} f(x) = f(-2) = -5$

63. Tənliyi belə yazırıq:

$$(\sin^2 x)^3 (1 + \cos^2 x)^3 - (1 - \cos^{12} x) = 0,$$

$$(1 - \cos^2 x)^3 (1 + \cos^2 x)^3 - [1 - (\cos^4 x)^3] = 0,$$

$$(1 - \cos^4 x)^3 - (1 - \cos^4 x)(1 + \cos^4 x + \cos^8 x) = 0,$$

$$(1 - \cos^4 x)(-3\cos^4 x) = 0, \text{ buradan } \cos^4 x = 1 \text{ və } \cos^4 x = 0$$

və ya $\cos x = \pm 1$, $\cos x = 0$, beləliklə $x = \frac{\pi}{2}k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

64. Verilmiş tənliyi belə yazaq: $x^{y-5}(x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1) = 1$

$$\text{buradan } \begin{cases} x^{y-5} = 1 \\ x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 1 \end{cases}.$$

Bu sistemin ikinci tənliyinin yeganə natural $x = 2$ kökü vardır, çünki

$x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - 2 = (x^5 - 1) - (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x - 2)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ və $x \in N$ üçün $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$. $x = 2$ olduqda sistemin birinci tənliyindən $y = 5$ alınır. Beləliklə, verilmiş tənliyin yeganə $x = 2, y = 5$ həlli vardır.

65. Verilmiş tənliyi $3x(x - 1) - 18x - 4xy + 2y^2 + 12y = 3$ şəklində yazmaq olar.

x və y -in tam qiymətlərində sol tərəfin hər bir toplananı cüt ədəddir. Sağ tərəf isə təkdir. Beləliklə, verilmiş tənliyin tam həlli yoxdur. Başqa sözlə tam həllin sayı "0"-dır.

66. $\frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2} = \frac{(2y - x)^2}{x^2 + y^2} - 1 = 4 - \frac{(y + 2x)^2}{x^2 + y^2}$ yazmaq olar.

Beləliklə, verilmiş kəsr $y = -2x (x \neq 0)$ olduqda ən böyük 4, $y = \frac{1}{2}x (x \neq 0)$ olduqda isə ən kiçik -1 qiymətlərini alır.

67. $\left]0; \frac{1}{2}\right]$ -də $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ funksiyasına baxaq. Onun törəməsi $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3}(x^3 - 1)$ dir. $0 < x < \frac{1}{2}$ olduqda $f'(x) < 0$. Beləliklə, $f(x)$ funksiyası $\left]0; \frac{1}{2}\right]$ -də azalır, odur ki, $0 < c < \frac{1}{2}$ olduqda $f(c) > f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Lakin $f(c) = 2c + \frac{1}{c^2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 5$. Beləliklə, baxılan bərabərsizlik doğrudur.

68. $f(x) = 2(x^3 + 6x) - 9x^2 - 4$ funksiyasına baxaq. Onun törəməsi $f'(x) = 6x^2 + 12 - 18x = 6(x - 1)(x - 2)$ -dir. Buradan görünür ki, $x > 2$ olduqda $f'(x) > 0$, yəni $f(x)$ funksiyası $[2; +\infty[$ -da artır. Odur ki, $x > 2$ olduqda $f(x) > f(2)$, yəni $2(x^3 + 6x) - 9x^2 - 4 > 0$. Beləliklə, baxılan bərabərsizlik doğrudur.

69. $f(x) = x + \cos x$ köməkçi funksiyasına baxaq.

$f'(x) = 1 - \sin x > 0$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$ isə). Beləliklə, $f(x)$ funksiyası

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ -də artır, odur ki, $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ olduqda $f(\alpha) < f(\beta)$,

deməli baxılan bərabərsizlik doğrudur.

70. a) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^3}$ funksiyasına baxaq.

$f'(x) = 2x - \frac{3}{x^4} = \frac{2}{x^4}(x^5 - 1,5)$. Buradan alınır ki, $x > \sqrt[5]{1,5}$ olduqda

$f(x)$ funksiyası artır. Xüsusi halda o, $[\sqrt[5]{1,5}; +\infty[$ intervalında artır. Odur ki, $q > p > \sqrt[5]{1,5}$ olduqda baxılan bərabərsizlik doğrudur.

b) $(1; \sqrt[5]{1,5})$ intervalında $f'(x) < 0$, yəni $f(x)$ azalır. Odur ki, $1 < p < q < \sqrt[5]{1,5}$ olan p, q -in ixtiyari qiymətlərində baxılan bərabərsizlik deyil, onun əksi olan $p^2 + \frac{1}{p^3} > q^2 + \frac{1}{q^3}$ bərabərsizliyi doğrudur.

71. Bəzən şərtdə diferensiallanan funksiya olmayan ədədi bərabərsizliklərlə əlaqədar məsələni həll etmək lazım gəlir. Belə hallarda uyğun “funksional” məsələ seçib törəməni tətbiq etdikdən sonra verilən ədədi bərabərsizliklərə keçmək məqsəda uyğun olar. Odur ki, göstərilən məsələlərin hamısı belə köməkçi funksional məsələyə gətirilir.

$0 < x < y$ isə, onda hansı şərt daxilində $x^y < y^x$ (1) bərabərsizliyi doğrudur. $x^y > y^x$ (2) bərabərsizliyi ödənilir.

(1) bərabərsizliyi $y \ln x < x \ln y$, $\frac{1}{x} \ln x < \frac{1}{y} \ln y$ (3) bəra-

bərsizliyi ilə eynigüclüdür. Köməkçi $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$ (3) funksiyasına

baxaq və hansı aralıqda onun artdığını müəyyən edək.

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Aşkardır ki, $0 < x < 1$ olduqda $1 - \ln x > 0$ və $x > 1$

olduqda $1 - \ln x < 0$. Odur ki, (3) funksiyası $]0; 1[$ -də artır və $[1; +\infty[$

-da azalır. Başqa sözlə $0 < x < y \leq l$ isə, onda $\frac{1}{x} \ln x < \frac{1}{y} \ln y$,

$x^y < y^x$, $l \leq x < y$ olduqda isə $\frac{1}{x} \ln x > \frac{1}{y} \ln y$, $x^y > y^x$. Xüsusi

hallarda $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} < (\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$ lakin $e^\pi > \pi^e$, $100^{101} > 101^{100}$, $107^{113} > 113^{107}$, $1974^{2001} > 2001^{1974}$.

Qeyd edək ki, baxılan məsələlərlə əlaqədar istifadə edilən köməkçi funksional məsələni tam həllini göstərmədik: $0 < x < l$, $y > l$ olan hal üçün həmin məsələ həll edilmədi. Lakin köməkçi məsələnin tam olmayan həlli göstərilən məsələlərin hamısının həlli üçün (ədədlərin müqayisəsi üçün) kifayət oldu.

72. 1 ədədini $\frac{(p+q)^6}{32(p^6+q^6)}$ kəsrlə müqayisə etmək lazımdır.

Bunun üçün $[0; q]$ -da $f(x) = \frac{1}{32} \cdot \frac{(x+q)^6}{x^6+q^6}$ köməkçi funksiyasına

baxaq. Onun $[0; q]$ parçasında monoton olub olmadığını araşdıraraq. Bunun üçün onun törəməsini tapaq (kəsrin diferensiası qaydası ilə) sadələşdirmədən sonra $0 < x < q$ olduqda

$$f'(x) = \frac{1}{32} \cdot \frac{6(x+q)^5(q^5-x^5)}{(x^6+q^6)^2} q$$
 alınır. 1 teoreminə əsasən $f(x)$

funksiyası $[0; q]$ parçasında artır. Odur ki, $0 < p < q$ olduqda

$$f(p) < f(q), \text{ yəni } \frac{(p+q)^6}{32(p^6+q^6)} < 1, (p+q)^6 < 32(p^6+q^6).$$

Qeyd edək ki, bu bərabərsizlik $y = f(x)$ funksiyasının $[0; q]$ -da “aşağıdan qabarıqlığından” da alınır və şagirdlər qabarıqlıq şərti ilə tanış olmaqla yanaşı həmin bərabərsizliyin isbatının başqa yolunu da öyrənirlər. (Daha ətraflı məlumatı [25]-dən almaq olar).

Sonuncu bərabərsizliyin isbatı ilə əlaqədar mühüm bir priyomdan istifadə etdik: bir neçə hərf daxil olan bərabərsizliyi isbat etmək üçün çox vaxt hərflərdən birini (baxdığımız bərabərsizlikdə p hərfini) dəyişən (bu cəhəti göstərmək üçün onu x ilə əvəz etdik), qalan

həriflərin qiymətini isə qeyd edilmiş (baxılan bərabərsizlikdə q hərfini) hesab edilir. Bəzən bir məsələnin həlli ilə əlaqədar göstərilən priyomu bir neçə dəfə tətbiq etmək lazım gəlir.

73. Fərz edək ki, $0 < a \leq b \leq c$. $f(x) = x^3 + b^3 + c^3 - 3xbc$ funksiyasına baxaq. $0 < x < b$ olduqda $f'(x) = 3x^2 - 3bc < 0$ alırıq. Buradan görünür ki, $f(x)$ funkiyası $[0; b]$ -də azalır (1 teoreminə görə). Odur ki, $0 < a \leq b$ olduqda $f(a) \geq f(b)$, yəni $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 2b^3 + c^3 - 3b^2c$ (1) bərabərsizliyini alırıq. İndi başqa $\varphi(x) = 2x^3 + c^3 - 3x^2c$ köməkçi funksiyasına baxaq. $0 < x < c$ olduqda $\varphi'(x) = 6x^2 - 6xc < 0$ alırıq. Beləliklə, $\varphi(x)$ funksiyası $[0; c]$ -də azalır, yəni $0 < b \leq c$ olduqda $\varphi(b) \geq \varphi(c)$, deməli $2b^3 + c^3 - 3b^2c \geq 0$ (2). (1) və (2)-dən baxılan bərabərsizlik alınır.

Qeyd. Baxılan əsas bərabərsizlikdən alınır ki, müsbət x, y, z ədədlərinin ixtiyari seçilməsində $\frac{1}{3}(x + y + z) \geq \sqrt[3]{xyz}$. Həmin bərabərsizliyi buradan almaq üçün $0 < x \leq y \leq z$ hesab etmək və a, b, c ədədlərini elə seçmək olar ki, $a^3 = x$, $b^3 = y$, $c^3 = z$ olsun; sonra baxılan əsas bərabərsizliyin alındığını görürük.

74. Bərabərsizliklərin doğruluğunu müəyyənləşdirmək üçün bəzən bilavasitə 1 teoremindən alınan hökmə (2. Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası $]a; b[$ -də kəsilməyəndir və bu intervalda elə c nöqtəsi vardır ki, $]a; c[$ -də $f'(x) < 0$ və $]c; b[$ -də $f'(x) > 0$. Onda $]a; b[$ -dən olan ixtiyari x üçün $f(x) \geq f(c)$ bərabərsizliyi doğrudur. həm də bərabərlik yalnız $x = c$ olduqda mümkündür) əsaslanmaq münasibdir.

İndi $f(x) = x^5 + (1-x)^5$ funksiyasının harada artdığını, harada isə azaldığını müəyyənləşdirək. Bunun üçün törəməni tapaq:

$f'(x) = 5x^4 - 5(1-x)^4 = 5[x^2 + (1-x)^2](2x-1)$. Buradan görünür ki, $\left] -\infty; \frac{1}{2} \right[$ də $f'(x) < 0$ və $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ -də $f'(x) > 0$. Beləliklə

2 teoreminə əsasən $f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right)$, yəni baxılan əsas bərabərsizlik doğrudur, habelə bərabərlik yalnız $x = \frac{1}{2}$ olduqda mümkündür.

75. (2) bərabərsizliyi $\frac{\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right)}{ab} \geq 1$ ilə eynigüclüdür, yəni

$$\frac{1}{p}a^{p-1}b^{-1} + \frac{1}{q}b^{q-1}a^{-1} \geq 1 \quad (3) \quad]0; +\infty[\text{ -da köməkçi}$$

$f(x) = \frac{1}{p}x^{p-1}b^{-1} + \frac{1}{q}b^{q-1}x^{-1}$ (4) funksiyasına baxaq və onun harada artdığını və harada azaldığını müəyyənləşdirək. (1)-ə əsasən $\frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}$. Oudur ki, $f'(x) = \frac{x^p - b^q}{q^b x^2}$. Buradan alırıq ki, $0 < x < b$

$\frac{q}{b}$ olduqda $f'(x) < 0$, $x > b^{\frac{q}{p}}$ olduqda isə $f'(x) > 0$. Oudur ki, $f(x)$

funksiyası $\left]0; b^{\frac{q}{p}}\right[$ -də azalır. $\left[b^{\frac{q}{p}}; +\infty\right[$ -da isə artır. Beləliklə,

$\left]0; +\infty\right[$ -da $f(x)$ funksiyası $x = b^{\frac{q}{p}}$ olduqda ən kiçik qiymətini alır.

Oudur ki, $f(a) \geq f\left(b^{\frac{p}{q}}\right)$ (5). Habelə bərabərlik yalnız $a = b^{\frac{p}{q}}$, yəni

$a^p = b^q$ olduqda mümkündür. (1) şərtini nəzərə alaraq göstərmək olar ki, $f\left(b^{\frac{p}{q}}\right) = 1$, beləliklə (3) bərabərsizliyi doğrudur, beləliklə isə baxılan əsas (2) bərabərsizliyi ödənilir.

76. e^x funksiyasının Teylor sırasına ayrılışından istifadə edib
 $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$, alırıq, buradan $x \geq 0$ olduqda
 $x + \frac{x^3}{3!} \leq \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ alınır. Bu bərabərsizlikdə $x = \ln a$ götürək, onda

$$\ln a + \frac{\ln^3 a}{3!} \leq \frac{a - \frac{1}{a}}{2}, \quad 2 \ln a + \frac{2 \ln^3 a}{3!} \leq \frac{a^2 - 1}{a}, \quad \left(2 + \frac{\ln^2 a}{3}\right) \ln a \leq \frac{a^2 - 1}{a}.$$

77. Fərz edək ki, birinci rəfdə x kitab vardır (və oldu), onda üçüncü rəfdə də x , ikincidə isə $2x$ kitab oldu. Şərtə görə $x + x + 2x = 44$, $4x = 44$, $x = 11$. Beləliklə rəflərdə uyğun olaraq 11, $11 \cdot 2 - 3 = 19$, $11 + 3 = 14$ kitab olmuşdur.

78. Törəmənin tətbiqilə $\varphi(x) = \psi(x)$ eyniliyinin doğruluğunun isbat etmək üçün aşağıdakı alqoritmədən istifadə etmək olar.

1. $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ (və ya $f(x) = \psi(x) - \varphi(x)$ funksiyasını tərtib etməli).

2. $f(x)$ funksiyasının təyin oblastını tapmalı (bu verilmiş eyniliyin təyin oblastı ilə eyni olur).

3. $f(x)$ funksiyasının törəməsinin sıfıra bərabər olduğunu göstərməklə (təyin oblastının ixtiyari nöqtəsində $f(x) = \text{sabit}$ olması nəticəsinə gəlmək).

4. Bu sabitin funksiyanın təyin oblastının ixtiyari nöqtəsində qiymətinin sıfıra bərabər olması göstərilir.

Bu alqoritmənin tətbiqilə baxılan eyniliyin isbatı:

$$1) f(x) = \arctg x + \arctg 3x - \arccos \frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}} - \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

2) f funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur və kəsilməyəndir.

$$3) f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} - \frac{3}{1+9x^2} + \sqrt{1+9x^2} \cdot \frac{3\sqrt{1+9x^2} - \frac{3x \cdot 18x}{3\sqrt{1+9x^2}}}{1+9x^2} + \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x \cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} =$$

$$-\frac{1}{1+x^2} - \frac{3}{1+9x^2} + \frac{3}{1+9x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0; \quad f'(x) = 0, \text{ odur ki, } f(x) = c, \text{ burada } c - \text{sabitdir}$$

4) c-ni təyin etmək üçün $x=0$ götürək.

Onda

$$c = f(0) = \arctg 0^0 + \arctg 0^0 - \arccos 0^0 - \arccos 0^0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

$f(x) = c$ bərabərliyində $c = 0$ olduğunu nəzərə alsaq eyniliyi isbat etmiş oluruk.

79. Fərz edək ki, T verilmiş funksiyanın dövrüdür. Onda bütün x-
lər üçün

$$A \sin a(x+T) + B \sin b(x+T) + C \cos c(x+T) = A \sin ax + B \sin bx + C \sin cx$$

(1) bərabərliyi doğrudur. Bu bərabərliyi ardıcıl olaraq iki dəfə diferensiallayıb alırıq:

$$Aa \cos a(x+T) + Bb \cos b(x+T) - Cc \sin c(x+T) = Aa \cos ax + Bb \cos bx - Cc \sin cx \quad (2)$$

$$-Aa^2 \sin a(x+T) - Bb^2 \sin b(x+T) - Cc^2 \cos c(x+T) = -Aa^2 \sin ax - Bb^2 \sin bx - Cc^2 \cos cx \quad (3)$$

Bu bərabərliklər x-in bütün qiymətlərində doğrudur. Odu ki,
 $x = -\frac{T}{2}$ götürə bilərik. Onda

$$A \sin \frac{aT}{2} + B \sin \frac{bT}{2} + C \cos \frac{cT}{2} = -A \sin \frac{aT}{2} - B \sin \frac{bT}{2} + C \sin \frac{cT}{2} \quad (4)$$

$$Aa \cos \frac{aT}{2} + Bb \cos \frac{bT}{2} - Cc \sin \frac{cT}{2} = Aa \cos \frac{aT}{2} + Bb \cos \frac{bT}{2} + Cc \sin \frac{cT}{2} \quad (5)$$

$$-Aa^2 \sin \frac{aT}{2} + Bb^2 \sin \frac{bT}{2} - Cc^2 \cos \frac{cT}{2} = Aa^2 \sin \frac{aT}{2} + Bb^2 \sin \frac{bT}{2} + Cc^2 \cos \frac{cT}{2} \quad (6)$$

(5) bərabərliyindən alınır ki, $2Cc \sin \frac{cT}{2} = 0$, yəni elə tam n ədədi
vardır ki, $\frac{cT}{2} = \pi n$ və ya $T = \frac{2\pi}{c} n$. (4) və (6) bərabərliklərindən

$$A \sin \frac{aT}{2} + B \sin \frac{bT}{2} = 0, \quad Aa^2 \sin \frac{aT}{2} + Bb^2 \sin \frac{bT}{2} = 0 \quad \text{bu iki bərabərlikdən isə}$$

$$A(b^2 - a^2) \sin \frac{aT}{2} = 0 \quad \text{və} \quad B(b^2 - a^2) \sin \frac{bT}{2} = 0 \quad \text{alınır.} \quad a \neq b$$

olduğundan $\sin \frac{aT}{2} = 0$ və $\sin \frac{bT}{2} = 0$, yəni elə m və

$$k \text{ ədədləri vardır ki, } \frac{aT}{2} = m\pi \quad \text{və ya} \quad T = \frac{2\pi}{a} m \quad \text{və} \quad \frac{bT}{2} = k\pi \quad \text{və}$$

$$\text{ya } T = \frac{2\pi}{b} k$$

Qeyd edək ki, diferensial hesabının tətbiqi olmadan bu nəticəni almaq kifayət qədər çətinidir. $f(x) = A \sin ax + B \sin bx + C \cos x$ düsturunda sinus və kosinusun başqa yazılışında və toplananların sayının artırılmasında da dövrün tapılması üçün baxılan metoddan istifadə etmək olar.

80. Əvvəl $tg \alpha + tg(\alpha + 60^0) + tg(\alpha + 120^0) = 3tg 3\alpha$ (1) eyniliyini isbat edək:

$$\begin{aligned} tg \alpha + tg(\alpha + 60^0) + tg(\alpha + 120^0) &= tg \alpha + tg(\alpha + 60^0) + tg(180^0 + \alpha - 60^0) = tg \alpha + \frac{tg \alpha + tg 60^0}{1 - tg \alpha tg 60^0} + \\ &+ tg(\alpha - 60^0) = tg \alpha + \frac{tg \alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}tg \alpha} + \frac{tg \alpha - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}tg \alpha} = tg \alpha + \frac{(tg \alpha + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}tg \alpha)}{1 - 3tg^2 \alpha} + (tg \alpha - \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}tg \alpha) = \\ &= tg \alpha + \frac{8tg \alpha}{1 - 3tg^2 \alpha} = \frac{3(3tg \alpha - tg^3 \alpha)}{1 - 3tg^2 \alpha} = 3tg 3\alpha; \left(tg 3\alpha = \frac{3tg \alpha - tg^3 \alpha}{1 - 3tg^2 \alpha} \right); \end{aligned}$$

Alınmış eyniliyə əsasən daha iki eynilik alırıq:

$$tg(\alpha + 20^0) + tg(\alpha + 80^0) + tg(\alpha + 140^0) = 3tg(3\alpha + 60^0) \quad (2)$$

(1 eynilikdəki α yerində $\alpha + 20$ götürməklə).

$$tg(\alpha + 40^0) + tg(\alpha + 100^0) + tg(\alpha + 160^0) = 3tg(3\alpha + 120^0) \quad (3)$$

(1 eyniliyində α yerində $\alpha + 40^0$ götürməklə).

(1), (2), (3) eyniliklərini tərəf-tərəfə toplayaq:

$$\begin{aligned} tg \alpha + tg(\alpha + 60^0) + tg(\alpha + 120^0) + tg(\alpha + 20^0) + tg(\alpha + 80^0) + tg(\alpha + 140^0) + tg(\alpha + 40^0) + \\ + tg(\alpha + 100^0) + tg(\alpha + 160^0) = 3tg 3\alpha + 3tg(3\alpha + 60^0) + 3tg(3\alpha + 120^0) = 3[tg 3\alpha + tg(3\alpha + 60^0) + \\ + tg(3\alpha + 120^0)] = 9tg 9\alpha. \end{aligned}$$

Yenə (1) eyniliyinə əsasən

$$tg 3\alpha + tg(3\alpha + 60^0) + tg(3\alpha + 120^0) = 3tg 3(3\alpha) = 3tg 9\alpha \quad (1 \text{ eyniliyində } \alpha \text{ yerində } 3\alpha \text{ yazırıq}).$$

81. Nyuton düsturunun tətbiqi ilə asanlıqla müəyyən etmək olar ki, $(\sqrt{26} + 5)^{101} = A + B\sqrt{26}$ isə, onda $(\sqrt{26} - 5)^{101} = -A + B\sqrt{26}$, odur ki, $(\sqrt{26} + 5)^{101} - (\sqrt{26} - 5)^{101} \in Z$ (1).

Eyni zamanda $(\sqrt{26} - 5)^{101} < 0, 1^{101} < \frac{1}{10^{100}}$, deməli bu ədədin

vergüldən sonra ilk 100 onluq işarə sıfırdır; (1)-dən alınır ki, verilmiş ədəddə axtarılan ilk 100 onluq

işarə də sıfırdır.

82. $k^3 + 6k^2 + 11k + 6$ çoxhədlisinin üç müxtəlif kökü $(-1, -2$ və $-3)$ olduğundan, $k^3 + 6k^2 + 11k + 6 = (k+1)(k+2)(k+3)$ və qeyri-müəyyən əmsallar metodu ilə $\frac{1}{k^3 + 6k^2 + 11k + 6}$ kəsirini aşağıdakı ayrılışını alırıq:

$$\frac{1}{k^3 + 6k^2 + 11k + 6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2}$$

Onda

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3 + 6k^2 + 11k + 6} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+3} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+3} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right) = \frac{n(n+5)}{12(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

83. 83-93 məsələləri üzərində inteqral hesabının eyni çevirmələrə və bərabərsizliklər isbatına bir sıra tətbiqlərini göstəririk. Hər şeydən əvvəl bu ona görə lazımdır ki, belə tətbiqlər orta məktəb şagirdləri və müəllimləri üçün mövcud vəsaitlərdə demək olar ki, yoxdur. Belə çalışmalar təkcə inteqral aparatının faydalı olduğunu şagirdlərə göstərmək deyil, habelə onların bu anlayışı daha şüurlu öyrənmələrinə səbəb olur. Lakin belə çalışmaları yerinə yetirərkən müəllim şagirdləri başa salmalıdır ki, inteqral hesabının bunlardan əlavə daha mühüm tətbiqləri də vardır.

Baxılan belə çalışmalarda əvvəlcə verilən funksiyanın törəməsi sadələşdirilir. Eyniçevirmələrdə qeyri-müəyyən inteqralın ən sad tətbiqləri onunla əlaqədardır ki, hər bir funksiya onun törəməsinin ibtidai funksiyası kimi baxmaq olar; daha doğrusu iki F və f funksiyaları (sadəlik üçün onların hər ikisini hər hansı $[a, b]$ parçasında və ya $[a, b]$ yarım intervalda kəsilməyən hesab edirik) $F'(x) = f(x)$ ($a < x < b$) (1) asılılığı ilə əlaqədardırsa, onda onlar $F(x) = \int f(x) dx$ (2) münasibətilə də əlaqədardırlar. (2) bərabərliyini belə başa düşmək lazımdır: $F(x)$ funksiyası $f(x)$ funksiyasının inteqrallanmasından alınan funksiyalardan biridir, başqa sözlə $F(x)$ funksiyası $f(x)$ -in

ibtidai funksiyalarından biridir. Buradan aydın olur ki, $F(x)$ funksiyasının yazılışını sadələşdirmək çətindir, onda əvvəlcə onun $f(x) = F'(x)$ törəməsinə baxmaq faydalıdır: f funksiyasının yazılışını sadələşdirə bilərixsə, onda F üçün də kifayət qədər sadə ifadə tapa bilərik.

Baxılan $F(x)$ funksiyasını triqonometrik aparat vasitəsilə sadələşdirmək o qədər də sadə deyildir. Odur ki, onun əvvəlcə törəməsini sadələşdirmək münasibdirmi? Baxılan $F(x)$ funksiyası üçün bunu yoxlayaq:

$$f(x) = F'(x) = 3\cos 3x \cos^3 x - 3\sin 3x \cos^2 x \sin x - 3\sin 3x \sin^3 x + 3\cos 3x \sin^2 x \cos x = \\ = 3\cos 3x \cos x - 3\sin 3x \sin x$$

Beləliklə, $f(x) = 3\cos 4x$. Onda $F(x) = \int f(x)dx = \int 3\cos 4x dx = \frac{3}{4}\sin 4x + C$, burada C – hər hansı sabitdir. C -ni tapaq. $C = F(0) = 0$. Onda $F(x) = \frac{3}{4}\sin 4x$ yəni $\sin 3x \cos^3 x + \cos 3x \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin 4x$.

Elementar yolla bu nəticəni almaq üçün $\sin 3x$ və $\cos 3x$ -in ifadələrini bilmək lazımdır. Bundan sonra isə o qədər də sadə olmayan səmərəsiz çevirmələr aparmaq lazımdır. Belə çevirmələrin isə əhəmiyyəti azdır.

84. Əvvəlcə $S(x)$ funksiyasını elə seçmək lazımdır ki, x -in hər hansı konkret qiymətində (məsələn $x=1$ olduqda) σ alınsın, yəni $S(1) = \sigma$ alınsın. $S(x)$ olaraq $S(x) = \frac{C_n^0}{1}x - \frac{C_n^1}{2}x^2 + \frac{C_n^2}{3}x^3 - \frac{C_n^3}{4}x^4 + \dots + (-1)^n \frac{C_n^n}{n+1}x^{n+1}$ funksiyasını götürmək olar.

İndi $S(x)$ -i sadələşdirməyə çalışaq. İlk baxışda bunu necə etmək görünür. Yenə törəməni sadələşdirmək olarmı? $f(x) = S'(x)$ funksiyasına baxaq: $f(x) = C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 - C_n^3x^3 + \dots + (-1)^n C_n^n x^n$.

Aşkardır ki, $f(x) = (1-x)^n$. Beləliklə,

$$S(x) = \int (1-x)^n dx = -\int (1-x)^n d(1-x) = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} + C,$$

burada C - hər hansı sabitdir. $x = 0$ olduqda $C = S(0) + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

$$\text{Beləliklə, } S(x) = \frac{1}{n+1} [1 - (1-x)^{n+1}].$$

$$x = 1 \text{ olduqda } \sigma = \frac{1}{n+1} \text{ alınır.}$$

85. Bəzən 83-84 məsələlərinin həllində tətbiq olunan priyomu bir deyil, bir neçə dəfə tətbiq etmək lazım gəlir.

Ardıcıl olaraq

$$f(x) = F'(x) = 3(x+a+b)^2 - 3(x+a-b)^2 - 3(x-a+b)^2 + 3(-x+a+b)^2,$$

$$\varphi(x) = f'(x) = 6(x+a+b) - 6(x+a-b) - 6(x-a+b) - 6(-x+a+b)$$

tapmaq.

Aşkardır ki, $\varphi(x) = 0$. Odur ki, $f(x) = \int \varphi(x) dx = \int 0 \cdot dx = C_1$,
yəni, $f(x) = C_1$, burada $C_1 = \text{sabit}$, $C_1 = f(0) = 24ab$.

İndi $F(x)$ -ə baxaq. $F(x) = \int f(x) dx = \int 24ab dx = 24abx + C$ ($C = \text{sabit}$).

Aşkardır ki, $C = F(0) = 0$. Beləliklə, $F(x) = 24abx$.

Elementar yolla bu nəticəni də almaq səmərəsizdir.

86. Fərz edək ki, verilmiş hər hansı f funksiyasının yazılışını sadələşdirmək tələb olunur. 83 məsələsinin həlli ilə əlaqədar baxılan iki eynigüclü (1) və (2) münasibətləri göstərir ki, f funksiyasının yazılışını sadələşdirmək üçün onun kifayət qədər sadə F ibtidai funksiyasına baxmaq münasibdir. Buradan alınır: Verilmiş f funksiyasının yazılışını sadələşdirmək çətin olan hallarda əvvəlcə onun F ibtidai funksiyasına baxmaq və sadələşdirmək faydalı ola bilər; sonra $f(x) = F'(x)$ eyniliyindən istifadə edərək $f(x)$ funksiyasının daha sadə formasını almaq mümkün ola bilər. Baxılan eyniliyin sol tərəfini $f(x)$ ilə işarə edək. $f(x)$ funksiyasını necə sadələşdirmək ilk baxışda görünmür. Onun ibtidai funksiyasına baxaq. İbtidai funksiyanı tapmaq və sadələşdirmək sadə ola bilər:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{2 \sin 2x}{\cos 2x} dx + \int \frac{4 \sin 4x}{\cos 4x} dx + \int \frac{8 \sin 8x}{\cos 8x} dx = -\ln|\cos x| - \ln|\cos 2x| - \\ &- \ln|\cos 4x| - \ln|\cos 8x| + C = -\ln \left| \frac{\sin 2x}{2 \sin x} \cdot \frac{\sin 4x}{2 \sin 2x} \cdot \frac{\sin 8x}{2 \sin 4x} \cdot \frac{\sin 16x}{2 \sin 8x} \right| + C = -\ln \left| \frac{\sin 16x}{16 \sin x} \right| + C = \\ &= -\ln|\sin 16x| + \ln|\sin x| + \ln 16 + C \end{aligned}$$

İndi isə $f(x)$ - i asanlıqla hesablamaq olar:
 $f(x) = F'(x) = -16ctg16x + ctgx$

Beləliklə, baxılan eynilik isbat olundu.

87. $\varphi(x)$ funksiyasını triqonometrik düsturun tətbiqi ilə sadələşdirmək müəyyən qədər çətinidir. $\varphi'(x)$ ifadəsini də sadələşdirmək asan deyil. Əvvəlcə ibtidai funksiyanı tapmaq sadə ola bilər:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \int \varphi(x) dx = -\ln|\cos x| - \ln|\cos(x-3)| - \ln\left|\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right| + C = \\ &= -\ln\left|\cos x \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right| + C = -\ln\left|\frac{1}{2} \cos x \left(\cos 2x + \cos \frac{2\pi}{3}\right)\right| + C = \\ &= -\ln\left|\frac{1}{4}(\cos 3x + \cos x) - \frac{1}{4} \cos x\right| + C = -\ln|\cos 3x| - \ln \frac{1}{4} + C \\ &= -\ln\left|\frac{1}{4}(\cos 3x + \cos x) - \frac{1}{4} \cos x\right| + C = -\ln|\cos 3x| - \ln \frac{1}{4} + C\end{aligned}$$

Odur ki, $\varphi(x) = \Phi'(x) = 3tg3x$.

Beləliklə, aldığımız ki, $tgx + tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + tg\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3tg3x$ eyniliyi doğrudur.

88. $n = 1$ olduqda göstərilən düstur $(1+x)^1 = 1+x$ şəkildə olur və aşkardır ki, bu doğrudur. Fərz edək ki, $n = k$ olduqda baxılan düstur doğrudur:

$$(1+x)^k = C_k^0 + C_k^1 x + C_k^2 x^2 + \dots + C_k^{p-1} x^{p-1} + C_k^p x^p + \dots + C_k^k x^k \quad (1)$$

İsbat edək ki, bu şərt olduqda verilən bərabərlik $n = k+1$ olduqda da doğrudur. Bu məqsədlə (1) eyniliyini 0-dan x -ə sərhəd olmaqla inteqrallayaq:

$$\begin{aligned}\int_0^x (1+t)^k dt &= C_k^0 \int_0^x 1 dt + C_k^1 \int_0^x t dt + \dots + C_k^{p-1} \int_0^x t^{p-1} dt + C_k^k \int_0^x t^k dt ; \\ \frac{(1+t)^{k+1}}{k+1} \Big|_0^x &= C_k^0 t \Big|_0^x + C_k^1 \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^x + \dots + C_k^{p-1} \frac{t^p}{p} \Big|_0^x + \dots + C_k^k \frac{t^{k+1}}{k+1} \Big|_0^x\end{aligned}$$

İnteqrallama sərhədlərini yerinə yazdıqdan sonra

$$(1+x)^{k+1} = 1 + \frac{k+1}{1} C_k^0 x + \frac{k+1}{2} C_k^1 x^2 + \dots + \frac{k+1}{p} C_k^{p-1} x^p + \dots + \frac{k+1}{k+1} C_k^k x^{k+1}$$

alırıq. Lakin $(k+1)C_k^0 = C_{k+1}^1$, $\frac{k+1}{2} C_k^1 = \frac{(k+1)k}{2} = C_{k+1}^2, \dots$

$$\frac{k+1}{p} C_k^{p-1} = \frac{(k+1)k(k-1)\dots(k-p+2)}{p \cdot 1 \cdot 2 \dots (p-1)} = C_{k+1}^p ;$$

$$(p=1, 2, \dots, k+1)$$

Buradan alınır ki, $(1+x)^{k+1}$ -i belə yazmaq olar:

$$(1+x)^{k+1} = 1 + C_{k+1}^1 \cdot x + C_{k+1}^2 x^2 + \dots + C_{k+1}^p x^p + \dots + C_{k+1}^{k+1} x^{k+1}$$

Beləliklə, $n=k$ olduqda verilmiş düsturun doğruluğundan alınır ki, $0 \leq n \leq k+1$ üçün də doğrudur. Tam riyazi induksiya prinsipinə əsasən verilmiş düstur bütün natural n ədədləri üçün doğrudur.

89. 1) Əvvəlcə $\sin x \leq x$ ($0 \leq x < \infty$) bərabərsizliyin hər tərəfini 0-dan x -ə qədər sərhəddə inteqrallayaq. 1 teoreminə əsasən

$$\int_0^x \sin t dt \leq \int_0^x t dt \quad \text{və ya} \quad -\cos t \Big|_0^x \leq \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^x \quad \text{və ya} \quad -\cos x + 1 \leq \frac{x^2}{2}$$

buradan $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ alınır.

2) 1) bərabərsizliyindən istifadə etməklə həmin 1 teoreminə görə

$$\int_0^x \cos t dt \geq \int_0^x \left(1 - \frac{1}{2} t^2\right) dt \quad \text{alırıq, buradan isə tələb olunan alınır.}$$

3) 2) halından $\int_0^x \sin t dt \geq \int_0^x \left(t - \frac{1}{6} t^3\right) dt$ və ya $-\cos x + 1 \geq \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$ alınır,

buradan tələb olunanı yoxlamış oluruq.

90. $\sin x - \cos x$ fərqlərini qiymətləndirməliyik (aşağıdan və yuxarıdan). Bu fərqi $\cos x + \sin x$ funksiyasını inteqrallamaqla almaq

olar. $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ olduğunu nəzərə almaqla

asanlıqla müəyyən etmək olar ki, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ parçasında bu funksiya

$1 \leq \cos x + \sin x \leq 2$ bərabərsizliyini ödəyir. Bu bərabərsizliyin hədlərini 0-dan x -ə sərhəddində inteqrallayıb (1 teoreminə görə)

$$\int_0^x 1 dt \leq \int_0^x (\cos t + \sin t) dt \leq \int_0^x \sqrt{2} dt \quad \text{doğru bərabərsizliyini alırıq.}$$

Buradan $t|_0^x \leq (\sin t - \cos t)|_0^x \leq \sqrt{2}t|_0^x$ və ya $x \leq \sin x - \cos x + 1 \leq \sqrt{2}x$

və ya $x - \sin x \leq 1 - \cos x \leq x\sqrt{2} - \sin x$ alınır.

91. $tgx + \sin x \geq 2x$ bərabərsizliyinin hədlərini diferensiallayaq:

$\frac{1}{\cos^2 x} + \cos x \geq 2$ əvvəlcə alınmış bu bərabərsizliyi $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ olduqda isbat edək. Mənfi olmayan ədədlərin ədədi ortasının bu ədədlərin həndəsi ortasından kiçik olmaması faktından istifadə edək.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ olduqda $0 < \cos x < 1$ olduğundan

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \cos x \geq 2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x} = 2\sqrt{\frac{1}{\cos x}} \geq 2. \quad \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x \geq 2$$

bərabərsizliyinə 1 teoremini tətbiq edib ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ olduqda)

$$\int_0^x \left(\frac{1}{\cos^2 t} + \cos t \right) dt \geq \int_0^x 2 dt \quad \text{və ya } tgx + \sin x \geq 2x \text{ alırıq.}$$

92. Əvvəlcə $\ln(2 \sin x) > \frac{1}{2}x(\pi - x) - \frac{5}{72}\pi^2$ ifadəsinin

hədlərinin diferensiallanmasından alınan $ctgx > \frac{\pi}{2} - x$ $\left(\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2} \right)$

bərabərsizliyinin doğruluğunu müəyyənləşdirmək lazımdır. Bu bərabərsizlik doğrudur, çünki $tg\alpha > \alpha$ (burada $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) doğru bərabərsizliyində $\alpha = \frac{\pi}{2} - x$ götürsək 0 alınır; bundan əlavə $ctg \frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$.

Odur ki, alınmış $ctgx > \frac{\pi}{2} - x$ bərabərsizliyin hədlərini $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$

şərtilə integrallasaq $\int_{\frac{\pi}{6}}^x ctgtdt > \int_{\frac{\pi}{6}}^x \left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt$ və ya $\ln \sin t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^x > \left(\frac{\pi}{2}t - \frac{1}{2}t^2\right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^x$,

$\ln \sin x - \ln \frac{1}{2} > \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right) - \left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right]$ alırıq. Burada isə

sadə çevirmələr apardıqdan sonra tələb ediləni alırıq.

93. Əvvəlcə baxılan bərabərsizliyin hədlərinin törəməsi üçün alınan analoji bərabərsizliyin ($x \geq 0$ olduqda) doğruluğunu yoxlamaq

lazımdır: $1 - x + x^2 - \dots + x^{2n} - x^{2n+1} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2 - \dots + x^{2n}$.

Bu ifadədiki silsilələrin cəmini tapmaqla onu $\frac{1 - x^{2n+2}}{1+x} \leq \frac{1}{1+x} < \frac{1 + x^{2n+2}}{1+x}$ ($x \geq 0$) şəkildə yazmaq olar. Aşkardır

ki, alınmış bu ikiqat bərabərsizlik, doğrudur. Onun hədlərini 0-dan x -ə qədər sərhəddə integrallamaqla tələb ediləni alırıq.

94. 1) Verilmiş münasibətə x -ə nəzərən tənlik kimi baxaraq yeganə $x = \frac{2y-1}{y-2}$ kökünü tapırıq. ($y \neq 2$ olduqda). Alınmış ifadədə də x və y -in yerini dəyişib alırıq ki, verilmiş funksiyanın tərsi həmin funksiyanın özüdür.

2) Aşkardır ki, O nöqtəsi verilmiş funksiyanın təyin oblastına daxil deyildir. $x \neq 0$ olarsa. Onda $y = \frac{x+3}{x-5}$ ifadəsini alırıq, $x \neq 0$. Bu

tənliyi x -ə nəzərən həll edib $x = \frac{5y+3}{y-1}$, $x \neq 0$ alırıq. Burada $x \neq 0$

göstərişini $y \neq -\frac{3}{5}$ ilə əvəz etmək olar. Çünki, sağ tərəfdəki kəsir

yalnız $y = -\frac{3}{5}$ olduqda sıfıra çevrilir. İndi x və y -in yerini dəyişib

verilmiş funksiyanın tərsi olan $y = \frac{5x+3}{x-1}$, $x \neq -\frac{3}{5}$ funksiyanı alırıq.

$x \neq -\frac{3}{5}$ göstərişi mühümdür: bu göstərişi nəzərə almadıqda $y = \frac{x+3}{x-5}$

funksiyasının (verilmiş funksiyanın deyil) tərsi olan $y = \frac{5x+3}{x-1}$

funksiyasını alırıq. Qeyd edək ki, $y = \frac{5x+3}{x-1}$, $x = -\frac{3}{5}$ funksiyanı

$y = \frac{(5x+3)^2}{(x-1)(5x+3)}$ şəklində də yazmaq olar.

3) Verilmiş bərabərliyi $y = x(|x| + 2)$ şəklində yazdıqda aydın olur ki, mötərizədəki ifadə x -in bütün qiymətlərində müsbətdir. Odur ki, x və y ədədlərinin işarələri eynidir. $y \geq 0$ isə (beləliklə isə $x \geq 0$) onda baxılan ifadə $y = x^2 + 2x$ şəklində olur. Bu tənliyi x -ə nəzərən həll edib $y \geq 0$ olduqda $x = -1 + \sqrt{1+y}$ alırıq (kvadrat tənliyin həllindən alınan ikinci kök $x \geq 0$ şərtini ödəmir). $y \leq 0$ olarsa onda baxılan münasibət $y = -x^2 + 2x$ şəklində olur. Bu tənliyi x -ə nəzərən həll edib $y \leq 0$ olduqda $x = 1 - \sqrt{1-y}$ alırıq. Beləliklə $y = x|x| + 2x$ tənliyinin

x -ə nəzərən həlli birqiymətli və $x = \begin{cases} -1 + \sqrt{1+y}, & y \geq 0 \text{ olduqda} \\ 1 - \sqrt{1-y}, & y \leq 0 \text{ olduqda} \end{cases}$

şəklindədir. Burada x -lə y -in yerini dəyişib baxılan funksiyanın tərsini

alırıq: $y = \begin{cases} -1 + \sqrt{1+x}, & x \geq 0 \text{ olduqda} \\ 1 - \sqrt{1-x}, & x < 0 \text{ olduqda} \end{cases}$

95. $x:y$ qisməti 2-dən böyük olarsa, onda x -də 2-dən böyük olar. Onda verilmiş tənliyin sol tərəfi ən azı beşrəqəmli ədəd olar. Digər tərəfdən bu qismət 1-də bərabər deyil. Odur ki, $x:y = 2$. İndi $\overline{xy}$ ədədinin $\{21, 42, 63, 84\}$ çoxluğuna daxil olması halına baxmaq qalır. Bilavasitə yoxlamaqla alırıq ki, $\overline{xy} = 63$, buradan $x = 6$, $y = 3$, $z = 9$, $t = 6$, $n = 9$.

96. Verilmiş bərabərsizliyi $\frac{2 + \sqrt{2+a}}{2-a} < \frac{1}{3}$ şəklində yazaq.

Aşkardır ki, $a < 2$ (bunu, məsələn riyazi induksiya metodu ilə asanlıqla isbat etmək olar)

Sonuncu bərabərsizliyi $3\sqrt{a+2} > a+4$ şəkildə yazıb, hər tərəfi kvadrata yüksəldib sadələşdirdikdən sonra $a^2 - a - 2 < 0$ və $-1 < a < 2$ alırıq. Sonuncu bərabərsizlik isə bildiyimizə görə doğrudur.

97. Fərz edək ki, f axtarılan funksiyadır; Onda $[0; +\infty)$ intervalında onun ikinci törəməsi x -ə bərabər olar, beləliklə isə onun birinci törəməsi $\frac{x^2}{2} + a$ şəkildədir. Odur ki, $(0; +\infty)$ intervalında

$$f(x) = \frac{x^3}{6} + ax + b \quad (1), \text{ burada } a, b \text{ hər hansı həqiqi ədədlərdir. Eləcə}$$

də $(-\infty; 0)$ intervalında $f(x) = \frac{x^3}{6} + cx + d \quad (2)$ düsturunu alırıq. İndi

a, b, c, d ədədlərini elə seçmək lazımdır ki, f funksiyasının O nöqtəsində iki törəməsi olsun. f funksiyası O nöqtəsində kəsilməyən olduğundan $x=0$ olduqda (1) və (2) düsturlarından eyni qiymət alınmalıdır, buradan $b=d$ bərabərliyi alınır. Sonra $(0; +\infty)$ və $(-\infty; 0)$ aralıqlarında, f funksiyasının törəmələri uyğun olaraq

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} + a, \quad f'(x) = -\frac{x^2}{2} + C \quad \text{şəkildədir. } O \text{ nöqtəsində ikinci}$$

törəmənin varlığı üçün birinci törəmənin bu nöqtədə kəsilməz olması lazımdır. Odur ki, (yuxarıda deyilənə baxmalı) $a=c$ bərabərliyi alınır.

$$\text{Beləliklə, axtarılan funksiya } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{6} + ax + b, & x \geq 0 \text{ olduqda} \\ -\frac{x^3}{6} + ax + b, & x < 0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

$$\text{və ya } f(x) = \frac{1}{6}x^2|x| + ax + b$$

98. Aşkıdır ki, $x \neq 1$. $x=2$ isə onda $y+z$ cəminin kvadratı 2 ilə başlayan üçrəqəmli ədəddir, bu ədədlər isə 225, 256 və ya 289 ola bilər. Lakin baxılan bərabərlik yalnız 3-cü halda ödənilir; onda $x=2$, $y=8$, $z=9$ $x=3$ olarsa, onda $y+z$ cəminin kubı 3 ilə başlayan üçrəqəmli ədəddir, bu isə yalnız 343 ola bilər. Buradan

$x = 3, y = 4, z = 3$ alırıq. $x = 4$ olarsa $y + z$ cəminin 4-cü dərəcədən qüvvəti 3 ilə başlayan üçrəqəmli ədəd olmalıdır, bu isə mümkün deyil. Eyni qayda ilə göstərilir ki, x ədədi 5, 6 və s. ola bilməz.

99. Əvvəlcə isbat edək ki, $[2; 3]$ parçasında $f(x) > g(x)$ bərabərsizliyi doğrudur.

$$f(x) - g(x) = \frac{(3x^2 - 1)(x^3 + x + 2) - (3x^2 + 1)(x^3 - x + 2)}{(x^3 - x + 2)(x^3 + x + 2)} = \frac{4x^3 - 4}{(x^3 - x + 2)(x^3 + x + 2)} > 0$$

Onda axtarılan sahə

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{(3x^2 - 1)dx}{x^3 - x + 2} - \int_2^3 \frac{(3x^2 + 1)dx}{x^3 + x + 2} &= \ln|x^3 - x + 2| \Big|_2^3 - \ln|x^3 + x + 2| \Big|_2^3 = \ln 26 - \ln 8 - \ln 32 + \ln 12 = \\ &= \ln \frac{26 \cdot 12}{8 \cdot 32} = \ln \frac{39}{32} \end{aligned}$$

100. Verilmiş bərabərlikdə $t = 2x + 1$ əvəz edib onu $f(t) = f\left(\frac{t-1}{2}\right)$ şəkildə yazaq. Bunu ixtiyari $z \in R$ ədədi üçün nəzərə alıb

$$f(z) = f\left(\frac{z-1}{2}\right) = f\left(\frac{\frac{z-1}{2}-1}{2}\right) = f\left(\frac{z-3}{4}\right) = f\left(\frac{z-7}{8}\right) = \dots f\left(\frac{z-2^n+1}{2^n}\right)$$

alırıq. Onda f inikası kəsilməz olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{z-2^n+1}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(-1 + \frac{z+1}{2^n}\right) = f(-1)$, belə ki, $f(z) = f(-1)$ sabit funksiyadır.

$$101. \quad f(x) = \frac{(2x-1)^4}{x^6} = \left(2 - \frac{1}{x}\right)^4 \cdot \frac{1}{x^2} \quad \text{funksiyasına baxaq.}$$

$[1; +\infty)$ aralığında onun monotonluğunu və ekstremumunu araşdıraraq:

$$f'(x) = 4\left(2 - \frac{1}{x}\right)^3 \cdot \frac{1}{x^4} - \left(2 - \frac{1}{x}\right)^4 \cdot \frac{2}{x^3} = \left(2 - \frac{1}{x}\right)^3 \cdot \frac{2}{x^3} \cdot \left(\frac{2}{x} - 2 + \frac{1}{x}\right) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)^3 \cdot \frac{2}{x^3} \cdot \left(\frac{3}{x} - 2\right)$$

Bizi maraqlandıran aralıqda $x = 1,5$ olduqda törəmə sıfır olur. $x \in [1; 1,5)$ isə $f'(x) > 0$, yəni f funksiyası artır; $x \in (1,5; \infty)$ isə, onda

$f'(x) < 0$, yəni baxılan f funksiyası azalır. Beləliklə, $x = 1,5$ olduqda f funksiyası maksimumun qiymətini alır. $f(1) = 1$, $f(1,5) = \frac{2^{10}}{3^6} \approx 1,4$,

$f(2) = \frac{81}{64} \approx 1,25$ olduğuna diqqət etməklə funksiyanın təqribi qrafikini alırıq (Şəkil 60).

Sonra tapırıq:

$$1 + \frac{3^4}{2^6} + \frac{5^4}{3^6} + \frac{7^4}{4^6} + \dots + \frac{(2n-1)^4}{n^6} + \dots < 1 + \frac{81}{64} + \int_2^{\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)^4 \cdot \frac{1}{x^2} dx = 2 + \frac{17}{64} + \frac{1}{5} \left(2 - \frac{1}{x}\right)^5 \Big|_2^{\infty} =$$

$$= 2 + \frac{17}{64} + \frac{32}{5} - \frac{1}{5} \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 8 + \frac{85+128}{320} - \frac{243}{160} = 7 + \frac{85+128-166}{320} = 7 \frac{47}{320} < e^2$$

.

102. $\frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$ olduğundan integral altındakı funksiya

$$\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} - \frac{2}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} - \frac{2}{x+2} + \frac{2}{x+3}$$

-ya axtarılan integral isə

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2} + \int_0^1 \frac{dx}{(x+3)^2} - \int_0^1 \frac{dx}{(x+3)^2} - \int_0^1 \frac{2dx}{(x+2)} + \int_0^1 \frac{2dx}{x+3} = -\frac{1}{x+2} \Big|_0^1 - \frac{1}{x+3} \Big|_0^1 - 2\ln(x+2) \Big|_0^1 +$$

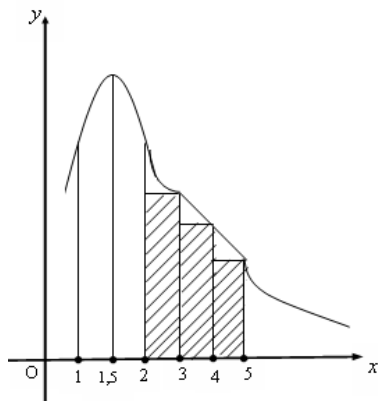
$$+ 2\ln(x+3) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + 2\ln \frac{8}{9} \text{ -ə bərabər}$$

olar.

103. $f(x) = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{1-x}$,
 $x \in (-1; 1)$ funksiyasına baxaq.

$$f'(x) = \frac{1}{(\sqrt[3]{1+x})^2} - \frac{1}{(\sqrt[3]{1-x})^2}$$

törəməsi yeganə O nöqtəsində sıfıra bərabər olduğundan və bu nöqtədə işarəsini müsbətdən mənfiyə dəyişdiyindən O nöqtəsi f funksiyasının maksimum nöqtəsidir. Beləliklə



Şəkil 60

$f(0) > f\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}\right)$, yəni $\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt[3]{3}}{3}} + \sqrt[3]{1-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}} < 2$, buradan sadə çevirmədən

sonra baxılan bərabərsizliyi alırıq.

$$104. \quad a_n = \frac{n!}{n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{n^n} < \frac{1 \cdot n \cdot n \cdot n}{n^n} = \frac{1}{n} \quad \text{və} \quad a_n > 0$$

olduğundan $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$, odur ki, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

105. $x, x^2 - 1$ və $x^3 - 1$ ifadələrini uyğun olaraq a, b, c ilə işarə edək. Sistemə daxil olan bərabərsizlikləri çevirməklə onu
$$\begin{cases} x(x^2 - 1) + (x^2 - 1)(x^3 - 1) + x(x^3 - 1) > 0 \\ x^3 - 1 + x^2 - 1 + x > 0 \\ x(x^2 - 1)(x^3 - 1) > 0 \end{cases}$$
 şəkildə yazmaq olar. Onda verilmiş

bərabərsizliklər sistemini $p = a + b + c > 0, q = ab + bc + ac > 0, z = abc > 0$ şəklində yaza bilərik. Onda a, b, c $t^3 - pt^2 + qt - z = 0$ tənliyinin köküdür. Aşkardır ki, bu tənliyin mənfi kökü yoxdur, odur ki, a, b, c ifadələri müsbətdir, yəni $x > 0, x^2 - 1 > 0, x^3 - 1 > 0$. Buradan isə verilmiş sistemin $(1; \infty)$ həllini alırıq.

106. Verilmiş tənlikləri toplasaq və çıxsaq onunla eynigüclü
$$\begin{cases} (x+y)(1-\sqrt{x^2-y^2}) = \sqrt{1-x^2+y^2} (a+b) \\ (x-y)(1+\sqrt{x^2-y^2}) = \sqrt{1-x^2+y^2} (a-b) \end{cases} \quad (1)$$
 sistemini alırıq.

Alınmış sistemin tənliklərin sağ və sol tərəflərini vurub $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ (2) tapırıq. Sonuncu bərabərliyi (1) nəzərə alıb onu

$$\text{belə yazmaq olar: } \begin{cases} x+y = \frac{(a+b)\sqrt{1-a^2+b^2}}{1-\sqrt{a^2-b^2}} \\ x-y = \frac{(a-b)\sqrt{1-a^2+b^2}}{1+\sqrt{a^2-b^2}} \end{cases}$$

Alınmış sistemin tənliklərini tərəf-tərəfə toplayıb və çıxsaq
$$\left(\frac{a+b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}}; \frac{b+a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}} \right)$$
 cavabını alırıq. $0 \leq a^2 - b^2 < 1$

olduqda sistemin həlli vardır. Parametrə görə araşdırmaya şagirdlərin diqqətini xüsusi cəlb etmək lazımdır. Sistemin həlli ilə əlaqədar aparılan mühakimə “+” qiymətləndirməni almaq üçün kifayət hesab edirik, lakin ciddi desək $x^2 - y^2$ -ni $a^2 - b^2$ ilə əvəz etməklə biz yalnız verilmiş sistemin nəticəsini alırıq. Bununla belə cavabda alınan düsturlar tamamilə verilmiş tənliklərdəki kimi olduğundan (x əvəzində a , y əvəzində $-b$), onlardan öz növbəsində (2) bərabərliyini də almaq və tərsinə verilmiş sistemə qayıtmaq olar; bu “dönmə” yoxlaması əvəz edir. Bununla da verilmiş sistem həllinin yoxlanılmasının bir üsulunu da şagirdlərə öyrətməmiş olur. Bu məsələdə örtülü şəkildə Eynşteynin

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

nisbilik nəzəriyyəsindən alınan Lorens çevirməsi iştirak edir. Bu çevirmə haqqında verilən sistemin həllinə aid mühakimə ilə kifayətlənmək olar.

107. Verilmiş tənliyi $(x^2 y')' = -1$ şəkildə yazaq. Buradan $x^2 y' = -x + C$ və ya $y' = -\frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$. Onda $y = -\ln x - \frac{C}{x} + C_1$ (1). Beləliklə, bütün axtarılan funksiyalar (1) düsturu ilə verilir, burada c və c_1 - ixtiyari həqiqi ədədlərdir.

108. $y = \frac{1}{2} \log_9 x$ əvəzləməsindən istifadə edək, onda $x = 9^{2y}$.

Bu qiyməti verilmiş tənlikdə yerinə yazıb $\log_{12}(9^y + 3^y) = y$ və ya $9^y + 3^y = 12^y$ alırıq. Aşkardır ki, bu tənliyin kökü $y = 1$ -dir. Asanlıqla göstərmək olar ki, başqa həll yoxdur. Doğrudan da tənliyin hər tərəfini 12^y -ə bölüb $\left(\frac{3}{4}\right)^y + \left(\frac{1}{4}\right)^y = 1$ alırıq. $f(y) = \left(\frac{3}{4}\right)^y + \left(\frac{1}{4}\right)^y$ funksiyası azalandır, odur ki, $y = 1$ qiymətini yalnız bir dəfə alır. Verilmiş tənliyin kökü $x = 81$ -dir.

109. $x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2$ tənliyini həll etmək lazımdır. Burada $x_1 = x_0 m_0$, $x_2 = x_0 m_1$, $x_3 = x_0 m_2, \dots, x_{n-1} = x_0 m_{n-1}$

(2) əvəzləməsindən istifadə etmək olar. Bunları (1)-də yerinə yazıb

$$x_0 + x_0 m_0 + x_0 m_1 + \dots + x_0 m_{n-1} = x_0^2 + x_0^2 m_1^2 + x_0^2 m_2^2 + \dots + x_0^2 m_{n-1}^2$$

və ya

$$x_0 (1 + m_0 + m_1 + \dots + m_{n-1}) = x_0^2 (1 + m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_{n-1}^2)$$

$$x_0 = \frac{1 + m_0 + m_1 + \dots + m_{n-1}}{1 + m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_{n-1}^2} \text{ alırıq. Sonra } x_0 \text{ -in qiymətini (2)}$$

bərabərliklərində yerinə yazıb $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ -i tapırıq. Deməli $n -$

$$\text{məchullu } \sum_{i=0}^{n-1} x_i = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 \text{ tənliyinin həlli } x_i = \frac{\left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} m_k\right) m_i}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} m_k^2}, \quad i = 0, 1, 2, n-1;$$

$m_0 = 1$ dir. Riyaziyyat həvəskarları bu ümumi nəticəyə bir sıra xüsusi halların ağıllı şərhı nəticəsində gəlmişlər [27]. Məsələn $a^2 + b^2 = a + b$ (3) və $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$ (4) tənliklərinin ağıllı şərhı düzbucaqlı üçbucaqda hipotenuzun kvadratı katetlərin cəminə, düzbucaqlı paralelepipedin diaqonalının kvadratı onun üç tilinin cəminə bərabərdir nəticəsi (3) və (4) tənliklərinin müsbət rəşional ədədlər çoxluğunda eyni bir sadə priyomla həllinin alınmasına (baxılan ümumi halda olduğı kimi) səbəb olmuşdur. Doğrudan da (3) tənliyi üçün həmişə $a = bm$ götürmək olar. Bunu həmin tənlikdə

$$\text{yerinə yazıb } a = \frac{m(1+m)}{1+m^2}, \quad b = \frac{1+m}{1+m^2} \text{ alırıq, burada } m - \text{ixtiyari}$$

müsbət rəşional ədəddir. Bununla Pifaqor teoreminin müsbət rəşional ədədlər çoxluğunda yuxarıda göstərilən ifadəsi alınır. Məsələn $m = \frac{1}{3}$

$$\text{və } m = \frac{1}{4} \text{ olduqda belə xüsusi hallardan ikisi alınır. } b = ma, \quad c = na$$

$$\text{götürməklə (4) tənliyinin } a = \frac{1+m+n}{1+m^2+n^2}, \quad b = \frac{m(1+m+n)}{1+m^2+n^2},$$

$c = \frac{n(1+m+n)}{1+m^2+n^2}$ ümumi həlləri düsturları alınır, burada m, n - ixtiyari müsbət rəşional ədədlərdir.

Beləliklə (1) tənliyinin həllini (3) və (4) tənlikləri həllərinin n məchul üçün təbii ümumiləşdirilməsi nəticəsində də almaq olar. Lakin təlim prosesində vaxta qənaət etmək məqsədilə (1)-in həllindən sonra (3) və (4) –ün həllinə baxmaq daha məqsədəuyğundur. Bundan sonra Pifaqor teoremi və düzbucaqlı paralelepipedin diaqonalı haqqında teoremin uyğun ifadəsini vermək faydalıdır.

$$110. \text{Ardıcıl olaraq } \frac{y''}{x} - \frac{y'}{x^2} = x^2 - \frac{1}{x^2}, \quad \left(y' \cdot \frac{1}{x} \right)' = x^2 - \frac{1}{x^2},$$

$$y' \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C \quad (C \in R),$$

$$y' = \frac{x^4}{3} + cx + 1, \quad y = \frac{x^5}{15} + \frac{cx^2}{2} + x + c_1 \quad (c, c_1 \in R) \text{ alınır.}$$

$$111. \quad (0; 1) \text{ aralığında } 0 < \sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2} \text{ bərabərsizliyi doğru}$$

olduğundan $\sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{4}$, buradan $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} > 0$. Beləliklə,

$$\int_0^1 \frac{x}{\cos x} dx < \int_0^1 \frac{2x}{2-x^2} dx = -\ln(2-x^2) \Big|_0^1 = \ln 2$$

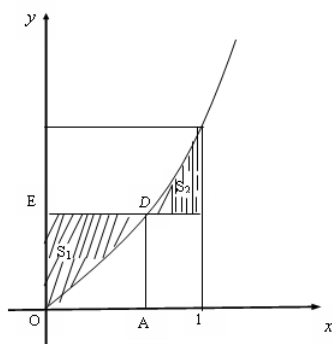
alınır ki, bunu da isbat etmək tələb olunurdu.

112. S_1 sahəsi ADEO düzbucaqlısının sahəsi ilə əyri xətlə ADO trapeşiyası sahəsinin fərqiə bərabərdir (Şəkil 61):

$$S_1 = t \cdot t^n - \int_0^t x^n dx = \frac{n}{n+1} t^{n+1}.$$

Analoji olaraq

$$S_2 = \int_t^1 x^n dx - (1-t)t^n = \frac{nt^{n+1}}{n+1} - t^n + \frac{1}{n+1}.$$



Şəkil 61

Beləliklə, $S = S_1 + S_2 = \frac{2n}{n+1}t^{n+1} - t^n + \frac{1}{n+1}$. Aşkardır ki, S' yalnız

$t = \frac{1}{2}$ olduqda sıfıra bərabərdir və bu nöqtədə işarəsini mənfidən

müsbətə dəyişir. Deməli S funksiyası ən kiçik qiymətini $t = \frac{1}{2}$ olduqda alır.

113. Əvvəlki məsələdə olduğu kimi $S_1(t) = (t-a)f(t) - \int_a^t f(x)dx$,

$$S_2(t) = \int_t^b f(x)dx - (b-t)f(t), \quad S(t) = S_1(t) + S_2(t) = (2t-a-b)f(t) - \int_a^t f(x)dx + \int_t^b f(x)dx.$$

Nyuton-Leybnis dusturundan alınır ki, $\left(\int_a^t f(x)dx \right)' = f(t)$,

$$\left(\int_t^b f(x)dx \right)' = -f(t) \text{ onda } S'(t) = (2t-a-b)f'(t) + 2f(t) - f(t) - f(t) = (2t-a-b)f'(t).$$

$f'(t) > 0$ olduğundan $t = \frac{a+b}{2}$ olduqda $S'(t) = 0$ və bu nöqtədə işarəsini mənfidən müsbətə dəyişir. Odur ki, S funksiyası ən kiçik qiymətini $t = \frac{a+b}{2}$ olduqda alır.

114. $f(x) = \sin^2 2x + \frac{1}{2} \cos 4x + 2 \sin^2 x + \cos 2x$ funksiyasının

törəməsini

tapaq:

$$f'(x) = 4 \sin 2x \cos 2x - 2 \sin 4x + 4 \sin x \cos x - 2 \sin 2x = 2 \sin 4x - 2 \sin 4x + 2 \sin 2x - 2 \sin 2x = 0$$

$f'(x) = 0$ olduğundan, $f(x)$ funksiyası $\mathbb{R}$ çoxluğunda sabitdir.

Onun ixtiyari nöqtədə qiymətini tapaq. Baxılan halda $x = 0$ götürmək daha münasibdir. $f(0) = \frac{3}{2}$. Eynilik isbat olundu.

115. Verilmiş funksiyayı çevirək:

$$f(x) = \frac{(\sin 5x + \sin 3x) - (\sin 3x + \sin x) + \sin x}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin 4x}{\cos x} - \frac{2 \sin 2x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 8 \sin x \cos 2x - 4 \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 8 \cdot \frac{1}{2} (-\sin x + \sin 3x) - 4 \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 4 \sin 3x - 8 \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$; F(x) = -\frac{3}{4} \cos 3x + 8 \cos x + \frac{1}{\cos x} + C$$

$$116. \frac{(1 - \cos x) + \sin x}{(1 + \cos x) + \sin x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)}{2 \cos \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)} = \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Buradan görünür ki, verilmiş funksiyanın tək olması $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ funksiyanın tək olmasından alınır.

117. Tənliyin sol tərəfini

$$\left(x_1 - \frac{1}{2} x_2 \right)^2 + \frac{3}{4} \left(x_2 - \frac{2}{3} x_3 \right)^2 + \frac{4}{6} \left(x_3 - \frac{3}{4} x_4 \right)^2 + \frac{5}{8} \left(x_4 - \frac{4}{5} x_5 \right)^2 + \frac{6}{10} \left(x_5 - \frac{5}{6} x_6 \right)^2 + \frac{7}{12} \left(x_6 - \frac{6}{7} x_7 \right)^2 + \frac{8}{14} \left(x_7 - \frac{7}{8} x_8 \right)^2 + \frac{9}{16} \left(x_8 - \frac{8}{9} \right)^2 \text{ yazılıb}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} x_2, x_2 = \frac{2}{3} x_3, \dots, x_6 = \frac{6}{7} x_7, x_7 = \frac{7}{8} x_8, x_8 = \frac{8}{9} \quad \text{alırıq,}$$

buradan $x_k = \frac{k}{9}, k \in \{1, 2, \dots, 8\}$. Yəni x_8 məlum olduğunda

$$x_7 = \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} = \frac{7}{9}, x_7 \text{ məlum olduğundan } x_6 = \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{9} = \frac{6}{9} \text{ və s. tapılır.}$$

118. Güman edirik ki, kökün altındakı ifadələr mənfi deyil. İki $\vec{p} = (1; 1; 1)$ və $\vec{q} = (\sqrt{4a+1}; \sqrt{4b+1}; \sqrt{4c+1})$ vektorlarına baxaq. Koşi-Bunyakovski teoreminə görə, $\left(\vec{p}, \vec{q} \right)^2 \leq \vec{p}^2 \cdot \vec{q}^2$ və ya

$$(\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1})^2 \leq 3(4a+1 + 4b+1 + 4c+1) = 3(4a+4b+4c+3) = 3 \cdot 7 = 21$$

119. x -i dəyişən y və z -i sabit hesab etməklə verilmiş ifadəni $f(x)$ -lə işarə edərək $f'(x) = y^2 - z^2 - 2xy + 2xz = 2x(z - y) + y^2 - z^2 = (y - z)(y + z - 2x)$ alırıq. Odur ki, $f = (y - z)((y + z)x - x^2) + C$, burada C -ixtiyari sabitdir, başqa sözlə baxılan halda yz parametrlərindən asılı ifadədir. C -ni tapmaq üçün $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2) = (y - z)((y + z)x - x^2) + C$ eyniliyində $x = 0$ götürək, onda $yz^2 - zy^2 = c$ odur ki,
 $f = (y - z)((y + z - x)x - yz) = -(y - z)(x^2 - (y + z)x + yz) = -(y - z)(x - y)(x - z)$

Qeyd edək ki, sonuncu çevirmədə üçhəddlinin vuruqlarına ayrılması Viyet teoreminə əsaslandı. Baxılan məsələni onun x -ə nəzərən kvadrat üçhəddli olmasından istifadə edərək törəməni tətbiq etmədən də həll etmək olar. Sonrakı məsələdə də verilmiş ifadə x -ə nəzərən kvadrat üçhəddlidir, lakin onu aşkar şəkildə göstərmək üçün bir qədər mürəkkəb çevirmə aparmaq lazım gəlir, lakin törəməni tətbiq etməklə vuruqlara ayırmağı daha asanlıqla yerinə yetirmək olur.

120. c dəyişəni baxılan ifadəyə ən az dərəcədən daxil olduğundan ona $f(c)$ funksiyası kimi baxıb

$$f'(c) = -2(a - c)(a^2 + b^2) + 2b(ad - bc) = -2a^3 - 2ab^2 + 2a^2c + 2b^2c + 2abd - 2b^2c = \\ = 2a(ac - b^2 + bd - a^2)$$

alırıq. Odur ki, $f(c) = (ac - b^2 + bd - a^2)^2 + C_1$. Burada C_1 - yalnız a, b, d -dən asılı ixtiyari sabitdir.

$((a - c)^2 + (b - d)^2)(a^2 + b^2) - (ad - bc)^2 = (ac - b^2 + bd - a^2)^2 + C_1$ eyniliyində $c = a$ götürüb

$$C_1 = (b - d)^2(a^2 + b^2) - a^2(b - d)^2 - (-b + bd)^2 = (b - d)^2(a^2 + b^2 - a^2 - b^2) = 0$$

alırıq.

Beləliklə, verilmiş ifadə $(ac + bd - a^2 - b^2)^2$ - na bərabərdir.

121. y -i sabit hesab edərək verilmiş ifadəni $f(x)$ -lə işarə edib $f'(x) = -\sin 2x - \sin(x + y) + 2\cos y(\sin x \cos(x + y) + \cos x \sin(x + y)) = -2\sin(2x + y)\cos y +$
 $+ 2\cos y \sin(2x + y) = 0$ alırıq. Odur ki, $f(x) = C$. Bu eynilikdə $x = \frac{\pi}{2} - y$

götürüb $c = \sin^2 y$ alırıq. Beləliklə, verilmiş ifadə $\sin^2 y$ -ə bərabərdir. Qeyd edək ki, C integral sabitini tapmaq üçün diferensiallanmanın

aparıldığı dəyişəni elə qeyd etmək lazımdır daha sadə çevirmə aparmaq lazım gəlsin.

122. Verilmiş ifadəni $f(a)$ ilə işarə edib

$$f'(a) = 3((a+b+c)^2 - (a+b-c)^2 + (a-b-c)^2 - (a-b+c)^2) = 3(2(a+b) \cdot 2c + 2(a-b)(-2c)) = 24bc, \quad f(a) = 24abc + C_1,$$

$C_1 = f(0) = (b+c)^3 - (b-c)^3 - (b+c)^3 - (c-b)^3 = 0$ alırıq. Beləliklə, baxılan ifadə $24abc$ -yə bərabərdir.

123. Verilmiş ifadəni $f(x)$ -lə işarə edib

$$f'(x) = 3(x+y)^2 + 3(x+z)^2 - 3(y+z)(x+z) - 3(y+z)(x+y) = 3(2x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - z^2 - y^2) = 3(2x^2 - 2y^2) \text{ alırıq, buradan } f(x) = 2x^3 - 6xyz + C \text{ və } x=0 \text{ olduqda bu eynilikdən } C = (y+z)^3 + y^3 + z^3 - 3xyz(y+z) = 2y^3 + 2z^3 \text{ alırıq. Beləliklə, } f = 2(x^3 + y^3z^3 - 3xyz).$$

$$124. \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2n} \cos \frac{k\pi}{2n} \text{ olduğundan limitin altındakı}$$

ifadə $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ inteqrallama parçasını n bərabər hissəyə bölməklə

$y = \cos x$ funksiyasının inteqral cəminin $\frac{2}{\pi}$ -yə hasilinə bərabərdir.

Odur ki, axtarılan limit $\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{2}{\pi}$ -yə bərabərdir.

125. İxtiyari $x \geq 0$ üçün $\arctg x \geq x - \frac{x^3}{3}$ bərabərsizliyi ödənilir.

Doğrudan da bu bərabərsizliyin sol və sağ tərəflərinin fərqlərinin törəməsi mənfi feyil, odur ki, bu fərq 0-a bərabər olan ən kiçik qiymətini $x = 0$

olduqda alır. Beləliklə, $\int_0^x \frac{\arctg x}{\sin x} dx > \int_0^x \frac{x - \frac{x^3}{3}}{x} dx = \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{3}\right) dx = \frac{8}{9}$.

126. Aşkardır ki, -3 və -5 bu tənliyin kökləridir. Onun digər köklərini tapmaq üçün $y = x + 4$ əvəzləməsini aparaq, onda tənlik $(y-2)^2 + (y-1)^3 + y^4 = 2$ və ya $y^4 + y^3 - 2y^2 - y + 1 = 0$ şəklinə düşər. 1 və -1 alınmış bu tənliyin kökləridir; bu lazımı qruplaşdırmanı

tapmağa kömək edir: $y^4 + y^3 - 2y^2 - y + 1 = y^2(y^2 + y - 2) - (y - 1) = y^2(y - 1)(y + 2) - (y - 1) = (y - 1)(y^3 + 2y^2 - 1) = (y - 1)(y + 1)(y^2 + y - 1)$. Bundan sonra verilmiş tənliyin qalan iki kökünü asanlıqla tapmaq

olar: $y^2 + y - 1 = 0$, $y_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, $y_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Onda

$$x_3 = -\frac{9 + \sqrt{5}}{2}, x_4 = \frac{-9 + \sqrt{5}}{2}.$$

127. Verilmiş funksiyanı $f(x) = \frac{1}{x(1+x^3)^n} = \frac{1+x^3-x^3}{x(1+x^3)^n} = \frac{1}{x(1+x^3)^{n-1}} - \frac{x^2}{(1+x^3)^n}$ şəkildə göstərək. İkinci toplananın ibtidai funksiyanı asanlıqla tapmaq olar, birinci toplanan isə $f(x)$ şəkildədir, lakin burada $1+x^3$ ikihədlişi qüvvətinin dərəcəsi bir vahid azdır, odur ki, onu da analogi qaydada çevirmək mümkündür. Bu prosesi davam etdirməklə

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x^2}{1+x^3} - \frac{x^2}{(1+x^3)^2} - \dots - \frac{x^2}{(1+x^3)^{n-1}}$$
 bərabərliyini

alırıq. Beləliklə $f(x)$ -in ibtidai funksiyanı

$$F(x) = \ln x - \frac{1}{3} \ln(1+x^3) + \frac{1}{3(1+x^3)} + \frac{1}{6(1+x^3)^2} + \dots + \frac{1}{3(n-1)(1+x^3)^{n-1}} + C$$

şəkildədir.

128. Aşkardır ki, -1 və 2 verilmiş tənliyin kökləridir, onun başqa kökü olmadığını göstərmək lazımdır. Doğrudan da bu tənliyin üç kökü olsa idi, onda $3^{x+2} - 26x - 29$ funksiyası üç nöqtədə sıfıra bərabər olardı, bu halda isə onun $f'(x) = 3^{x+2} \ln 3 - 26$ törəməsinin Roll teoreminə görə [28, İT, səh 225] ən azı iki kökü olardı. Lakin aşkardır ki, $f'(x)$ artan funksiya və birdən çox olmayan nöqtədə sıfıra bərabər olar.

129. Sistemin birinci tənliyini $(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = 1$ şəkildə yazmaq olar, buradan görünür ki, O radiusu 1 və mərkəzi $C\left(1, \frac{1}{2}, 2\right)$ nöqtəsində olan sferanın tənliyidir. C nöqtəsindən sistemin ikinci tənliyi ilə verilən müstəviyə qədər məsafə 1-ə bərabərdir.

Beləliklə, verilmiş sistemin sferanın müstəviyə M toxunma nöqtəsindən ibarət yeganə həlli vardır. Aşkardır ki, M nöqtəsi müstəvi ilə yönəldici vektoru $(3, -4, 12)$ olan, C nöqtəsindən keçən düz xəttin kəsişməsidir,

$$\text{deməli bu nöqtənin koordinatları } \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y-\frac{1}{2}}{-4} = \frac{z-2}{12} \\ 3x-4y+12z=12 \end{cases} \text{ tənliklər}$$

sisteminin həllidir. Bu sistemdən $x = \frac{10}{13}$, $y = \frac{21}{26}$, $z = \frac{14}{13}$ alırıq.

$$130. \quad \text{Verilmiş tənliyi} \quad \sqrt{x^3+24} - \sqrt{x^3+12} = 3x+8, \\ \frac{12}{\sqrt{x^3+24} + \sqrt{x^3+12}} = 3x+8 \quad \text{şəklində yazmaq olar. Sonuncu}$$

bərabərliyin sol tərəfi azalan sağ tərəfi isə artan funksiya, odur ki, onun birdən çox kökü ola bilməz. Digər tərəfdən aşkardır ki, $x = -2$ bu tənliyin köküdür. Beləliklə, verilmiş tənliyin yeganə $x = -2$ həlli vardır.

131. İnteqralın altındakı kəsrin surətini

$2 \sin x + 3 \cos x = a(2 \cos x + 3 \sin x) + b(2 \cos x + 3 \sin x)'$ şəklində göstərək. Onda a və b -ni təyin etmək üçün $3a - 2b = 2$, $2a + 3b = 3$

tənliklər sistemini və buradan $a = \frac{12}{13}$, $b = \frac{5}{13}$ alırıq. Beləliklə,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{2 \cos x + 3 \sin x} dx = \frac{1}{13} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(12 + \frac{5(2 \cos x + 3 \sin x)'}{2 \cos x + 3 \sin x} \right) dx = \frac{1}{13} (6\pi + 5 \ln(2 \cos x + 3 \sin x)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6\pi + 5 \ln \frac{3}{2}}{13}$$

132. Məlumdur ki, ixtiyari parçada müsbət funksiyanın müəyyən inteqralı müsbətdir, Odur ki, $\int_0^{\pi} (a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx) dx = a_0 \pi + (a_1 \sin x +$

$+\frac{a_2}{2} \sin 2x + \dots + \frac{a_n}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} = a_0 \pi > 0$, onda $a_0 > 0$.

$$133. \quad x = -t \text{ əvəz edək, onda } A = \int_{-b}^b \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = - \int_b^{-b} \frac{f(-t)}{a^{-t} + 1} dt = \int_{-b}^b \frac{a^t f(t)}{a^t + 1} dt.$$

Odur ki,
$$2A = \int_{-b}^b \frac{f(x)}{a^x + 1} dx + \int_{-b}^b \frac{a^x f(x)}{a^x + 1} dx = \int_{-b}^b f(x) dx = 2 \int_0^b f(x) dx,$$

$$2A = 2 \int_0^b f(x) dx, \text{ Onda } A = \int_0^b f(x) dx.$$

134. Asanlıqla isbat edilən $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ bərabərliyindən (hər tərəfi loqariflamaqla) istifadə etməklə verilmiş tənliyi çevirək: $9^{\log_2 x} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - 3^{\log_2 x}, \quad 3^{\log_2 x} = x^2 - 1$. Sonuncu bərabərlikdə

$\log_2 x = y$ əvəz edib $3^y + 1 = 4^y$ və ya $\left(\frac{3}{4}\right)^y + \left(\frac{1}{4}\right)^y = 1$ alırıq.

Aşkardır ki, sol tərəf azalan funksiya olduğundan sonuncu tənliyin yeganə $y = 1$ kökü vardır. Onda $\log_2 x = 1, x = 2$. Deməli, verilmiş tənliyin yeganə $x = 2$ kökü vardır.

135. $\bar{a} = (x^n, y^n, z^n), \quad \bar{b} = (x^{n+1}, y^{n+1}, z^{n+1})$ işarə edək. Onda verilmiş sistem o deməkdir ki, $|\bar{a}| = |\bar{b}| = \sqrt{3}, \quad \bar{a} \bar{b} = 3$, buradan alınır ki, $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları arasındakı bucaq 0-dır, odur ki, $\bar{a} = \bar{b}$. Beləliklə, $x^n = x^{n+1}, y^n = y^{n+1}, z^n = z^{n+1}$. Sonra isə buradan alınır ki, sistemin yeganə həlli $(1; 1; 1)$ dir.

136. Verilmiş inteqralı
$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x} \cos x dx}{1 + \alpha e^{-x} (\cos x - \sin x)}$$
 şəkildə

yazıb $t = 1 + \alpha e^{-x} (\cos x - \sin x)$ əvəz edək, onda

$$dt = \alpha e^{-x} (-\sin x - \cos x) dx - \alpha e^{-x} (\cos x - \sin x) dx = -2\alpha e^{-x} \cos x dx,$$

$$J = \int_{1+\alpha}^1 \frac{dt}{2\alpha t} = -\frac{1}{2\alpha} \ln t \Big|_{1+\alpha}^1 = \frac{1}{2\alpha} \ln(1 + \alpha)$$

137. Verilmiş tənliyin sol tərəfi $x = 0$ olduqda mənfə, $x = 2$ olduqda isə müsbətdir. Beləliklə 0 və 2 arasında tənliyin kökü vardır.

İndi verilmiş tənliyi $12x^2 + 6x = 4 + \frac{1}{x^2} + \frac{34}{x^3}$ şəklində yazıb alırıq ki,

$x > 0$ olduqda bu tənliyin sol tərəfi artır, sağ tərəfi isə azalır, odur baxılan tənliyin yeganə kökü vardır.

138. $y = \sqrt{x + \frac{1}{4}}$ əvəz edək. Onda $x = y^2 - \frac{1}{4}$, $y \geq 0$ və sonra

$$y^2 - \frac{1}{4} - \sqrt{y^2 + \frac{1}{4} + y} = a, \quad y^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2} = a,$$

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) + y + \frac{1}{2} = a, \quad \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = a \quad \text{alırıq.} \quad y \geq 0$$

olduğundan $a < \frac{1}{4}$ olduqda sonuncu tənliyin kökü yoxdur, $a \geq \frac{1}{4}$

olduqda isə yeganə $y = \sqrt{a} - \frac{1}{2}$ kökü vardır. Buradan alınır ki, $a < \frac{1}{4}$

olduqda verilmiş tənliyin kökü yoxdur, $a \geq \frac{1}{4}$ olduqda isə $x = a - \sqrt{a}$

kökü vardır.

139. Aşkındır ki, $0 \leq x \leq 1$ olduqda $0 \leq x^n(1 + e^{-x}) \leq 2x^n$, odur ki, $0 \leq a_n \leq \int_0^1 2x^n dx = \frac{2}{n+1}$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0$, beləliklə $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

140. Asanlıqla müəyyən etmək olar ki, $a > 0, b > 0$ olduqda $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$. Odur ki, verilmiş bərabərsizliyin sol tərəfindəki birinci toplanan $\frac{1}{ab(a + b + c)}$ -dən kiçik və ya bərabərdir. Odur ki,

bütövlükdə sol tərəf $\frac{1}{a + b + c} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = \frac{1}{abc}$ cəmini aşmır.

Bunu da isbat etmək tələb olunurdu.

141. $\vec{a} = (x, 1)$, $\vec{b} = (\sqrt{1+x}, \sqrt{3-x})$ vektorlarına baxaq. Onda verilmiş tənliyi $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{b} \right|$ şəkildə yazmaq olar. Bu bərabərlik yalnız

$\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarının koordinatları mütənasib olduqda ödənilir. $x = 0$

tənliyin kökü olmadığından mütənasiblik şərtini $\frac{\sqrt{1+x}}{x} = \sqrt{3-x}$

şəkildə yazmaq münasibdir. Bu tənlikdən $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$, $x > 0$, $(x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0$, $x_1 = 1$ və $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ alınır.

142. Verilmiş ifadənin hər tərəfini kvadrata yüksəldib, iki ədəd üçün ədədi orta ilə həndəsi orta arasındakı bərabərsizliyi tətbiq edərək

$$p^2 = \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2 x^2}{y^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{x^2 y^2}{z^2} \right) + 2 \geq x^2 + y^2 + z^2 + 2 = 3, \quad p = \sqrt{3} \text{ alırıq.}$$

Deməli $\sqrt{3}$ axtarılan ən kiçik qiymətdir.

143. İkinci tənliyi i -ə vurub birinci ilə toplasaq, onda kompleks məchullu $a = u + v i$ tənliyini alırıq, burada a, u, v kompleks ədədlərinin modulu 1, arqumentləri isə $A, A + x, A + y$ -dir.

$a = u + v i$ bərabərliyi onu göstərir ki, $\bar{u}$ və $\bar{v} i$ vektorları arasındakı bucaq 120° -dir və $\bar{a}$ vektoru onlar arasındakı bucağın tənböləni üzərində yerləşir. Odur ki, $A - x = A \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$,

$$A + y = A \pm \frac{\pi}{3} + 2l\pi, \text{ buradan } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad y = \mp \frac{\pi}{3} + 2l\pi.$$

144. Məlumdur ki, f funksiyası $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş və monotondursa və ya parçasının daxilində ekstremumlardan biri varsa, onda minimum halında ən böyük qiymətini parçanın uclarında (A xassəsi), maksimum halında isə ən kiçik qiymətini parçanın uclarında alır (B xassəsi). Funksiyanın bu xassəsindən bir sıra statdar olmayan bərabərsizliklərin, o cümlədən baxdığımız bərabərsizliyin isbatında istifadə etmək olar.

$[0, 1]$ parçasında $f(x) = x^2(1-b) - c^2 x + b^2 + c^2 - b^2 c - 1$ funksiyasına baxaq. Burada bərabərsizliyə daxil olan a -ya dəyişən x kimi baxırıq. Onda $f'(x) = 2(1-b)x - C^2$. $b \neq 1$ isə $f'(x)$ artır, odur ki, $f(x)$ funksiyası A xassəsinə malikdir və ən kiçik qiymətini $[0, 1]$ parçasının uclarında alır.

$$f(0) = b^2 + c^2 - b^2c - 1 = (1-c)(b^2 - (1+c)) \leq 0, \\ f(1) = 1 - b - c^2 + b^2 + c^2 - b^2c - 1 = b(b-1) - b^2c \leq 0$$

Beləliklə, $[0;1]$ parçasında $f(x) \leq 0$, odur ki, $f(a) \leq 0$. $b = 1$ halında isbat analoji aparılır.

145. Əvvəlki bərabərsizliyin isbatında tətbiq edilən metoddan istifadə etmək məqsəduyğundur. Burada da a parametrini dəyişən b, c -ni isə sabit hesab edək. $[0;1]$ parçasında

$$f(x) = \frac{x}{b+c+1} + \frac{b}{c+x+1} + \frac{c}{x+b+1} + (1-x)(1-b)(1-c)$$

funksiyasına baxaq. Onun törəməsini tapaq. Bu törəmə

$$f'(x) = d - \frac{b}{(c+x+1)^2} - \frac{c}{(x+b+1)^2} \text{ olur, burada } d = \text{sabitdir}.$$

Aşkardır ki, $f'(x)$ funksiyası $[0;1]$ parçasında artan funksiyadır. Odur ki, $f(x)$ funksiyası 144-də göstərilən A xassəsini ödəyir, yəni ən böyük qiymətini 0 və ya 1 nöqtəsində alır. Faktik olaraq isbat edildi ki, $f(a)$ ən böyük qiymətini 0 və ya 1 nöqtəsində alır. İndi a -nın 0 və ya 1 nöqtəsindəki qiymətini qeyd etsək, onda bərabərsizliyin sol tərəfindəki ifadə b -nin funksiyası kimi ən böyük qiymətini $b = 0$ və ya $b = 1$ olduqda alar. a və b -in $[0;1]$ parçasının uclarındakı qiymətini qeyd etsək, onda bizi maraqlandıran ifadə ən böyük qiymətini $c = 0$ və ya $c = 1$ olduqda alar. Baxılan ifadə a, b və c -yə nəzərən simmetrik olduğundan onların qiymətlərində bərabərliyin ödənilməsi dörd $(0;0;0)$, $(0;0;1)$, $(0;1;1)$ və $(1;1;1)$ yığıma (nabora) baxmaq qalır. Bununla da bərabərsizlik isbat olunur.

146. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $\frac{1}{x} < \frac{x^2+1}{2x^2}$ bərabərsizliyi ödənilir, buradan isə $t > 1$ olduqda $\int_1^t \frac{dx}{x} < \int_1^t \frac{(x^2+1)dx}{2x^2}$ alınır. Lakin

$$\int_1^t \frac{dx}{x} = \ln t, \quad \int_1^t \frac{(x^2+1)dx}{2x^2} = \int_1^t \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} \right) dx = \frac{x^2-1}{2x} \Big|_1^t = \frac{t^2-1}{2t}.$$

Beləliklə $\ln t < \frac{t^2 - 1}{2t}$, buradan $t = \frac{b}{a}$ olduqda isbatı tələb olunan bərabərsizliyi alırıq.

147. Məlumdur ki, $S_1(n), S_2(n), \dots, S_{n-1}(n)$ məlum olduqda $S_k^{(n)} = 1^k + 2^k + \dots + n^k$ ($n \in N, k \in N$) cəmini hesablamaq olar. Bu üsul $F(x) = (x-1)(x^2 + x^3 + \dots + x^n)$ və ya $F(x) = x^{n+1} - x^2$ çoxhədlisinin uyğun törəmələrini tapmaqla əlaqədardır. Burada iki xüsusi hala baxırıq:

1) $S_1(n) = \sum_{m=1}^n m$ ($k=1$) cəmini tapaq. $F(x)$ funksiyasının ikinci

tərtib törəməsini tapaq:

$$2(2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}) + (x-1)(2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot x + \dots + n(a-1)x^{n-2}) = (n+1)nx^{n-1} - 2 \quad (1)$$

(1) eyniliyində $x=1$ götürüb $2(2+3+\dots+n) = n(n+1) - 2$ və

ya $S_1^{(n)} = \frac{n(n+1)}{2}$ (2) alırıq.

2) İndi $S_2(n) = \sum_{m=1}^n m^2$ ($k=2$) cəmini tapaq. İndi $F''(x)$ -in

törəməsini tapaq:

$$F''(x) = 3(2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot x + \dots + n(n-1)x^{n-2}) + (x-1)(3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2x + \dots + n(n-1)(n-2)x^{n-3}) = (n+1)n(n-1)x^{n-2} \quad (3)$$

(3) ifadəsində $x=1$ götürsək, onda

$3(2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \dots + n(n-1)) = (n+1)n(n-1)$, buradan

$$\sum_{m=1}^n m(m-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} \text{ və ya } S_2(n) - S_1(n) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$$

(2) bərabərliyini nəzərə alıb $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ alırıq.

Riyazi induksiya metodundan istifadə etməklə $S_3(n)$,

$S_4(n), \dots, S_n(n)$ -də törəmənin tətbiqilə tapmaq mümkündür.

148. Ardıcıl olaraq alırıq: $\cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) = 1,5$,

$$2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 1 = 1,5,$$

$$\left(4 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} + 1 = 0,$$

$$\left(2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = 0.$$

Buradan $\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$ bərabərliyindən alınır ki, $\alpha = \beta$ (α, β -iti bucaqlardır), $\alpha = \beta$ olduqda $2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ bərabərliyindən isə $2 \cos \alpha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ alınır. Beləliklə, $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$.

149. Verilmiş bərabərsizliyin hər tərəfinə 1 əlavə edib $\frac{2}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \right)$, buradan $(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)^2 \geq 4 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$, $(\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta)^2 \geq 0$. Buradan da verilmiş bərabərsizliyin isbatı alınır.

150. Bərabərsizliyi n -ə görə riyazi induksiya metodu ilə isbat etmək olar. $n=1$ olduqda $x_1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{1}$. Fərz edək ki, $x_k < \frac{1}{k}$, onda

$$x_{k+1} = 1 - \frac{1}{x_k + 1} < 1 - \frac{1}{\frac{1}{k} + 1} = \frac{1}{k+1}; \quad x_{k+1} < \frac{1}{k+1}.$$

151. Məlumdur ki, üçbucağın bucaqları üçün $tgx + tgy + tgz = tgxtgtytgz$ münasibəti ödənilir; digər tərəfdən $tgx + tgy + tgz \geq 3\sqrt{tgxtgtytgz}$, buradan $tgxtgtytgz \geq 3\sqrt{tgxtgty \cdot tgz}$, odur ki, $tgx \cdot tgy \cdot tgz \geq \sqrt{3^3}$. Buradan $tg^n x + tg^n y + tg^n z \geq 3\sqrt{tg^n x \cdot tg^n y \cdot tg^n z} \geq 3\sqrt{(\sqrt{3^3})^n} = 3\sqrt{3^n}$.

152. İkinci və üçüncü tənliyin hər tərəfini $z + u$ -ya vurub, sadə çevirmədən sonra
$$\begin{cases} xz^2 + yu^2 + zu(x + y) = 7(z + u) \\ xz^3 + yu^3 + zu(xz + yu) = 11(z + u) \end{cases}$$
 və buradan, şərti nəzərə almaqla
$$\begin{cases} 7(z + u) - 5zu = 11 \\ 11(z + u) - 7zu = 19 \end{cases}$$
 yazırıq. Sonuncu sistemdən alınır

ki, $\begin{cases} z + u = 3, \\ zu = 2 \end{cases}$. Sonuncu sistemin iki həlli vardır: $z_1 = 1, u_1 = 2$ və

$z_2 = 2, u_2 = 1$. z və u -nun bu qiymətlərini verilmiş sistemin ilk iki tənliyində yerinə yazıb $x_1 = 3, y_1 = 2$ və $x_2 = 2, y_2 = 3$ tapırıq. Yoxlama nəticəsində müəyyən etmək olar ki tapılmış $x_1 = 3, y_1 = 2, z_1 = 1, u_1 = 2$ və $x_2 = 2, y_2 = 3, z_2 = 2, u_2 = 1$ qiymətləri axtarılan həllərdir.

153. Tənliyi $5^{-2} \cdot 5^{3x} - 6 \cdot 5^{3x} + 4 \cdot 5^{-1} \cdot 5^{3x} = -645$ şəkildə yazaq. $t = 5^{3x}$ əvəz edək və tənliyi yeni t dəyişəninə görə yazaq: $0,04t - 6t + 0,8t = -645$; $t = 125$. x dəyişəninə qayıdaq: $5^{3x} = 125$; $5^{3x} = 5^3$; $3x = 3, x = 1$.

154. Verilmiş bərabərsizliyin təyin oblastını tapaq: $3x - 2 > 0, x > \frac{2}{3}$.

Verilmiş bərabərsizliyi $\log_2(3x - 2) \leq \log_2 16$ şəkildə yazmaq olar. Loqarifmanın əsası $2 > 1$

olduğundan $3x - 2 \leq 16, x \leq 6$

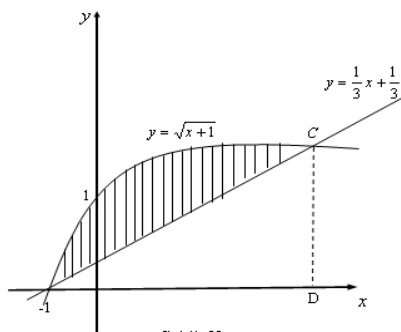
alırıq. Buradan $\frac{2}{3} < x \leq 6$.

155. İkiqat argumentin kosinusu düsturundan istifadə edərək verilmiş tənliyi birdərcəli bir cins tənliyə gətiririk: $\cos 2x - \sin 2x = 0$. Sonuncu tənliyin hər tərəfini $\cos 2x \neq 0$ -ə bölüb onu $\operatorname{tg} 2x = 1$ şəklinə gətiririk, buradan isə $2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$,

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$\cos 2x = 0$ olarsa, onda $\sin 2x = \pm 1$ və $\cos 2x - \sin 2x \neq 0$.

156. Verilmiş funksiyaların qrafiklərini quraq və onların kəsişmə nöqtələrinin absislərini tapaq (Şəkil 62).



Şəkil 62

$$\sqrt{x+1} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}; \quad 9(x+1) = (x+1)^2; \quad (x+1)(x-8) = 0;$$

$$x_1 = -1, x_2 = 8$$

Axtarılsın S sahəsini iki əyrixətli $ABCD$ və ACD trapesiyalarının sahələri fərqi kimi almaq olar:

$$S(ABCD) = \int_{-1}^{\infty} \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3} (x+1) \Big|_{-1}^{\infty} = 18,$$

$$S(ACD) = \int_{-1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \right) dx = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x \right) \Big|_{-1}^{\infty} = 13,5,$$

$$S = S(ABCD) - S(ACD) = 18 - 13,5 = 4,5 \text{ (kv.v)}$$

157. $\vartheta(t)$ sürəti koordinatın

zamana görə, $a(t)$ təcili isə sürətin zamana görə törəmə törəməsidir.

$$\vartheta(t) = S'(t) = -3t^2 + 12t + 5,$$

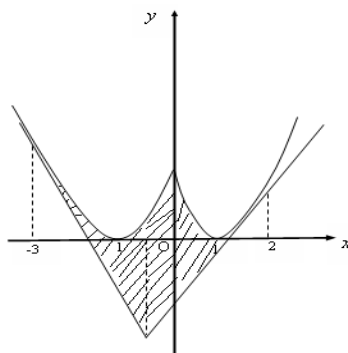
$$a(t) = \vartheta'(t) = -6t + 12. \quad a = 6 \text{ m/san}^2$$

olduğundan $-6t + 12 = 6$, buradan $t = 1(\text{san})$.

$$158. \quad b = \frac{a^2 + 2a - 3}{a^2 + 2a - 8} \quad \text{əvəz}$$

edək və $\sqrt{x^2 - 10x + 26} \geq b$ bərabərsizliyinə baxaq. Bu bərabərsizliyin təyin oblastını tapaq. Hesabı kvadrat

kökün tərifiindən $x^2 - 10x + 26 \geq 0$ alınır. Bərabərsizliyin sol tərəfindəki kvadrat üçhədlinin diskriminantı sıfırdan kiçikdir, odur ki, x -in ixtiyari qiymətində bu kvadrat üçhədli müsbətdir. Beləliklə $\sqrt{x^2 - 10x + 26} \geq b$ bərabərsizliyinin təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur. B-nin hasi qiymətlərində bu bərabərsizliyin bütün x -lər üçün ödənilməsinə diqqət edək. $b < 0$ isə onda bərabərsizlik bütün x -lər üçün ödənilir. Fərz edək ki, $b \geq 0$. Sonuncu bərabərsizliyin hər tərəfini kvadrata yüksəldib $x^2 - 10x + 26 \geq b^2$, $x^2 - 10x + 26 - b^2 \geq 0$ sol tərəfdəki kvadrat üçhədlinin diskriminantı sıfırdan böyük deyildirsə, o x -in ixtiyari qiymətində mənfi deyil. $100 - 4(26 - b^2) \leq 0$, $b^2 \leq 1$, $-1 \leq b \leq 1$.



Şəkil 63.

$b \geq 0$ halına baxdığımızdan $0 \leq b \leq 1$. Beləliklə, $b \leq 1$ isə, onda verilmiş bərabərsizlik bütün x -lər üçün doğrudur. İndi a parametirinə

$$\text{qayıdaq. } \frac{a^2 + 2a - 3}{a^2 + 2a - 8} \leq 1, \quad \frac{a^2 + 2a - 3 - a^2 - 2a + 8}{a^2 + 2a - 8} \leq 0, \quad \frac{5}{(a+4)(a-2)} \leq 0.$$

İntervallar metodundan istifadə edib (Şəkil 63) $-4 < a < 2$ alırıq.

Qeyd. Kök altındakı ifadədən tam kvadrat ayırmaq olar.
 $x^2 - 10x + 26 = x^2 - 10x + 25 + 1 = (x - 5)^2 + 1 \geq 1$, buradan

$$\frac{a^2 + 2a - 3}{a^2 + 2a - 8} \leq 1.$$

159. Verilmiş bərabərsizlik iki bərabərsizlik sistemi ilə eynigüclüdür: $\begin{cases} 0 < x + 2 < 1 \\ 9x^2 + 15x - 6 > (x + 2)^2 \end{cases}, \begin{cases} 1 < x + 2 \\ 0 < 9x^2 + 15x - 6 < (x + 2)^2 \end{cases}.$

Birinci sistem $\begin{cases} -2 < x < -1 \\ 8x^2 + 11x - 10 \end{cases}$ ilə eynigüclüdür, buradan

$$\begin{cases} -2 < x < -1 \\ 8(x+2)\left(x - \frac{5}{8}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -1 \\ x < -2 \\ x > \frac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

Deməli birinci sistemin həlli yoxdur. İkinci sistemdən

$$\begin{cases} x > -1 \\ 8x^2 + 11x - 10 < 0 \\ 3x^2 + 5x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 8(x+2)\left(x - \frac{5}{8}\right) < 0 \\ 3(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ -2 < x < \frac{5}{8} \\ \begin{cases} x < -2 \\ x > \frac{1}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x < \frac{5}{8} \end{cases}$$

$\frac{1}{3} < x < \frac{5}{8}$ həllini alırıq.

160. $x \geq 0$ olduqda $|x| = x$ və

$8 \cdot 2^{|x|} + 7 \cdot 2^x = 30 \Leftrightarrow 15 \cdot 2^x = 30 \Leftrightarrow 2^x = 2, x = 1 > 0$ tənliyin köküdür. $x < 0$ isə, onda $|x| = -x$ və $8 \cdot 2^{|x|} + 7 \cdot 2^x = 30 \Leftrightarrow 8 \cdot 2^{-x} + 7 \cdot 2^x = 30 \Leftrightarrow 7 \cdot (2^x)^2 - 30 \cdot 2^x + 8 = 0.$

Alınmış kvadrat tənliyi 2^x -ə nəzərən həll edib: a) $2x = 4$ və ya $x = 2 > 0$, tənliyin kökü ola bilməz.

$$\text{b) } 2^x = \frac{2}{7} \text{ və ya } x = \log_2 \frac{2}{7} = 1 - \log_2 7 < 0 \text{ (çünki } \log_2 7 > 1),$$

tənliyin köküdür. Beləliklə, tənliyin iki kökü vardır: $1 - \log_2 7$ və 1 .

161. Əvvəlcə göstərək ki, A nöqtəsi verilmiş funksiyanın qrafiki üzərində deyil. Doğrudan da $y = x^2 - 2|x| + 1 = (|x| - 1)^2$ mənfi qiymət alınır. Toxunanın tənliyi $y = y_0 + y_0' (x - x_0)$, burada x_0 toxunma nöqtəsinin absisi, y_0, y_0' isə funksiyanın və onun törəməsinin $x = x_0$ də qiymətləridir. $x \geq 0$ olduqda funksiyanın qrafik əyrisinə baxaq. Onda $y = (x - 1)^2$, $y' = 2(x - 1)$ və toxunanın tənliyi $y = (x_0 - 1)^2 + 2(x_0 - 1)(x - x_0)$ və ya $y = 2x(x_0 - 1) + 1 - x_0^2$. Alınmış tənlikdə A nöqtəsinin koordinatlarını yerinə yazıb toxunma nöqtəsinin absisini tapırıq:

$$-\frac{14}{3} = -\frac{5}{3}(x_0 - 1) + 1 - x_0^2 \Leftrightarrow 3x_0^2 + 5x_0 - 22 = 0, \text{ buradan } x_0 = -\frac{11}{3}$$

və $x_0 = 2$. Mənfi kök uyğun deyil, deməli toxunma nöqtəsinin absisi 2 və toxunanın tənliyi isə $y = 2x - 3$ dir.

$x < 0$ olduqda $y = (x + 1)^2$, $y' = 2(x + 1)$. Toxunanın tənliyi isə $y = (x_0 + 1)^2 + 2(x_0 + 1)(x - x_0)$ və ya $y = 2x(x_0 + 1) + 1 - x_0^2$. A nöqtəsinin koordinatlarını yerinə yazıb $x_0 = -3$ və $y = -4x - 8$ alırıq. Funksiyanın qrafikini və ona toxunanları qurmaqla (Şəkil 63) müəyyən edirik ki, axtarılan sahə üç fiqurun sahələri cəminə bərabərdir:

$$S_1 = \int_{-3}^{\frac{5}{6}} (x^2 + 2x + 1 + 4x + 8) dx = \int_{-3}^{\frac{5}{6}} (x + 3)^2 dx = \left. \frac{(x + 3)^3}{3} \right|_{-3}^{\frac{5}{6}} = \frac{13^3}{3 \cdot 6^3} (kv.v);$$

$$S_2 = \int_{\frac{5}{6}}^0 (x^2 + 2x + 1 - 2x + 3) dx = \int_{\frac{5}{6}}^0 (x^2 + 4) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{\frac{5}{6}}^0 = \frac{5^3}{3 \cdot 6^3} + \frac{10}{3} (kv.v);$$

$$S_3 = \int_0^2 (x^2 - 2x + 1 - 2x + 3) dx = \int_0^2 (x - 2) dx = \left. \frac{(x - 2)^3}{3} \right|_0^2 = \frac{8}{3} (kv.v)$$

$$\text{Beləliklə, } S = \frac{13^3}{3 \cdot 6^3} + \frac{5^3}{3 \cdot 6^3} + \frac{10}{3} + \frac{8}{3} = 9\frac{7}{12} \text{ (kv.v).}$$

162. Həllin iki üsulunu göstərək.

I. Hər iki çoxhədlini vuruqlarına ayırıb onların köklərini tapaq:

$$x^4 - x^2 - 2x - 1 = x^4 - (x^2 + 2x + 1) = x^4 - (x + 1)^2 = (x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$; x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ və } x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2};$$

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x^4 - x^2 - 2x - 1) + (2x^3 - 2x^2 - 2x) = (x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1) + 2x(x^2 - x - 1) = (x^2 - x - 1)(x^2 - 3x + 1).$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Alınmış kökləri müqayisə etməklə ortaq kökün $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ və $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

olduğunu müəyyən edirik.

II. Birinci çoxhədlini vuruqlarına ayıraraq:

$x^4 - x^2 - 2x - 1 = (x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1)$. Ortaq köklərdən söhbət getdiyindən, ikinci çoxhədlinin vuruqlarından biri birinci çoxhədlinin vuruqlarından biri olmalıdır. İkinci çoxhədlini birinci çoxhədlinin hər bir vuruğına bölməklə müəyyən edirik ki:

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x^2 - x - 1)(x^2 + 3x + 1)$$

$x^2 + x + 1$ və $x^2 + 3x + 1$ üçhədlilərin ortaq kökləri yoxdur, deməli ortaq köklər $x^2 - x - 1$ üçhədlisinin kökləridir. Bu isə $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ -

dir.

Qeyd: Hər iki üsulda alınan cavabı verilmiş çoxhədliləri bir-birinə bərabər götürməklə də almaq olar.

$$\begin{aligned} 163. \quad \sqrt[3]{\frac{1 + \cos 4x}{1 - \cos 4x}} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{2} - 2x\right)} &= 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{2 \cos^2 2x}{2 \sin^2 2x}} = -\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2x} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 2x}\right)^3 = \\ &= -\operatorname{ctg} 2x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg}^6 2x = \operatorname{ctg}^8 2x \\ -\operatorname{ctg} 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg}^6 2x (\operatorname{ctg}^2 2x - 1) = 0 \\ \operatorname{ctg} 2x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} 2x = 0 \\ \operatorname{ctg} 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n, \quad k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

164. Əvvəlcə qeyd edək ki, vektorların skalyar hasili yalnız həndəsədə deyil cəbrin də bəzi məsələlərinin öyrənilməsində tənliklər sisteminin həllində, bərabərsizliklərin isbatında, tənliklərin həllində və ekstremumun tapılmasına aid məsələlər həllində müvəffəqiyyətlə tətbiq oluna bilər. Məlumdur ki, sıfırdan fərqli iki vektorun skalyar hasili onların uzunluqlarının hasili ilə aralarındakı bucağın kosinusu hasilinə deyilir: $\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\alpha$. $|\cos\alpha| \leq 1$ olduğundan $|\overline{a}\overline{b}| = |\overline{a}||\overline{b}|$ (1).

Vektorlar koordinatları ilə verilsə, yəni $\overline{a}(a_1; b_1)$, $\overline{b}(a_2; b_2)$ onda $\overline{a}\overline{b} = a_1a_2 + b_1b_2$ və $|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$, $|\overline{b}| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$, beləliklə $a_1a_2 + b_1b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ (2). Analoji olaraq üç ölçülü fəza üçün $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}$ (3) yazmaq olar.

Baxılan bərabərsizliyin isbatında eləcə də sonrakı 165-169 məsələlərin həllində skalyar hasildən istifadə edirik. Baxılan

bərabərsizliyin sol tərəfinin təyin olduğu ədədi aralığı
$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{5} \\ x \geq -\frac{1}{6} \\ x \leq \frac{1}{11} \end{cases}$$

bərabərsizliklər sistemindən alırıq. Bu $x \in \left[-\frac{1}{6}; \frac{1}{11}\right]$ -dir. $\overline{a}(1;1;1)$ və $\overline{b}(\sqrt{5x+1}; \sqrt{6x+1}; \sqrt{1-11x})$ vektorlarına baxaq. (3) münasibətindən alınır ki, $1 \cdot \sqrt{5x+1} + 1 \cdot \sqrt{6x+1} + 1 \cdot \sqrt{1-11x} \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$.

165. $\overline{a}(xy; yz; zx)$ və $\overline{b}(xz; xy; yz)$ vektorlarını daxil edək. Bu vektorlar üçün $\overline{a}\overline{b} = x^2yz + xy^2z + xyz^2 = xyz(x+y+z)$. Habelə $|\overline{a}| = \sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}$. Buradan $x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 \geq xyz(x+y+z)$.

166. $\overline{a}(ac; bc; ca)$ və $\overline{b}(bc; ca; ab)$ vektorlarına baxaq. Bu vektorların uzunluqları $|\overline{a}| = \sqrt{a^2c^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$ və $|\overline{b}| = \sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$ - dir. 164 məsələsinin həlli əlaqədar göstərilən (3) münasibətinə əsasən $abc^2 + bca^2 + cab^2 \leq a^2c^2 + b^2a^2 + c^2b^2$ alırıq. İndi başqa

$\overline{a_1}(a^2; b^2; c^2)$ və $\overline{b_1}(c^2; a^2; b^2)$ vektorlarına baxaq, onların skalyar hasilini tapaq və ona yenə 164-dəki (3) münasibətini tətbiq edib $\overline{a_1} \overline{b_1} = a^2 c^2 + b^2 a^2 + c^2 b^2 \leq \sqrt{a^4 + b^4 + c^4} \cdot \sqrt{c^4 + b^4 + a^4} = a^4 + b^4 + c^4$ və beləliklə $abc^2 + bca^2 + cab^2 \leq a^2 c^2 + b^2 a^2 + a^2 b^2 \leq a^4 + b^4 + c^4$ alırıq. Bu da tələb ediləndir.

167. $\overline{a}(\sqrt{5x+2}; \sqrt{5y+2}; \sqrt{5z+1})$ və $\overline{b}(1; 1; 1)$ vektorlarına 164-dəki (3) münasibətini tətbiq edib $\sqrt{5x+2} + \sqrt{5y+2} + \sqrt{5z+2} \leq \sqrt{5x+2+5y+2+5z+2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5(x+y+z)+6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15M+18}$ alırıq.

168. $\overline{a}(x; y; z)$ və $\overline{b}(y; z; x)$ vektorlarının skalyar hasilini və uzunluqlarını tapaq. 164-dəki (1) münasibətinə əsasən $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$. Sonra $xy + yz + zx = 1$ bərabərliyini nəzərə alıb $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ alırıq.

169. $\overline{a}(\sqrt{1+x}; \sqrt{3-x})$ və $\overline{b}(x; 1)$ vektorlarına baxaq. Onda verilmiş tənliyi $\overline{a} \overline{b} = |\overline{a}| |\overline{b}|$ şəkildə yazmaq olar. Bu bərabərlik yalnız vektorun koordinatları mütənəşib olduqda ödənilir. $x = 0$ tənliyin kökü olmadığından mütənəşiblik şərtini $\frac{\sqrt{1+x}}{x} = \sqrt{3-x}$ şəkildə yazmaq olar.

Buradan $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ və ya $(x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ (çünki mümkün qiymətlər çoxluğundan alınır ki, $x > 0$).

170. Kəsrin surəti $2 \cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 2\alpha = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \sin^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha$. Məxrəcdə isə $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$ olduğundan toplama düsturunu tətbiq edə bilərik:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha + \frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = \cos 2\alpha$$

Odur ki,

$$\frac{2 \cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)} = \frac{\cos^2 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)} = \frac{\cos^2 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \cos 2\alpha;$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned}
 171. \quad \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7} &= \frac{\left(2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \\
 &= \frac{2 \left(\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \left(\frac{7\pi}{7} - \frac{2\pi}{7}\right)\right) \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{2 \cdot 2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\left(-2 \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7}\right) \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{4 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{-2 \sin \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{2 \cdot 4 \sin \frac{\pi}{7}} = \\
 &= \frac{-\sin \frac{8\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{-\sin \left(\frac{7\pi}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 172. \quad \frac{2 \sin 10^\circ + \sin 50^\circ}{2 \sin 80^\circ - \sqrt{3} \sin 50^\circ} &= \frac{2 \left(\sin 10^\circ + \frac{1}{2} \sin 50^\circ\right)}{2 \left(\sin 80^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 50^\circ\right)} = \frac{2 \sin 10^\circ + 2 \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ}{2 \sin 80^\circ - 2 \cos 30^\circ \cdot \sin 50^\circ} = \\
 &= \frac{2 \cos 80^\circ - (\cos 80^\circ - \cos 20^\circ)}{2 \sin 80^\circ - \sin 80^\circ - \sin 20^\circ} = \frac{\cos 80^\circ + \cos 20^\circ}{\sin 80^\circ - \sin 20^\circ} = \frac{2 \cos 50^\circ \cdot \cos 30^\circ}{2 \cos 50^\circ \cdot \sin 30^\circ} = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

173. Yardımcı bucaq daxil etməklə verilmiş ifadəni çevirək:
 $2 \sin x + 3 \cos x = \sqrt{13} \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \sin x + \frac{3}{\sqrt{13}} \cos x \right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \right)^2 = 1$ olduğundan
 elə φ bucağı vardır ki, $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

Onda $2 \sin x + 3 \cos x = \sqrt{13}(\sin \varphi \sin x + \cos \varphi \cos x) = \sqrt{13} \cdot \cos(x - \varphi)$.
 Məlumdur ki, $|\cos(x - \varphi)| \leq 1$, ona görə $|\sqrt{13} \cdot \cos(x - \varphi)| \leq \sqrt{13}$. Deməli
 $-\sqrt{13} \leq 2 \sin x + 3 \cos x \leq \sqrt{13}$. Baxılan ifadə -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3 tam qiymətləri ala bilər.

174. Fərz edək ki, əvvəlcə gündə x səhifə yazmaq nəzərdə tutulmuşdur. Onda iş $\frac{360}{x}$ qurtara bilərdi. İşin birinci hissəsi $\frac{1}{3} \cdot \frac{360}{x}$, ikinci hissəsi isə $\frac{2}{3} \cdot \frac{360}{x} - 1$ gündə yerinə yetirilmişdir. Şərtə görə kompüterdə yazılan səhifələrin miqdarı $(x-4) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{360}{x} + (x+4) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{360}{x} - 1 \right) = 360$ dır. Buradan $x^2 + 4x - 480 = 0$, $x_1 = 20$, $x_2 = -24$ alırıq. Məsələnin, mahiyyətinə görə $x > 0$ olduğundan $x = 20$ (səh). x -in bütün mümkün qiymətlərində

$$175. \frac{3 \cos 2x}{1 - \sin 2x} = \frac{3(\cos^2 x - \sin^2 x)}{(\cos x - \sin x)^2} = \frac{3(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x},$$

$$\frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = -\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \quad \text{olduğundan,} \quad \text{baxılan} \quad \text{tənlik}$$

$$\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = 1 \quad \text{tənliyinə gəlir, buradan} \quad \sin x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Qeyd: Çevrilmə nəticəsində tənliyin təyin olma qiyməti genişləndiyindən ($\cos x \neq 0$ qadağanı aradan götürüldüyündən) alınan kökləri yoxlamaq kifayətdir.

176. $\log_3 x = u$, $5^y = v$ olsun. Onda verilmiş tənliklər sistemi

$$\begin{cases} \frac{10}{v} = -2u \\ u + v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\frac{5}{v} \\ v^2 - 4v - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{şəklinə düşür.} \quad v^2 - 4v - 5 = 0 \quad \text{tənliyinin}$$

$$\text{kökləri} \quad v = -1; \quad v = 5 \quad \text{dir.} \quad v > 0 \quad \text{olduğundan} \quad \begin{cases} u = -1 \\ v = 5 \end{cases} \quad \text{yəni} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 1 \end{cases}$$

yeganə həlli alırıq.

177. $u = \frac{xy}{2}$, $v = 2x + y - xy$ olsun. Onda verilmiş tənliklər sistemi

$$\begin{cases} u + \frac{5}{v} = 5 \\ \frac{5}{u} + v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 \left(1 - \frac{1}{v} \right) \\ \frac{v}{v-1} + v = 4 \end{cases} \quad \text{şəklinə gəlir. Alınmış sistemin ikinci tənliyindən}$$

$$v^2 - 4v + 4 = 0 \Leftrightarrow v = 2.$$

$$\text{Beləliklə,} \quad \begin{cases} u = \frac{5}{2} \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{x} \\ 2x^2 - 7x + 5 = 0 \end{cases} \quad x_1 = 1, y_1 = 5; \quad x_2 = \frac{5}{2}, y_2 = 2$$

178. I üsul. $1. \log_2 x = 5 - \log_2(x+4)$ tənliyini həll etməklə $y = \log_2 x$ və $y = 5 - \log_2(x+4)$ funksiyalarının qrafiklərinin kəsişmə nöqtəsinin absisini tapırıq:

$$\log_2 x = 5 - \log_2(x+4) \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2(x+4) = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x(x+4) = 5 \\ x+4 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x^2 + 4x) = \log_2 32 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x = 32 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -8 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Beləliklə, verilmiş funksiyaların qrafiklərinin kəsişmə nöqtəsinin absisi $x = 4$ dir.

2. Verilmiş funksiyların qrafiklərinin kəsişmə nöqtəsinin ordinatını tapaq: $y(4) = \log_2 4 = 2$.

Bu ordinatın axtarılan qiymətidir.

II üsul. $\begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 5 - \log_2(x+4) \end{cases}$ tənliklər sistemini həll etməklə verilmiş

funksiyların qrafiklərinin kəsişmə nöqtəsinin ordinatını tapırıq:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 5 - \log_2(x+4) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 5 - \log_2(x+4) \\ y = \log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x + \log_2(x+4) = 5 \\ y = \log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x^2 + 4x) = 5 \\ x > 0 \\ y = \log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x = 32 \\ x > 0 \\ y = \log_2 x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 32 = 0 \\ D = 144 \\ x_1 = 4; x_2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 4 \\ x > 0 \\ y = \log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Verilmiş funksiyların qrafiklərinin kəsişmə nöqtəsinin ordinatı $y = 2$ -dir.

179.

$$\begin{aligned} (2^x - 3)(3x - 4) \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 3 \leq 0 \\ 3x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \leq 3 \\ 3x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \leq 2^{\log_2 3} \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \log_2 3 \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \log_2 3 \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 3 \geq 0 \\ 3x - 4 \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \geq 3 \\ 3x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \geq 2^{\log_2 3} \\ x \leq \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \log_2 3 \\ x \leq \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq \log_2 3 \end{aligned}$$

$$\frac{4}{3} \text{ və } \log_2 3 \text{ ədədlərini müqayisə edək: } \frac{4}{3} = \log_2 2^{\frac{4}{3}} = \log_2 \sqrt[3]{16},$$

$$\log_2 3 = \log_2 \sqrt[3]{27}.$$

$16 < 27$ və $y = \sqrt[3]{z}$ funksiyası artan olduğundan, $\sqrt[3]{16} < \sqrt[3]{27}$. Beləliklə, R -də $y = \log_2 t$ funksiyası artan olmasından

$$\log_2 \sqrt[3]{16} < \log_2 \sqrt[3]{27} \text{ bərabərsizliyini alırıq. Deməli, } \frac{4}{3} < \log_2 3.$$

Beləliklə, verilmiş bərabərsizliyin həlli $\left[\frac{4}{3}; \log_2 3\right]$ aralığıdır. 1,5

ədədinin bu parçaya daxil olub olmadığını müəyyən edək. Bunun üçün 1,5 ədədini parçanın ucları ilə müqayisə edək:

a) $1,5 = \frac{3}{2} = \frac{9}{6}$; $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$. Lakin $\frac{9}{6} > \frac{8}{6}$, odur ki, $1,5 > \frac{4}{3}$; b)

$$1,5 = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \log_2 \sqrt{8}; \log_2 3 = \log_2 \sqrt{9}.$$

$8 < 9$ və $y = \sqrt{t}$ funksiyası $[0; +\infty)$ -da artan olduğundan, belə alınır ki, $\sqrt{8} < \sqrt{9}$. $y = \log_2 t$ funksiyasının R_+ -də artan olmasından alınır ki, $\log_2 \sqrt{8} < \log_2 \sqrt{9}$. Beləliklə, $1,5 < \log_2 3$. Deməli, $1,5$ ədədi $\left[\frac{4}{3}; \log_2 3\right]$ aralığına daxildir, odur ki, verilmiş bərabərsizliyin həllidir. Yəni $\left[\frac{4}{3}; \log_2 3\right]$ verilmiş bərabərsizliyin həlləri çoxluğudur; $1,5$ ədədi bu bərabərsizliyin həllidir.

180. Verilmiş funksiyanın D_y - təyin oblastı
$$\begin{cases} 3x-5 > 0 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases}$$

bərabərsizliklər sisteminin həlləri çoxluğudur:

$$\begin{cases} 3x-5 > 0 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 5 \\ 2x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{3} \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}.$$

Beləliklə, $D_y = \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

Verilmiş funksiya $\left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$ -da diferensiallanandır:

$$y' = -\frac{1}{3x-5} \cdot (3x-5)' + \frac{3}{2\sqrt{2x-3}} \cdot (2x-3)' = -\frac{3}{3x-5} + \frac{3}{\sqrt{2x-3}}.$$

Deməli, $y' = -\frac{3}{3x-5} + \frac{3}{\sqrt{2x-3}}$. $y' = 0$ tənliyini həll etməklə

funksiyanın böhran nöqtəsini tapırıq:

$$-\frac{3}{3x-5} + \frac{3}{\sqrt{2x-3}} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{3x-5} = \frac{3}{\sqrt{2x-3}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-3} = 3x-5 \\ 3x-5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 = (3x-5)^2 \\ 3x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{14}{9} \Leftrightarrow x=2 \\ x>\frac{5}{3} \end{cases} ; \begin{cases} 2x-3=(3x-5)^2, \\ 9x^2-32x+28=0, \\ D=(-32)^2-4\cdot 9\cdot 28=16\cdot 64-16\cdot 9\cdot 7=16, \\ x_1=2; x_2=\frac{14}{9} \end{cases}$$

$2 \in D_y$ və $y'(2)=0$ olduğundan alınır ki, $x=2$ verilmiş funksiyanın böhran nöqtəsidir. Uyğun aralıqlarda törəmənin işarəsini müəyyən edək:

1) $(2; +\infty)$ -də $y'(6)>0$, deməli törəmənin işarəsi “+”-dir; 2) $\left(\frac{5}{3}; 2\right)$ -də $y'(1,7)<0$, deməli törəmənin işarəsi “-”-dir.

$\left(\frac{5}{3}; 2\right)$ intervalında funksiyanın törəməsi mənfidir və $x=2$ nöqtəsində funksiya kəsilməzdir, deməli verilmiş funksiya $\left(\frac{5}{3}; 2\right)$ -də azalır. $(2; +\infty)$ aralığında funksiyanın törəməsi müsbətdir və $x=2$ nöqtəsində funksiya kəsilməzdir, deməli verilmiş funksiya $[2; +\infty)$ -də artır. $x=2$ nöqtəsindən keçdikdə funksiyanın törəməsi işarəsini “-” –dən “+”-ə dəyişir, bu o deməkdir ki, $x_{\min}=2$.

Funksiyanın $x=2$ nöqtəsində qiymətini tapaq:

$$y(2)=5-\ln(3\cdot 2-5)+3\sqrt{2\cdot 2-3}=5-\ln 1+3=5+3=8; y_{\min}=8.$$

Beləliklə y funksiyası $\left(\frac{5}{3}; 2\right)$ -də azalır, $[2; +\infty)$ -də artır;

$y_{\min}=8$ funksiyanın ekstremumu.

181. Verilmiş funksiya R -də təyin olunmuşdur və diferensiallanandır. Onun törəməsini tapaq:

$$y'=2\cos x(\cos x)' + \cos x = 2\cos x(-\sin x) + \cos x = \cos x(-2\sin x + 1)$$

. Beləliklə, $y' = \cos x(-2\sin x + 1)$.

$[0; \pi]$ parçasında y funksiyasının kritik nöqtələrini tapaq:

$$\begin{cases} \cos x(-2 \sin x + 1) = 0 \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ -2 \sin x + 1 = 0 \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$n = -1 \text{ is\ddot{a}}, \text{ onda } x = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \notin [0; \pi];$$

$$n = 0 \text{ is\ddot{a}}, \text{ onda } x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \in [0; \pi];$$

$$n = 1 \text{ is\ddot{a}}, \text{ onda } x = \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \notin [0; \pi];$$

$$k = -1 \text{ is\ddot{a}}, \text{ onda } x = -\frac{7\pi}{6} \notin [0; \pi];$$

$$k = 0 \text{ is\ddot{a}}, \text{ onda } x = \frac{\pi}{6} \in [0; \pi];$$

$$k = 1 \text{ is\ddot{a}}, \text{ onda } x = \frac{5\pi}{6} \in [0; \pi];$$

$$k = 2 \text{ is\ddot{a}}, \text{ onda } x = \frac{13\pi}{6} \notin [0; \pi];$$

Beləliklə, $[0; \pi]$ parçasında verilmiş funksiyanın böhran nöqtələri $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6}$ -dir.

Triqonometrik tənliyin $[0; \pi]$ parçasına daxil olan köklərinin seçilməsinin başqa bir üsulu da iki bərabərsizliyin tam həllinin tapılması ola bilər:

$$\begin{array}{l|l} 0 \leq \frac{\pi}{2} + \pi, -\frac{\pi}{2} \leq \pi n \leq \frac{\pi}{2}, & 0 \leq (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \leq \pi, \\ -\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{1}{2}, n \in \mathbb{Z} \text{ olduğundan} & 0 \leq \frac{(-1)^k}{6} + k \leq 1, \\ n = 0. \text{ Beləliklə, } x = \frac{\pi}{2} & 0 \leq (-1)^k + 6k \leq 6, \\ & k \in \mathbb{Z} \text{ olduğundan} \\ & k = 0 \text{ və ya } k = 1 \\ & \text{Beləliklə, } x = \frac{\pi}{6} \text{ və ya } x = \frac{5\pi}{6} \end{array}$$

182. Verilmiş bərabərsizliyi $(x+2)(x-2)(x-6) \geq 0$ şəkildə yazaq. Aşkardır ki, bu bərabərsizliyin sol tərəfi $x = -2$, $x = 2$ və $x = 6$ olduqda sıfır qiymətini alır. b parametrisinin -2 və 2 ədədlərinə nəzərən yerləşməsindən asılı olaraq həllin necə dəyişdiyinə baxaq:

1) $b > 2$ olduqda verilmiş bərabərsizliyin həlləri çoxluğu $[-2; 2] \cup [b; +\infty)$ olar.

2) $b = 2$ olduqda verilmiş bərabərsizlik $(x+2)(x-2)^2 \geq 0$ şəkildə gəlir. Onun həlli isə $[-2; +\infty)$ aralığıdır.

3) $-2 < b < 2$ olduqda, verilmiş bərabərsizliyin həlli $[-2; b] \cup [2; +\infty)$ çoxluğudur.

4) $b = -2$ olduqda bərabərsizlik $(x+2)^2(x-2) \geq 0$ şəkildə düşür və onun həlləri çoxluğu $\{-2\} \cup [2; +\infty)$ dir.

5) $b < -2$ isə, onda verilmiş bərabərsizliyin həlli $[b; -2] \cup [2; +\infty)$ çoxluğudur.

Şagirdlər yada salmalıdırlar ki, parametrlə məsələlərin cavabı parametrdən asılı olmalıdır. 4) halına baxarkən çox vaxt cavabda $x = -2$ həlli unudulur.

$$183. \text{ MTO: } \begin{cases} x+4 > 0 \\ 2x+3 > 0 \\ 1-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x < 1 \quad (1)$$

Verilmiş tənliyi x -in (1) bərabərsizliyinə daxil olan qiymətlər ödəyir, lakin ondan alınan $(x+4)(2x+3)=1-2x$ tənliyinin həllindən $-\frac{11}{2}$ və -1 kökləri alınır. Bunlardan yalnız $x=-1$ MTO daxildir.

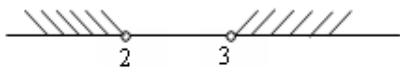
Odur ki, həllə MTO-ın tapılmasından başlamaq məqsədəuyğundur. Məlumdur ki, riyazi təlimdə tənliklər həlli xüsusi yer tutur. Bunlar arasında həllərinin axtarılması çox vaxt “mümkün qiymətlər oblastını tapmaq lazımdır?” sualına şüurlu yanaşmaqdan asılı olan tənliklər xüsusi yer tutur. Bu planda irrasional, üstlü və loqarifmik tənliklərə xüsusi diqqət vermək lazım gəlir. XI sinifdə cəbr və analizin başlanğıcı kursunun təkrarına “Tənliyin mümkün qiymətləri oblastının” (MTO) təkrarı ilə başlamaq məqsədəuyğundur. Bu o qədər də asan iş olmayıb şagirdlərdən təkcə nəzəri materialı dərinlən bilmək deyil habelə fəaliyyətlərinin öz təəssüratını təhlil etmək formasına sahib olmağı tələb edir. 183-201 tənliklərini MTO-nı tapmağın lazım olub olmadığını göstərmək məqsədilə araşdırırıq. Bu həmin məsələlərin həlli gedişindən aydın olur.

$$184. \text{ MTO: } \begin{cases} 1-3x \geq 0 \\ x^2-3x+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}.$$

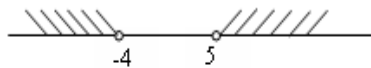
Verilmiş tənliyin hər tərəfini kvadrata yüksəldib $x^2-3x+4=(1-3x)^2$, $x_1=\frac{3+\sqrt{105}}{16}$, $x_2=\frac{3-\sqrt{105}}{16}$ tapırıq, lakin MTO-na yalnız $\frac{3-\sqrt{105}}{16}$ ədədi daxildir.

$$185. \text{ MTO: } \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 2 \end{cases}.$$

$[3; +\infty)$ və $[2; -\infty)$ aralıqları kəsişmir (Şəkil 64). Deməli tənliyin həlli yoxdur.



Şəkil 64



Şəkil 65

$$186. \text{MFO: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 1-x > 0 \\ \log_2 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x < 1 \\ x > 1 \end{cases}$$

MFO müəyyən edən sistem birgə deyil. Bu faktın müəyyənləşdirilməsilə həll qurtarır. Deməli tənliyin həlli yoxdur.

$$187. \text{MFO: } \begin{cases} x > 0 \\ -x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Tənliyin həlli yoxdur.

$$188. \text{MFO: } \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

$$189. \text{MFO: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \geq 0 \\ \log_{0,5} x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Yoxlama: $\sqrt{\log_2 1} - \sqrt{\log_{0,5} 1} \neq 1.$

Deməli tənliyin həlli yoxdur.

$$190. \text{MFO: } \begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ 10x - 2x^2 - 12 \geq 0 \\ \frac{2x}{5} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ -2(x^2 - 5x + 6) \geq 0 \\ x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

İkinci sistemdən görünür ki, MTO təyin edən birinci iki şərt eyni zamanda ödənilə bilməz. Odur nəticə budur ki, tənliyin həlli yoxdur.

$$191. MTO: \begin{cases} x-5 \geq 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5.$$

Verilmiş tənliyin sağ tərəfi yalnız müsbət qiymətlər alır. Onda sol tərəfdə yalnız müsbət qiymətlər alar, yəni $\sqrt{x-5} - \sqrt{2x-1} > 0$ və ya $\sqrt{x-5} > \sqrt{2x-1}$ (1)

Bu bərabərsizlik isə yalnız $x < -4$ olduqda ödənilir.

65-ci şəkildən görünür ki, MTO təyin edən $[5; +\infty)$ və (1) bərabərsizliyindən alınan $(-\infty; -4)$ çoxluqları kəsişmir. Deməli tənliyin həlli yoxdur.

192. $MTO: x \geq 1$. x məchulunun mümkün qiymətləri oblastını iki parçaya ayıraraq: $[-1; 0]$ və $(0; +\infty)$.

$[-1; 0]$ parçasında $x^2 + x \leq 0$, $\sqrt{x+1} \leq 1$ bərabərsizlikləri doğrudur. Bu bərabərsizlikləri tərəf-tərəfə toplayıb $x^2 + x + \sqrt{x+1} \leq 1$ alırıq, deməli verilmiş tənliyin $[-1; 0]$ parçasında həlli yoxdur. $(0; \infty)$ intervalında $y = x^2 + x$ və $y = \sqrt{x+1}$ funksiyaları ciddi artır, odur ki, hər bir qiymətini bir dəfə alır. Yəni verilmiş tənliyin, asanlıqla görmək olar ki, bir kökü vardır: $x = 1$.

193. $MTO: a > |x|$. Aşkardır ki, $a > |x|$ olduğundan $a \geq 0$, deməli $-a \leq 0$. İndi $-a$ iki mənfi olmayan ədədin cəmi olmasına əsasən, başqa sözlə 0-dan kiçik ola bilmədiyindən, belə nəticə çıxır ki, $a = 0$. Onda baxılan tənlik $\sqrt{-|x|} + \sqrt{x} = 0$ şəklə düşür və $x = 0$ dir.

$$194. MTO: \begin{cases} \sin 2x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow 2\pi m < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$$

$$\sin 2x = \cos x \quad \text{tənliyini} \quad \text{həll} \quad \text{edib} \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ köklərini alırıq. Nəticədə MTO nəzərə almaqla

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

$$195. \text{ MTO: } \begin{cases} x(2-x) \geq 0 \\ (x-2)(x+1)x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 2 \\ x = 0 \\ x \geq 2 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Yoxlama nəticəsində bir $x = 2$ kökü alınır.

183-195 məsələlərini MTO anlayışından istifadə etməklə həll etdik. Onlardan altısı (185, 186-188, 189, 195) nin həllində praktik olaraq cəbri çevirmələrdən başa iş olmadı, daha altı çalışmada (183, 184, 191, 192, 193, 194) verilmiş tənlikləri (183, 184, 194) həll etmək və ya parametrlı funksiyaları araşdırmaq (191, 192, 193) lazım gəldi. Məlum oldu ki, MTO həllin olmadığını müəyyənləşdirmək (185-187, 191) üçün faydalıdır. 188 və 189 tapşırıqlarında göstərildi ki, MTO təhlilində kökün yalnız bir ədəddən ibarət olduğu alındı. Belə hallarda həmin ədədin tənliyin kökü olduğunu deməyə tələsmək lazım deyil, onu əvvəlcə verilmiş tənlikdə yerinə yazmaqla yoxlamaq lazımdır. Məsələn 188 tapşırığında vəziyyət olduqca aşkar olduğundan yoxlama şifahi aparıldı, 189 məsələsində isə bir qədər mürəkkəblik olduğundan yoxlama əyanilik üçün yazılı aparıldı. Tənliklər həllində MTO-dan istifadə etməməyin mümkünlüyünə də nümunələr göstərmək lazımdır (196-201).

196. MTO-dan istifadə etmədən də aydındır ki, kiçik ədəddən böyük ədədi çıxdıqda müsbət ədəd almaq mümkün olmadığından $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} = 3$ bərabərliyi mümkün deyil. Deməli baxılan tənliyin həlli yoxdur.

197. Mənfi olmayan iki ədədin cəmi -1-ə bərabər olmadığından $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x-2} = -1$ bərabərliyi mümkün deyil. Deməli verilmiş tənliyin həlli yoxdur.

198. Loqarifmanın tərifinə əsasən $\log_{x^6+2x^2+1}(x^4+1) = 1$ bərabərliyini

$$\begin{cases} x^4+1 = x^6+2x^2+1 \\ x^4+1 > 0 \\ x^6+2x^2+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^6+2x^2+1 \neq 1 \\ x^6-x^4+2x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^6+2x^2 \neq 0 \\ \begin{cases} x=0 \\ x^4-x^2+2 = 0 \end{cases} = 0 \end{cases} \text{ sisteminə}$$

çevirək. Göründüyü kimi bu sistemin həlli yoxdur.

Çünki $x = 0$ olduqda, $2 = 0$ alınır. Bu isə mümkün deyil.

199. $\log_2(8^x + 2^x - 1) = x$ bərabərliyini $8^x + 2^x - 1 = 2^x \Leftrightarrow 8^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ şəklidə göstərək. Deməli $x = 0$ baxılan tənliyin həllidir.

200. Loqarifmanın xassəsinə görə $\lg x + \lg(x^3 - x^2 + 1) = \lg(x^4 + x)$ tənliyini
$$\begin{cases} x(x^3 - x^2 + 1) = x^4 + x \\ x > 0 \end{cases}$$
 şəklidə yazmaq olar. Sonra
$$\begin{cases} x((x^3 + 1) - x^2) = x(x^3 + 1) \\ x > 0 \end{cases}$$
 sisteminə keçək. Sistemin birinci tənliyindən

$x^2 = 0$ alınır. Buradan alınır ki, x yalnız sıfır qiymət ala bilər, lakin $x > 0$ məhdudlaşdırılmasından alınır ki, tənliyin həlli yoxdur.

$$201. \sqrt{x^3 - x + 1} = \sqrt{1 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x + 1 = 1 - x \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Tənliklərin *MFO* tətbiq etmədən həllində də bu anlayışın tətbiqi ilə həllinə nisbətən müəyyən çətinlik vardır. 196, 197, 199 çalışmalarında *MFO* haqqında söhbət həlli yalnız çətinləşdirər. 201 tapşırığında isə *MFO*-dan istifadə etmək $x^3 - x + 1 \geq 0$ bərabərsizliyini həll etməyi tələb edir ki, bu da şagirdlər üçün asan iş deyildir. *MFO* axtarmaq 198 məsələsini də mürəkkəbləşdirir. Beləliklə, elə hallar vardır ki, *MFO* müraciət etmək nəinki faydasızdır, hətta ziyandır.

Tənliyin *MFO* məlum olan halda da alınan nəticəni yoxlamaq lazımdır. Bu baxımdan 189 məsələsinə diqqət etmək əlverişlidir. Burada $x = 1$ tənliyin *MFO* olmasına baxmayaraq, bu onun həlli deyildir. Lakin *MFO*-nin tətbiqi ilə kənar kökləri asanlıqla müəyyən etmək olur.

202. İnteqralın tətbiqilə bəzi bərabərsizlikləri isbat etmək olar. 202-207 də bu ümumi metoddan istifadəyə aid nümunələr göstəririk.

İnteqralın bərabərsizliklərin isbatına tətbiqi müəyyən inteqralın həndəsi mənasının və sahənin monotonluq xassəsinin tətbiqinə əsaslanır.

1. $y = f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməyən və mənfi deyildirsə, onda uyğun əyrixətli trapesiyanın S sahəsi
$$S = \int_a^b f(x) dx$$
 düsturu ilə hesablanır (müəyyən inteqralın həndəsi mənası)

2. F_1 fiquru F fiquruna daxildir, onda birinci fiqurun S_1 sahəsi, ikincinin S sahəsindən kiçikdir, yəni $F_1 \subset F$ isə, onda $S_1 < S$ (sahənin monotonluq xassəsi).

İndi baxılan bərabərsizliyin isbatına diqqət edək. $\frac{1}{52}$ və $\frac{1}{52}$ düzbucaqlıların sahələri (Şəkil 66),

$\ln \frac{52}{51} = \ln 52 - \ln 51 = \ln x \Big|_{51}^{52} = \int_{51}^{52} \frac{dx}{x}$ in isə əyrixətli trapesiyanın sahəsi olduğunu nəzərə alsaq bərabərsizliyin isbatı aşkardır.

203.

$$\ln \frac{101}{100} = \ln \frac{202}{200} = \ln 202 - \ln 200 = \int_{200}^{202} \frac{dx}{x} = S$$

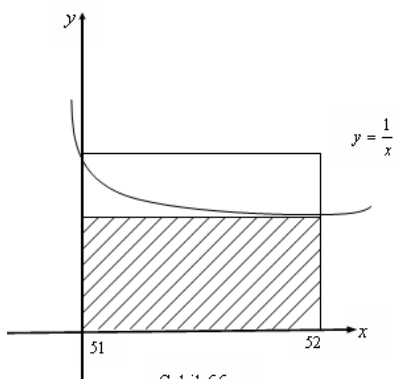
əyrixətli trapesiyanın, $\frac{2}{201} = S_1$

isə ona daxil olan düzbucaqlı trapesiyanın sahəsi olduğundan (Şəkil 67). $S_1 < S$ və beləliklə

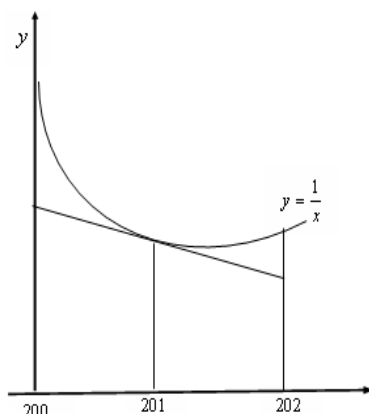
$$\ln \frac{101}{100} > \frac{2}{201}.$$

204. Arksinusların fərqi yuxarıdan $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ funksi-

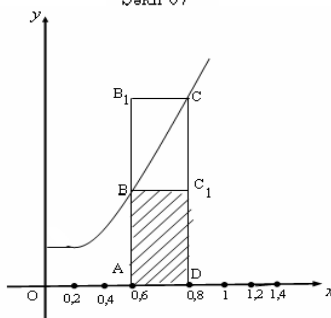
yasının qrafikilə əhatə olunmuş ABCD əyrixətli trapesiyanının sahəsinə (Şəkil 68) bərabər olan müəyyən integralın qiymətinə bərabərdir:



Şəkil 66



Şəkil 67



Şəkil 68.

$$\arcsin 0,8 - \arcsin 0,6 = \arcsin x \Big|_{0,6}^{0,8} = \int_{0,6}^{0,8} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(0,6) = \frac{5}{4}, \quad f(0,8) = \frac{5}{3} \quad \text{olduğundan} \quad S_1 = 0,2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{kəmiyyəti } AB_1CD$$

$$\text{düzbucaqlısının} \quad S_2 = 0,2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{isə } ABC_1D \quad \text{düzbucaqlısının}$$

$$\text{sahələridir. Odur ki, } S_2 < S < S_1. \text{ Yəni } \frac{1}{4} < \arcsin 0,8 - \arcsin 0,6 < \frac{1}{3}.$$

Bərabərsizlik isbat edildi.

$$205. \text{ a) } \sin 20^\circ = \sin \frac{\pi}{9} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = S,$$

burada S ilə $OACD$ əyrixətli trapesiyasının sahəsi işarə edilmişdir, (Şəkil 69). $OABD$ düzbucaqlının sahəsi isə ($OACD$ əyrixətli trapesiyanın daxil olduğu)

$$S_1 = \frac{\pi}{9} \quad \text{olduğundan} \quad \sin 20^\circ < \frac{\pi}{9}.$$

$$\text{Digər tərəfdən } \frac{\pi}{9} < \frac{7}{20} \quad \text{bərabərsiz-}$$

$$\text{liyinin doğruluğundan } \sin 20^\circ < \frac{7}{20}$$

bərabərsizliyinin doğru olması alınır.

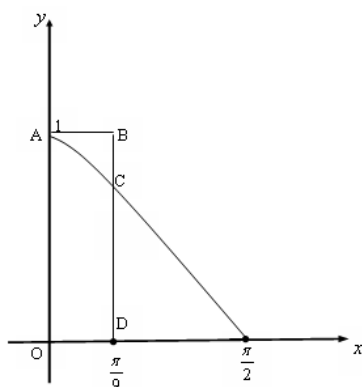
b) Fərz edək ki, $OACD$ əyrixətli trapesiyasına daxil olan $OACD$ düzbucaqlı trapesiyasının sahəsi S_2 dir. (Şəkil69). Onda

$$S_2 = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{9}}{2} \cdot \frac{\pi}{9} \quad \text{və} \quad S_2 < S, \quad \text{yəni} \quad \frac{1 + \cos \frac{\pi}{9}}{2} \cdot \frac{\pi}{9} < \sin \frac{\pi}{9}.$$

Alınmış bərabərsizliyi $\sin \frac{\pi}{9}$ -a nəzərən həll edək. Bunun üçün $\sin \frac{\pi}{9} = a > 0$ işarə

$$\text{edək, onda } \cos \frac{\pi}{9} = \sqrt{1-a^2} \quad \text{və bərabərsizlik } \frac{1 + \sqrt{1-a^2}}{2} \cdot \frac{\pi}{9} < a \quad \text{şəklinə}$$

$$\text{düşər. Bu bərabərsizliyi həll edib } (a > 0) \quad a > \frac{36\pi}{\pi^2 + 18^2} \quad \text{alırıq.}$$



Şəkil 69.

$$\text{Beləliklə, } \sin \frac{\pi}{9} > \frac{36\pi}{18^2 + \pi^2} > \frac{36 \cdot 3,1}{324 + 3,2^2} = \frac{111,6}{334,24} > 0,3338 > \frac{1}{3}.$$

$$\text{Beləliklə, } \sin 20^\circ > \frac{1}{3}.$$

206. $x = 1$ olduqda $e^x \geq ex$ bərabərsizliyi doğrudur. Fərz edək ki, $x > 1$. Onda

$$e^x \geq ex \Leftrightarrow e^x - e \geq ex - e \Leftrightarrow \int_1^x e^t dt \geq \int_1^x edt.$$

$S_1 > S_2$ olduğundan sonuncu bərabərsizlik doğrudur, burada $S_1 = \int_1^x e^t dt$

kəmiyyəti ABCD əyrixətli trapesiyanın, $S_2 = \int_1^x edt$ isə ABCD düz-

bucaqlısının sahələridir (Şəkil 70). Deməli baxılan bərabərsizlik doğrudur.

$$207. [e; \pi] \text{ parçasında } f_1(x) = \frac{1}{x^2}$$

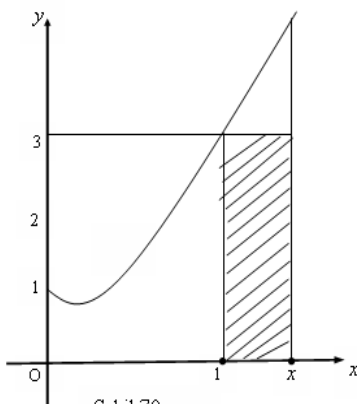
və $f_2(x) = \frac{e}{x}$ funksiyalarının qrafiklərini qurub uyğun əyrixətli trapesiyaların sahələrini tapaq (Şəkil 71).

$$S_1 = \int_e^\pi \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{e} - \frac{1}{\pi}; \quad S_2 = \int_e^\pi \frac{1}{x} dx = e \ln \frac{\pi}{e}.$$

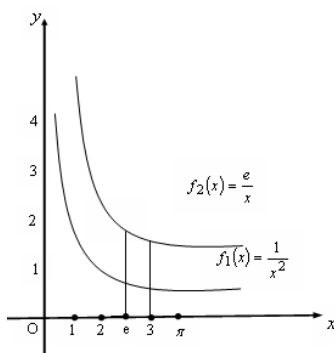
Aşkardır ki, $S_1 < S_2$, odur ki,

$$\frac{1}{e} - \frac{1}{\pi} < e \ln \frac{\pi}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} - \frac{1}{e} > e \ln \frac{e}{\pi} \Leftrightarrow l^{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{e}} > l^{e \ln \frac{e}{\pi}} \Leftrightarrow l^{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{e}} > \left(\frac{e}{\pi} \right)^e$$

202-207 məsələlərinin hamısının həllində integraldan istifadə etdik. Bununla da bərabərsizliyin isbatı ilə əlaqədar daha bir ümumi metodu şagirdlər öyrənirlər.



Şəkil 70.



Şəkil 71.

208. $\frac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}} = t$ əvəzləməsindən istifadə edək. Onda

$$\frac{1}{3-\sqrt{9-x^2}} = \frac{3+\sqrt{9-x^2}}{x^2} = \frac{1}{t} \text{ olar və tənlik } t + \frac{1}{4t} = 1 \text{ şəklinə}$$

düşər. Alınmış tənliyin həlli $t = \frac{1}{2}$ dir, onda $x = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$

209. $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ funksiyasının təyin oblastı $[2;4]$ parçasıdır. Bu funksiyanın $[2;4]$ parçasında ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapaq. Bunun üçün $f(x)$ funksiyasının törəməsini tapaq:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}.$$

$x=3$ olduqda $f'(x)$ törəmə sıfıra bərabər olur. $f(x)$ funksiyasının $[2;4]$ parçasının uclarında və $x=3$ nöqtəsində qiymətlərini tapaq: $f(2) = f(4) = \sqrt{2}$; $f(3) = 2$. Deməli, $\sqrt{2} \leq \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \leq 2$. Lakin $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \geq 2$, beləliklə $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$ bərabərliyi yalnız $\begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2 \\ (x-3)^2 + 2 = 2 \end{cases}$ şərti ödənildikdə mümkündür, buradan $x=3$.

Yoxlama ilə müəyyən edirik ki, $x=3$ verilmiş tənliyin köküdür.

210. Bu və sonrakı 211-223 loqarifmik və üstlü bərabərsizliklərin həllində [29]-da verilən 5 teoremə əsaslanan yanaşmadan istifadə edirik. Bu məsələnin standart həlli verilmiş bərabərsizliyi $\log_x^{(x^2-3)} < \log_x 1$ şəkildə yazıb iki $x > 1$ və $0 < x < 1$ hala baxmağı

tələb edir. Birinci halda $\begin{cases} x^2 - 3 < 1 \\ x^2 - 3 > 0 \\ x > 1 \end{cases}$ sistemi alınır və onun həlli

$$(\sqrt{3}; 2) \text{ -dir. İkinci halda isə həlli olmayan } \begin{cases} x^2 - 3 > 1 \\ x^2 - 3 > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \text{ sistemi alınır.}$$

Beləliklə baxılan bərabərsizliyin həlli $(\sqrt{3}; 2)$ -dir. Lakin bu məsləni göstərilən iki hala baxmadan da həll etmək olar. Yalnız göstərmək lazımdır ki, $\log_a b$ ifadəsinin işarəsi $(a-1)(b-1)$ hasilinin işarəsilə eynidir. Dorudan da: $a > 1$ və $b > 1$ isə, onda $\log_a b > 0$ və $(a-1)(b-1) > 0$; $a > 1$ və $0 < b < 1$ isə, onda $\log_a b < 0$ və $(a-1)(b-1) < 0$; $0 < a < 1$ və $b > 1$ isə, onda $\log_a b < 0$ və $(a-1)(b-1) < 0$; $0 < a < 1$ və $0 < b < 1$ isə, onda $\log_a b > 0$ və $(a-1)(b-1) < 0$. Aparılan mühakimə çətin deyil və loqarifmik bərabərsizliyin həllini kifayət qədər sadələşdirir. Budur baxılan $\log_x^{(x^2-3)} < 0$ bərabərsizliyi göstərilən xassənin tətbiqilə daha sadəliklə həll olunur:

$$\log_x^{(x^2-3)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2-3-1) < 0 \\ x > 0 \\ x^2-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2)(x+2) < 0 \\ x > 0 \\ (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3} < x < 2.$$

211. Əvvəlki bərabərsizliyin həllində tətbiq olunan ikinci üsuldən istifadə olunur:

$$\begin{aligned} \log_{x+3}^{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)} > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+3-1)\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}-1\right) > 0 \\ x+3 > 0 \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)\left(\frac{2x^2}{1-x^2}\right) > 0 \\ x > -3 \\ 1-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2(x+2)}{1-x^2} > 0 \\ x > -3 \\ 1-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x+2) > 0 \\ x > -3 \\ (1-x)(1+x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$212. \quad (x-5)\log_x(2x+1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x-1)(2x+1-1) < 0 \\ x > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(Əvvəlki məsələyə baxmalı)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)(x-5) < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-5) < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 5 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 5.$$

210-212 məsələlərinin həllindən sonra $\log_a b$ və $(a-1)(b-1)$ ifadələrinin işarələrinin eyni olduğu haqqındakı nəticəni ümumiləşdirmək olar.

Teorem 1. $a > 0, a \neq 1, b > 0$ və $c > 0$ olan a, b, c ədədləri üçün aşağıdakı bərabərsizliklər eynigüclüdür:

- 1) $\log_a b > \log_a c$ və $(a-1)(b-c) > 0$;
- 2) $\log_a b \geq \log_a c$ və $(a-1)(b-c) \geq 0$;
- 3) $\log_a b < \log_a c$ və $(a-1)(b-c) < 0$;
- 4) $\log_a b \leq \log_a c$ və $(a-1)(b-c) \leq 0$;

İsbatı: ikinci hökmə baxaq (Qalanları analoji qaydada isbat oluna bilər). Göstərək ki, a, b və c -nin bütün mümkün qiymətlərində $\log_a b \geq \log_a c$ bərabərsizliyindən $(a-1)(b-c) \geq 0$ bərabərsizliyi alınır. $a > 1$ isə, onda $\log_a b \geq \log_a c$ bərabərsizliyindən alınır ki, $b \geq c$, deməli $b-c \geq 0$, odur ki, $(a-1)(b-c) \geq 0$.

$0 < a < 1$ isə, onda $\log_a b \geq \log_a c$ bərabərsizliyindən alınır ki, $b \leq c$, yəni $b-c \leq 0$, deməli $(a-1)(b-c) \geq 0$.

İndi isbat edək ki, a, b və c -nin bütün mümkün qiymətlərində $(a-1)(b-c) \geq 0$ bərabərsizliyindən $\log_a b \geq \log_a c$ bərabərsizliyi alınır.

$a > 0$ və $a \neq 1$ olduğundan $a > 1$ və ya $0 < a < 1$. Onda $a > 1$ halında $(a-1)(b-c) \geq 0$ bərabərsizliyindən alınır ki, $b-c \geq 0$, $0 < a < 1$ halında isə $b-c \leq 0$. $a > 1, b \geq c$ isə, onda $b > 0$, $c > 0$ və əsası vahiddən böyük olan loqarifmik funksiya artan olduğundan $\log_a b \geq \log_a c$ bərabərsizliyi alınır. $0 < a < 1, b \leq c$ isə, onda əsası vahiddən kiçik olan loqarifmik funksiyanın azalan olması və $b > 0, c > 0$

olduğunu nəzərə almaqla $\log_a b \geq \log_a c$ bərabərsizliyinin doğruluğunu müəyyənləşdiririk. Bərabərsizliyi eynigüclülüyü isbat oldu. 213-215 məsələlərinin həllində bu teoremdən istifadə olunur.

213.

$$\log_{2x} (2x^2 - 4x + 6) \leq \log_{2x} (x^2 + x) \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(2x^2 - 4x + 6 - x^2 - x) \leq 0 \\ 2x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ 2x^2 - 4x + 6 > 0 \\ x^2 + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(x^2 - 5x + 6) \leq 0 \\ x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ x(x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)(x-3) \leq 0 \\ x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Deməli bərabərsizliyin həlli $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [2; 3]$ -dir.

214.

$$\log_{7-x} (x^2 - 5x + 6) - \log_{7-x} (2x - 4) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (7-x-1)(x^2 - 5x + 6 - 2x + 4) > 0 \\ 7-x > 0 \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \\ 2x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6-x)(x-2)(x-5) > 0 \\ x < 7 \\ (x-2)(x-3) > 0 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(x-2)(x-5) < 0 \\ x < 7 \\ x-3 > 0 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < x < 6$$

Bərabərsizliyin həlli $(5; 6)$ -dır.

215. Bu bərabərsizliyi həll etmək üçün 212-in həlli ilə əlaqədar göstərilən 1 teoremdən istifadə etməklə məxrəcdə $(x-1-1)(x-1)$, surətdə isə $(x-1)(x-3-9+x)$ yazırıq.

$$\frac{\log_x^{(x-3)} - \log_x^{(9-x)}}{\log_{x-1}^x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-1)(x-3-9+x)}{(x-1-1)(x-1)} < 0 \\ x > 0 \\ x-1 > 0 \\ x-3 > 0 \\ 9-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-6}{x-2} < 0 \\ x > 1 \\ x-3 > 0 \\ 9-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-6}{x-2} < 0 \\ 3 < x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 6 \\ 3 < x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 6$$

Bərabərsizliyin həlli $(3;6)$ olur.

Bu misallar baxılan tip bərabərsizliklərin həllində istifadə edilən metodun səmərəli olduğunu göstərir.

Loqarifmik bərabərsizliklərin həllində istifadə edilən daha iki faydalı hökmü göstərək.

Teorem 2. a, b, c, d -in bütün mümkün qiymətlərində aşağıdakı bərabərsizliklər eynigüclüdür:

- 1) $\log_a b \cdot \log_c d > 0$ və $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) > 0$;
- 2) $\log_a b \cdot \log_c d \geq 0$ və $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \geq 0$;
- 3) $\log_a b \cdot \log_c d < 0$ və $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) < 0$;
- 4) $\log_a b \cdot \log_c d \leq 0$ və $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \leq 0$;

İsbatı: a, b, c, d -in bütün mümkün qiymətlərində $\log_a b$ və $(a-1)(b-1)$ -nin habelə $\log_c d$ və $(c-1)(d-1)$ işarələri eyni olduğundan $\log_a b \cdot \log_c d$ və $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)$ hasilərinin də işarələri eyni olur. Beləliklə, baxılan bərabərsizliklər eynigüclüdür.

216 bərabərsizliyinin həllində bu faktdan istifadə olunur.

216.

$$\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot \log_{x-2}(x^2+1) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{x}{x+1}-1\right)(x-2-1)(x^2+1+1) \leq 0 \\ \frac{1}{x} > 0 \\ x \neq 1 \\ \frac{x}{x+1} > 0 \\ x-2 > 0 \\ x-2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-x}{x} \cdot \frac{-1}{x+1}(x-3)x^2 \leq 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ x+1 > 0 \\ x > 2 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x-1)(x-3)}{x+1} \leq 0 \\ x > 2 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3$$

Cavab: (2;3).

Teorem 3. a, b, c, d -in bütün mümkün qiymətlərində aşağıdakı bərabərsizliklər eynigüclüdür:

- 1) $\log_a b - \log_c b > 0$ və $(a-1)(b-1)(c-1)(c-a) > 0$;
- 2) $\log_a b - \log_c b \geq 0$ və $(a-1)(b-1)(c-1)(c-a) \geq 0$;
- 3) $\log_a b - \log_c b < 0$ və $(a-1)(b-1)(c-1)(c-a) < 0$;
- 4) $\log_a b - \log_c b \leq 0$ və $(a-1)(b-1)(c-1)(c-a) \leq 0$;

Bu teoremin isbatından əvvəl qeyd edək ki, eynicürəliyi saxlamaq məqsədilə 1)-4) hallarının hər birində $(c-a)$ vuruğu əvəzində $(a-c)$ yazmaq lazım gələrsə, onda bərabərsizliklərin işarəsi də əksinə dəyişərdi.

İsbatı: 1)-in isbatını verək.

$$\log_a b - \log_c b > 0 \Leftrightarrow \log_a b - \frac{\log_a b}{\log_a c} > 0 \Leftrightarrow \log_a b \left(1 - \frac{1}{\log_a c}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{\log_a b}{\log_a c} (\log_a c - 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_c b (\log_a c - \log_a a) > 0 \Leftrightarrow (c-1)(b-1)(a-1)(c-a) > 0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)(c-1)(c-a) > 0$$

Tələb olunan isbat edildi. Digər 2)-4) hökmləri analoji qaydada isbat olunur. Bütün hallarda eynigüclülükdə $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$ və $b > 0$ olduğu nəzərdə tutulur.

217-118 məsələlərinin həllində teorem3-dən istifadə olunur.

217.

$$\log_x^{(x-1)} - \log_{x+1}^{(x-1)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-1-1)(x+1-1)(x+1-x) < 0 \\ x > 0 \\ x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)(x-2) < 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < x < 2$$

218.

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{4}}x} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}x} \Leftrightarrow \log_{(2x^2-1)}^{\frac{1}{12}} > \log_x^{\frac{1}{4}} + \log_x^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{2x^2-1}^{\frac{1}{12}} - \log_x^{\frac{1}{12}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2-1-1)\left(\frac{1}{12}-1\right)(x-1)(x-2x^2+1) > 0 \\ 2x^2-1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-1)(x-1)(2x^2-x-1) > 0 \\ 2x^2-1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^3(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right) > 0 \\ \left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Deməli bərabərsizliyin həlli $(1; +\infty)$ olur.

Qüvvət daxil olan bərabərsizliklərdə də analogi xassələr vardır. Bu xassələri isbatsız göstərək (belə xassələrin isbatı loqarifma daxil olan bərabərsizliklərin xassələrinə analogidir).

Teorem 4. a və b -nin bütün mümkün qiymətlərində aşağıdakı bərabərsizliklər eynigüclüdür:

- 1) $a^b > 1$ və $(a-1)(b-1) > 0$;
- 2) $a^b \geq 1$ və $(a-1)(b-1) \geq 0$;
- 3) $a^b < 1$ və $(a-1)(b-1) < 0$;
- 4) $a^b \leq 1$ və $(a-1)(b-1) \leq 0$;

Teorem 5. a, b və c -nin bütün mümkün qiymətlərində aşağıdakı bərabərsizliklər eynigüclüdür.

- 1) $a^b > a^c$ və $(a-1)(b-c) > 0$;
- 2) $a^b \geq a^c$ və $(a-1)(b-c) \geq 0$;
- 3) $a^b < a^c$ və $(a-1)(b-c) < 0$;
- 4) $a^b \leq a^c$ və $(a-1)(b-c) \leq 0$.

Nəticə. a, b və c -nin bütün mümkün qiymətlərində aşağıdakı bərabərsizliklər eynigüclüdür:

- 1) $a^b - a^c > 0$ və $(a-1)(b-c) > 0$;
- 2) $a^b - a^c \geq 0$ və $(a-1)(b-c) \geq 0$;
- 3) $a^b - a^c < 0$ və $(a-1)(b-c) < 0$;
- 4) $a^b - a^c \leq 0$ və $(a-1)(b-c) \leq 0$

219-220 məsələlərinin həllində bu nəticədən istifadə olunur.

219.

$$x^x \leq x^{3x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3x+1) \leq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Deməli, $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$ verilmiş bərabərsizliyin həllidir.

220.

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2} > \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x-2} &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2} > \left(\frac{x}{x+1}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{x+1}-1\right)(x^2+x-2) > 0 \\ \frac{x}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+x+1}{x+1} < 0 \\ \frac{x}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+2)(x-1)}{x+1} < 0 \\ \frac{x}{x+1} > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Baxılan bərabərsizliyin həlli $(-\infty; -2) \cup (0; 1)$ dir.

221-223 bərabərsizliklərinin həllində loqarifmik və qüvvət funksiyaları daxil olan bərabərsizliklərin yuxarıda göstərilən xassələrinin birləşməsindən istifadə olunur.

221.

$$\frac{(x+2)\lg x}{2^x-4} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+2)(10-1)(x-1)}{2^x-2^2} < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+2)(x-1)}{(2-1)(x-2)} < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+2)(x-1)}{x-2} < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2$$

222.

$$\frac{\log_{0,3}^{(x-1)} \cdot \log_{x-1}^{x^2}}{3^{x^2} - 27^x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(0,3-1)(x-1-1)(x-1-1)(x^2-1)}{3^{x^2} - 3^{3x}} \geq 0 \\ x-1 > 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-2)^2(x-1)(x+1)}{(3-1)(x^2-3x)} \leq 0 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-2)^2(x-1)}{x} \leq 0 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ 2 < x < 3 \end{cases} \text{ və ya } (1;2) \cup (2;3).$$

223.

$$\left(\frac{\pi}{3}\right)^{x^2-3} \geq \frac{3}{\pi} \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3}\right)^{x^2-2} \geq \left(\frac{\pi}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3}-1\right)(x^2-2+1) \geq 0 \Leftrightarrow x^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{cases}. \text{ Deməli, bərabərsizliyin həlli } (-\infty; -1) \cup [1; +\infty) \text{ dir.}$$

224. Əvvəlcə qeyd edək ki, verilmiş tənliyin $MTO (-3; 0) \cup (0; 3)$ -dir. Aşkıdır ki, verilmiş tənlik

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}} \right)^\pi + \frac{\pi-1}{\pi} \left(\frac{1}{3-\sqrt{9-x^2}} \right)^{\frac{\pi}{\pi-1}} = 1 \quad (1) \text{ ilə eynigüclüdür. (1)}$$

bərabərliyinin sol tərəfini müsbət $a_1 = \left(\frac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}} \right)^\pi$, $a_2 = \left(\frac{1}{3-\sqrt{9-x^2}} \right)^{\frac{\pi}{\pi-1}}$ və ρ_1, ρ_2 çəkili ($\rho_1 > 0, \rho_2 > 0, \rho_1 + \rho_2 = 1$) $\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2$ ədədi ortası və $a_1^{\rho_1} a_2^{\rho_2}$ həndəsi ortası arasındakı asılılığı göstərən Koşi bərabərsizliyini tətbiq etməklə aşağıdan qiymətləndirək: $\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 \geq a_1^{\rho_1} a_2^{\rho_2}$ (2).

Məlumdur ki, (2) bərabərsizliyində bərabərlik yalnız $a_1 = a_2$ şərtilə mümkündür. (2) bərabərsizliyində $a_1 = \left(\frac{x^2}{3 + \sqrt{9 - x^2}} \right)^\pi$,

$a_2 = \left(\frac{1}{3 - \sqrt{9 - x^2}} \right)^{\frac{\pi}{\pi-1}}$, $\rho_1 = \frac{1}{\pi}$, $\rho_2 = \frac{\pi-1}{\pi}$ qiymətlərini yerinə yazıb

$\frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{3 + \sqrt{9 - x^2}} \right)^\pi + \frac{\pi-1}{\pi} \left(\frac{1}{3 - \sqrt{9 - x^2}} \right)^{\frac{\pi}{\pi-1}} \geq \frac{x^2}{3 + \sqrt{9 - x^2}} \cdot \frac{1}{3 - \sqrt{9 - x^2}} = 1$ (3) alırıq. (3) bərabərliyində bərabərlik yalnız

$\left(\frac{x^2}{3 + \sqrt{9 - x^2}} \right)^\pi = \left(\frac{1}{3 - \sqrt{9 - x^2}} \right)^{\frac{\pi}{\pi-1}}$ şərtilə mümkündür. Buradan

$\frac{x^2}{3 + \sqrt{9 - x^2}} = 3 - \sqrt{9 - x^2}$ olduğundan $(3 - \sqrt{9 - x^2})^\pi = 1$.

Beləliklə, verilmiş tənlik $3 - \sqrt{9 - x^2} = 1$ irrasional tənliyinə gəlir və buradan $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$ alınır.

225. Verilmiş funksiyanın ibtidai funksiyanın ümumi şəkili $F(x) = e^{x+3} - x^2 + \sin \pi x + C$ -dir. İbtidai funksiyanın qrafiki $(-3; -7)$ nöqtəsindən keçir, odur ki, $F(-3) = -7$; $-7 = e^0 - 9 + \sin(-3\pi) + C, C = 1$. Onda $F(x) = e^{x+3} - x^2 + \sin \pi x + 1$.

226. Funksiyanın törəməsinin x_0 nöqtəsində qiyməti funksiyanın qrafikinə absisi x_0 nöqtəsində bucaq əmsalına bərabərdir, yəni $f'(x_0) = \tan \alpha = k$. $y = -x$ düz xəttinin bucaq əmsalı -1 ə bərabərdir. $f'(x_0) = \tan \alpha = k$. $y = -x$ düz xəttinin bucaq əmsalı -1-ə bərabərdir. $f'(x) = -6x^2 + 12x - 7$. $f'(x) = -1$ şərtindən x -i tapaq: $-6x^2 - 12x - 7 = -1$, $x^2 - 2x + 1 = 0$, $(x-1)^2 = 0$, $x = 1$. Toxunanın tənliyi $6x^2 - 12x + 6 = 0$ $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ şəkildədir. $x_0 = 1$ olduqda $y_0 = -2 + 6 - 7 = -3$, $f'(1) = -6 + 12 - 7 = -1$, $y + 3 = -1(x - 1)$, $y = -x - 2$. Bu tələb olunandır.

227. Əvvəlcə qeyd edək 164-169 məsələlərinin həllində vektorların skalyar hasilinin tərifindən və xassələrindən istifadə etdik. Üç məchullu tənliklər sisteminin (227-236) həllinə də skalyar hasilin tətbiqini göstərək. Məlumdur ki, $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos \alpha$. $|\cos \alpha| \leq 1$ olduğundan

$$|\bar{a}\bar{b}| \leq |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \quad (1)$$

və

$$\bar{a}\bar{b} \leq |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \quad (2)$$

Qeyd edək ki,

a) (1) bərabərsizliyində $\bar{a}, \bar{b}$ vektorları kollienar olduqda;

b) (2) bərabərsizliyində $\bar{a}, \bar{b}$ vektorları eyni istiqamətli olduqda bərabərlik alınır.

$\bar{a}(a_1; b_1; c_1)$ və $\bar{b}(a_2; b_2; c_2)$ vektorları verilsə, onda $\bar{a}\bar{b} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$ və $|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$, $|\bar{b}| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}$. (1), (2) bərabərsizliklərindən bərabərlik

halında $\bar{a} = \lambda \bar{b}$, $\lambda \neq 0$ alınır ki, bu da
$$\begin{cases} a_1 = \lambda a_2 \\ b_1 = \lambda b_2 \\ c_1 = \lambda c_2 \end{cases} \quad (3) \text{ sistemilə}$$

eynigüclüdür. Bilirik ki, xətti tənliklər sistemini ardıcıl olaraq məchulların sayını azaltmaqla və ya Kramer metodunun tətbiqi ilə həmişə həll etmək olar (sistemin determinantı sıfırdan fərqli isə). 227-236 xətti olmayan tənliklər sistemidir.

Baxılan sistemə (227) üç dəyişən və iki tənlik daxil olduğundan, ilk baxışdan belə demək olar ki, onun sonsuz sayda həlli vardır. $\bar{a}(x; y; z)$ və $\bar{b}(1; 1; 1)$

vektorlarına baxaq. Onda skalyar hasil $\bar{a}\bar{b} = x + y + z = 1$ və

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad |\bar{b}| = \sqrt{3}, \quad \text{bundan əlavə} \quad |\bar{a}||\bar{b}| = 1.$$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 1$ və $|\bar{a}||\bar{b}| = 1$ olduğuna görə $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|$ alırıq. Beləliklə, (3)

şərtinə görə $x = y = z$, $x + y + z = 1$ şərtini nəzərə aldıqda isə $x = y = z = \frac{1}{3}$ alırıq. Deməli baxılan tənliklər sisteminin həlli

$$\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \text{-dir.}$$

228. $\bar{a}(x^3; y^3; z^3)$, $\bar{b}(2; 2; 1)$ vektorlarına baxaq. Onda $|\bar{a}| = \sqrt{x^6 + y^6 + z^6} = \sqrt{1} = 1$, $|\bar{b}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$ və

$$\bar{a}\bar{b} = 2x^3 + 2y^3 + z^3 = 3. \quad \text{Verilmiş sistem} \quad \begin{cases} |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| = 3 \\ \bar{a}\bar{b} = 3 \end{cases} \quad \text{ilə}$$

eynigüclüdür, buradan 227 də göstərilən (3) şərtinə görə $\frac{x^3}{2} = \frac{y^3}{2} = \frac{z^3}{1}$, deməli $x^3 = 2z^3$ və $y^3 = 2z^3$. Alınmış bu qiymətləri

sistemin birinci tənliyində yerinə yazıb $4z^3 + 4z^3 + z^3 = 3$ və ya $z = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ alırıq. Odur ki, $x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ və $y = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. Deməli verilmiş

sistemin həlli $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}; \sqrt[3]{\frac{2}{3}}; \sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)$ -dir.

229. İlk baxışda belə görünür ki, bu sistem qeyri-müəyyəndir (başqa sözlə sonsuz sayda həlli var). Həqiqətdə isə sistemin həlli

yoxdur. $\bar{a}(5x^6; 4y^4; 3z^2)$ və $\bar{b}\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$ vektorlarına baxaq. Onda

$$|\bar{a}| = \sqrt{25x^{12} + 16y^8 + 9z^2}, \quad |\bar{b}| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{16} + \frac{1}{9}}, \quad \bar{a}\bar{b} = x^6 + y^4 + z^2$$

$$\text{və verilən sistem} \quad \begin{cases} |\bar{a}| = 1 \\ \bar{a}\bar{b} = \frac{7}{15} \end{cases} \quad \text{sistemilə eynigüclüdür.}$$

Digər tərəfdən

$$x^6 + y^4 + z^2 \leq \sqrt{25x^{12} + 16y^8 + 9z^4} \cdot \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{16} + \frac{1}{9}} = 1 \cdot \frac{\sqrt{769}}{60} < \frac{28}{60} = \frac{7}{15}$$

, yəni $\bar{a}\bar{b} < \frac{7}{15}$, bu isə sistemin ikinci tənliyinə ziddir. Deməli verilmiş

sistemin həlli yoxdur.

230. $x = 0, y = 0, z = 0$ sistemin həlli olmadığından, onun birinci tənliyinin hər

tərəfini $(xyz)^2$ -ə bölüb verilən sistemlə eynigüclü

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{4}{z^2} = 9 \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \\ 3x - 6y + \sqrt{3}z = 2 \end{cases}$$

sistemi alırıq. $\bar{a}\left(\frac{2}{x}; \frac{1}{y}; \frac{2}{z}\right)$ və $\bar{b}(x; 2y; z)$ vektorlarına baxaq.

Onda $\bar{a}\bar{b} = 2 + 2 + 2 = 6$, $|\bar{a}| = \sqrt{\frac{4}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{4}{z^2}} = \sqrt{9} = 3$,

$|\bar{b}| = \sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2} = \sqrt{4} = 2$. Beləliklə, $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|$, onda $\bar{a}, \bar{b}$ vektorları kollienardır, odur ki, onların koordinatları mütənasibdir:

$$\frac{2}{x} : x = \frac{1}{y} : 2y = \frac{2}{z} : z, \text{ buradan } x^2 = z^2 \text{ və } y^2 = \frac{x^2}{4}. \text{ Verilmiş}$$

$$\text{sistemin ikinci tənliyindən } x^2 + 4 \cdot \frac{x^2}{4} + x^2 = 4, \quad x^2 = \frac{4}{3}, \quad x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{alırıq. Odur ki, } y = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad z = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}. \text{ Bilavasitə yoxlama ilə müəyyən}$$

$$\text{olunur ki, } \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \text{ və } \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \text{ üçlükləri verilmiş}$$

sistemin həlləridir.

231. Verilmiş sistemi

$$\begin{cases} (x+2)(x+y+5) + (y+3)(y+z-1) = 0 \\ (x+2)(x+3) + (y+3)(3z-7) = 0 \\ 9(x+y+5)^2 + 9(y+z-1)^2 = (x+3)^2 + (3z-7)^2 \end{cases} \quad (1)$$

şəkildə yazaq. $\bar{a}(x+2; y+3)$, $\bar{b}(x+y+5; y+z-1)$, $\bar{c}(x+3; 3z-7)$ vektorlarına baxaq. Onda $\bar{a}\bar{b} = 0$, $\bar{a}\bar{c} = 0$, $9\bar{b}^2 = \bar{c}^2$.

$\bar{a} = 0$ isə, onda $x = -2, y = -3$ və (1) sisteminin üçüncü tənliyindən $z = \frac{47}{15}$ tapırıq. $\bar{a} \neq 0$, onda $\bar{b}, \bar{c}$ vektorları kollienardır,

odur ki, $\bar{c} = \pm 3\bar{b}$. İki hal mümkündür: 1) $\bar{c} = 3\bar{b}$, onda

$$\begin{cases} x+3 = 3(x+y+5) \\ 3z-7 = 3(y+z-1) \end{cases}; \begin{cases} 2x-3y = 12 \\ 3y = -4 \end{cases}, \text{ buradan } y = -\frac{4}{3}, x = -4. z -$$

in qiymətini verilmiş sistemin birinci tənliyindən tapırıq:

$$(-4+2)(-4+3) + \left(-\frac{4}{3}+3\right)(3z-7) = 0 \quad \text{və} \quad \text{ya}$$

$$2+5z = \frac{35}{3}; z = \frac{29}{15}. \quad 2) \quad \bar{c} = -3\bar{b}. \text{ Onda } \begin{cases} x+3 = -3(x+y+5) \\ 3x-7 = -3(y+z-1) \end{cases},$$

buradan $x = \frac{3z-14}{2}, y = \frac{10-6z}{3}$. Bu qiymətləri (1) sisteminin ikinci

tənliyində yerinə yazıb Z-in qiymətlərini tapırıq, lakin yoxlama ilə müəyyən edirik ki, alınan ədədlərin iki üçlüyü sistemin həlli deyil.

Beləliklə, iki $\left(-2; -3; \frac{47}{15}\right)$ və $\left(-4; -\frac{4}{3}; \frac{29}{15}\right)$ həlləri alınır.

232. $\bar{a}(x^n; y^n; z^n)$, $\bar{b}(x^{n+1}; y^{n+1}; z^{n+1})$ vektorlarına baxaq. Onda

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^{2n} + y^{2n} + z^{2n}} = \sqrt{3}, \quad |\bar{b}| = \sqrt{x^{2n+2} + y^{2n+2} + z^{2n+2}} = \sqrt{3},$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = 3, \text{ deməli } \bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|. \text{ Buradan alınır}$$

ki, $\bar{a}, \bar{b}$ vektorları arasındakı bucaq sıfır bərabərdir və 227-dəki (3)

şərtinə görə alırıq ki, $\bar{a} = \bar{b}$, yəni $x^n = x^{n+1}$, $y^n = y^{n+1}$, $z^n = z^{n+1}$, buradan isə sistemin yeganə həlli $(1; 1; 1)$ -dir.

233. Aşkırdır ki, $(0; 0; 0)$ sistemin həllidir. Fərz edək ki, $x \neq 0$; $y \neq 0$; $z \neq 0$. Onda sistemin I və III tənliklərinin hər birini

$$x^2 y^2 z^2 - a, \text{ II isə } xyz - a \text{ bölüb } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 3 \end{cases} \text{ alırıq. Bu}$$

sistemin isə həlli $(1; 1; 1)$ -dir. (232-yə baxmalı, $n = 1$)

234. $\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{2}$ düsturundan istifadə edərək sistemin
birinci tənliyini $-\cos x - \cos y - \cos z = 3$,
 $1 - \cos x + 1 - \cos y + 1 - \cos z = 6$,

$$\frac{1 - \cos x}{2} + \frac{1 - \cos y}{2} + \frac{1 - \cos z}{2} = 3 \quad \sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{y}{2} + \sin^2 \frac{z}{2} = 3$$

şəkildə yazaq. Sistemin ikinci tənliyini dəyişməyib, nəhayət üçüncünü sadələşdirək:

$$\cos^2 x - 2 \cos x + \cos^2 y - 2 \cos y + \cos^2 z - 2 \cos z = 9;$$

$$1 - 2 \cos x + \cos^2 x + 1 - 2 \cos y + \cos^2 y + 1 - 2 \cos z + \cos^2 z = 12;$$

$$\frac{(1 - \cos x)^2}{4} + \frac{(1 - \cos y)^2}{4} + \frac{(1 - \cos z)^2}{4} = 3,$$

$$\sin^4 \frac{x}{2} + \sin^4 \frac{y}{2} + \sin^4 \frac{z}{2} = 3$$

$$\text{Beləliklə, } \begin{cases} \sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{y}{2} + \sin^2 \frac{z}{2} = 3 \\ \sin^3 \frac{x}{2} + \sin^3 \frac{y}{2} + \sin^3 \frac{z}{2} = 3 \\ \sin^4 \frac{x}{2} + \sin^4 \frac{y}{2} + \sin^4 \frac{z}{2} = 3 \end{cases} .$$

232-dəki tənliklər sisteminin xüsusi halı olan ($n=1$, dəyişənlər $\sin \frac{x}{2}, \sin \frac{y}{2}, \sin \frac{z}{2}$) sistem alınır. Deməli $\sin \frac{x}{2} = \sin \frac{y}{2} = \sin \frac{z}{2} = 1$, buradan $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{z}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, x = \pi + 4\pi n, y = \pi + 4\pi k, z = \pi + 4\pi m$, burada $n, k, m \in \mathbb{Z}$. Deməli baxılan sistemin həlli $(\pi(4n+1); \pi(4k+1); \pi(4m+1))$ dir.

235. Verilmiş sistemin birinci iki tənliyinin həlli yalnız $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ üçlüyü olduğundan (227-yə baxmalı) bunun üçüncü tənliyin də həlli olduğunu yoxlamaq kifayətdir. Yoxlama ilə müəyyən edirik ki, $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ sistemin üçüncü tənliyinin də həllidir.

236. $\bar{a}(2^x; 2^y; 2^z), \bar{b}(1; 1; 1)$ vektorlarına baxaq. Onda $\bar{a} \cdot \bar{b} = 2^x + 2^y + 2^z = 6$ və $|\bar{a}| = \sqrt{(2^x)^2 + (2^y)^2 + (2^z)^2} = \sqrt{4^x + 4^y + 4^z} = 2\sqrt{3}, |\bar{b}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, deməli $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|$. 227-ci məsələnin həlli ilə əlaqədar göstərilən (3) şərtinə əsasən $\frac{2^x}{1} = \frac{2^y}{1} = \frac{2^z}{1}$, buradan $x = y = z$. Onda sistemin birinci tənliyindən $2^x + 2^x + 2^x = 6, 2^x = 2, x = 1$.

Beləliklə, $y = 1, z = 1$. $(1; 1; 1)$ üçlüyü sistemin üçüncü tənliyinin və sistemin həllidir.

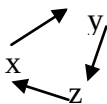
Vektorun tətbiqilə tənliklər sistemi həllinin aşağıdakı ümumi sxemini bilmək lazımdır.

- 1) $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarının daxil edilməsi
- 2) $\bar{a}, \bar{b}$ vektorlarının modulunu və onların skalyar hasilini hesablamaq.
- 3) 227 məsələsinin həlli ilə əlaqədar göstərilən (1) və (2) münasibətləri ilə şərtin ödənildiyini yoxlamaq.

4) yenə 227-də göstərilən (3) şərti ödənilirsə, onda $\bar{a} = \lambda \bar{b}$.

5) Cavabın yoxlanılması və yazılması. Bu sxem əsasında xətti olmayan tənliklər sisteminin vektorların skalyarhasilinin tətbiqi ilə həllinin bir ümumi metodunu şagirdlər öyrənirlər.

237. Bu sistemin mühüm xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, x, y, z dəyişənlərini



dövrü əvəz etdikdə yalnız tənliklərin yerinin dəyişməsindən başqa sözlə

$$\text{verilmiş sistemlə eyni olan} \quad \begin{cases} y^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \\ z^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \\ x^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \end{cases} \text{ tənliklər}$$

sistemi alınır. Odur ki, belə sistemə dövrü sistem deyilir. Dövrü sistemlərin müxtəlif həll üsulları vardır. Bunlardan biri verilən sistemi həll etmək üçün bütün dəyişənləri eyni $x = y = z = t$ götürməkdir.

Onda sistemin cırılşmış tənliyi adlanan $t^3 - 9t^2 + 27t - 27 = 0$ tənliyini alırıq. Buradan $(t - 3)^3 = 0$ və $t = 3$ tapırıq. Odur ki, $x = 3, y = 3, z = 3$ verilmiş sistemin yeganə həllidir. Bu həllin yeganə olduğunu göstərək. Bunun üçün əksini fərz etmə metodundan istifadə edək. Fərz edək ki, $(a; b; c)$ tapılandan fərqli hər hansı həldir. $x = a, y = b, z = c$ olduqda verilmiş sistemdən alınan tənliklərin sol və sağ tərəflərini toplayıb $(a - 3)^3 + (b - 3)^3 + (c - 3)^3 = 0$ (1) alırıq.

Yeni sistemə daxil olan tənliklərin hər birini isə $a = \sqrt[3]{9b^2 - 27b + 27}$, $b = \sqrt{9c^2 - 27c + 27}$, $c = \sqrt{9a^2 - 27a + 27}$ kimi yazmaq olar.

Qeyd edək ki, $g(t) = 9t^2 - 27t + 27 \geq \frac{27}{4} = g\left(\frac{3}{2}\right)$,

$$a = \sqrt[3]{g(b)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \quad b = \sqrt[3]{g(c)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \quad c = \sqrt[3]{g(a)} \geq \frac{3}{4}.$$

Fərziyyəyə görə $(a; b; c)$ həlli $(3; 3; 3)$ -dən fərqlidir, odur ki, a, b, c ədədlərindən heç olmasa biri 3-ə bərabər deyil. Fərz edək ki, $a \neq 3$. Onda $a \in \left(\frac{3}{\sqrt[3]{4}}; 3 \right)$ isə, onda $g(t)$ funksiyasının bu aralıqda monotonluğunu bilərək $c = \sqrt[3]{g(a)} < \sqrt[3]{g(3)} = 3$ və $b = \sqrt[3]{g(c)} < \sqrt[3]{g(3)} = 3$ alırıq. Lakin a, b, c -in belə qiymətlərində (1) bərabərliyi ödəmə bilməz. Beləliklə, $a < 3$ ola bilməz. $a > 3$ isə, onda $c = \sqrt[3]{g(a)} > \sqrt[3]{g(3)} = 3$, $b = \sqrt[3]{g(c)} > \sqrt[3]{g(3)} = 3$. Yenə (1) bərabərliyi ödənilmir. Odur ki, $(3; 3; 3)$ sistemin yeganə həllidir.

238. Göründüyü kimi əvvəlki sistem kimi $\begin{cases} x - y = \sin x \\ y - x = \sin y \end{cases}$ -də dövrü sistemdir. Odur ki, $x = y = t$ olarsa onda sistemin $\sin t = 0$ cırlaşmış tənliyi alınır. Bu tənliyin həlli $\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ədədi olduğundan $(\pi n; \pi n)$ baxılan sistemin həllidir. Göstərək ki, bu sistemin başqa həlli yoxdur. Fərz edək ki, $x = a, y = b$ sistemin həllidir, həm də $a \neq b$. Onda bu qiyməti sistemin tənliklərində yerinə yazıb, birinci tənliyin hədlərindən ikinci tənliyin hədlərini çıxıb

$$2(a - b) = \sin a - \sin b \Leftrightarrow a - b = \sin \frac{a - b}{2} \cos \frac{a + b}{2} \quad \text{alırıq.}$$

$$\left| \sin \frac{a - b}{2} \right| \leq \frac{|a - b|}{2} \quad \text{və} \quad \left| \cos \frac{a + b}{2} \right| \leq 1 \quad \text{olduğundan, sonuncu}$$

bərabərsizlikdən fərziyyəimizin əksinə olan $|a - b| \leq \frac{|a - b|}{2}$ alınır. Bu da onu göstərir ki, verilmiş sistemin həlli yalnız $(\pi n; \pi n), n \in \mathbb{Z}$ dir.

239. Sistemin $(1 + t)(1 + t^2)(1 + t^4) = 1 + t^7$ cırlaşmış tənliyindən (237, 238-ə baxmalı). Onun iki $t_1 = -1$ və $t_2 = 0$ həllini alırıq. Bu isə sistemin $(-1; -1)$ və $(0; 0)$ həllərinə uyğundur. Göstərək ki, baxılan sistemin başqa həlli yoxdur. Fərz edək ki, $(x; y)$ verilmiş sistemin həllidir və $x \neq -1, x \neq 0$. $x > 0$ isə, onda əvvəlcə birinci tənlikdən

$y > x$, sonra isə ikinci tənlikdən $-x > y$ alırıq, bu isə ola bilməz. $-1 < x < 0$ halına da baxaq. $1 + x > 0$ və $(1+x)x < 0$ olduğundan əvvəl birinci tənlikdən $1 + y^7 > 0 \Leftrightarrow y > -1$, sonra isə $(1+x)(1+x^2)(1+x^4) = x^7 + x(1+x)(1+x^2+x^4) < x^7$ olduğunu nəzərə almaqla $y^7 < x^7 \Leftrightarrow y < x$ bərabərsizliyini alırıq. $-1 < y < 0$ olduğundan, sistemin ikinci tənliyindən, əvvəlki mühakiməni təkrar etməklə $y^7 > x^7$ ziddiyyətinə gəlirik. Analoji olaraq $x < -1$ olduqda da ziddiyyət alınır. Beləliklə, verilmiş sistemin həlli yalnız $(-1; -1)$, $(0; 0)$ -dir.

240. Əvvəlcə ümumiləşdirməyə baxaq. Belə tənliklərin ümumi şəkli $\varphi(\varphi(x)) = x(A)$ -dir, burada $\varphi(x)$ hər hansı funksiyadır. Məktəb riyaziyyat kursunda ayrıca belə mövzu olmasa da ali məktəblərə qəbul imtahanlarında və olimpiadalarda $\varphi(\varphi(x)) = x$ şəkildə yazmaq mümkün olan tənliklər təklif olunur.

Məsələn

$$1) (x^2 - 5x + 5)^2 - 5(x^2 - 5x + 5) + 5 = x;$$

$$2) \sqrt[3]{\sqrt[3]{x+24}} = x;$$

$$3) \sin(\sin x) = x;$$

$$4) \sqrt{6 - 2\sqrt{6 - 2x}} = x$$

tənlikləri (A) şəkildə tənliklərdir. Doğrudan da 1) -4) tənliklərində uyğun olaraq $\varphi(x) = x^2 - 5x + 5$, $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+24}$, $\varphi(x) = \sin x$ (A) tənliyi ilə yanaşı $\varphi(x) = x$ (B) tənliyinə baxmaq olar. Aşkardır ki, (B) tənliyi (A)-dan sadədir. Odur ki, (A) tənliyini həll etmək üçün bu vəziyyətdən istifadə etmək lazımdır. Lakin əvvəlcə bunu aşağıdakı hökmlər vasitəsilə əsaslandırmaq lazımdır.

Teorem 1. (B) tənliyinin ixtiyari kökü (A) tənliyinin köküdür.

- Doğrudan da fərz edək ki, x_0 (B) tənliyinin həllidir. Onda $\varphi(x_0) = x_0$ ədədi bərabərliyi doğrudur. Bu bərabərliyin iki dəfə yazılması nəticəsində $\varphi(\varphi(x_0)) = \varphi(x_0) = x_0$, yəni $\varphi(\varphi(x_0)) = x_0$ alırıq. Bu isə o deməkdir ki, x_0 ədədi (A) tənliyinin köküdür. 1 teoremi

isbat olundu. Qeyd edək ki, burada və sonralar tənliyin yalnız həqiqi köklərinə baxılır.

Teorem 2. Fərz edək ki, $\varphi(x)$ funksiyası X çoxluğunda ciddi artır və ixtiyari $x_0 \in X$ üçün $\varphi(x_0) \in X$. Onda (A) və (B) tənlikləri X çoxluğunda eynigüclüdür.

- X çoxluğu $\varphi(x)$ funksiyasının təyin oblastı ilə üst-üstə düşə bilər, yaxud onun bir hissəsi olar. Yuxarıda göstəriləndi kimi (B) tənliyinin ixtiyari kökü (A) tənliyinin köküdür. İndi göstərək ki, $\varphi(x)$ funksiyası X çoxluğunda ciddi artırsa və ixtiyari $x_0 \in X$ üçün $\varphi(x_0) \in X$ isə onda (A) tənliyinin X çoxluğuna daxil olan ixtiyari kökü (B) tənliyinin köküdür. Fərz edək ki, $x_0 \in X$ ədədi (A) tənliyinin də köküdür, onda $\varphi(\varphi(x_0)) = x_0$ ədədi bərabərliyi də doğrudur. İsbat edək ki, onda $\varphi(x_0) = x_0$ ədədi bərabərliyi də doğrudur. Əksini fərz edək, yəni fərz edək ki, $\varphi(x_0) \neq x_0$. Onda $\varphi(x_0) > x_0$ isə $\varphi(x_0) \in X$ və $x_0 \in X$ olduğunu nəzərə alsaq $\varphi(x)$ funksiyasının X çoxluğunda artan olmasına əsasən alırıq ki, $\varphi(\varphi(x_0)) > \varphi(x_0)$ ədədi bərabərsizliyi doğrudur. Buradan $\varphi(x_0) > x_0$ ədədi bərabərsizliyindən istifadə etməklə $\varphi(\varphi(x_0)) > x_0$ alırıq ki, bu da $\varphi(\varphi(x_0)) = x_0$ şərtinə ziddir. $\varphi(x_0) < x_0$ isə onda $\varphi(x_0) \in X$ və $x_0 \in X$ olduğunu nəzərə alsaq $\varphi(x)$ funksiyası X çoxluğunda artan olduğundan alırıq ki, $\varphi(\varphi(x_0)) < \varphi(x_0)$ ədədi bərabərsizliyi doğrudur. Buradan alınır ki, $\varphi(\varphi(x_0)) < x_0$, bu isə $\varphi(\varphi(x_0)) = x_0$ şərtinə ziddir. Beləliklə, $\varphi(x_0) \neq x_0$ olması fərziyyəsi doğru deyil. Onda $\varphi(x_0) = x_0$ bərabərliyi doğrudur, başqa sözlə x_0 ədədi (B) tənliyinin köküdür. (A) və (B) tənliklərindən heç olmasa birinin, X çoxluğuna daxil olan, kökü yoxdursa, onda digər tənliyində həmin çoxluğa daxil olan kökü yoxdur. Doğrudan da fərz edək ki, (B) tənliyinin X çoxluğuna daxil olan kökü yoxdur. Onda fərz etsək ki, (A) tənliyinin $x_0 \in X$ kökü vardır və $\varphi(x_0) \in X$, onda yuxarıda göstəriləndi kimi (B) tənliyinin də həmin

kökü vardır, bu isə (B) tənliyinin kökünün olmaması şərtinə ziddir. Analoji olaraq, lakin 1 teoremindən istifadə etməklə isbat edilir ki, (A) tənliyinin X çoxluğuna daxil olan kökü yoxdursa, onda (B) tənliyinin də X çoxluğuna daxil olan kökü yoxdur. 2 teoremi tam isbat olundu. Qeyd edək ki, $\varphi(x)$ funksiyası X çoxluğunda ciddi artırsa və ixtiyari $x_0 \in X$ üçün $\varphi(x_0) \in X$ isə, onda $\varphi(x) = x$, $\varphi(\varphi(x)) = x$, $\varphi(\varphi(\varphi(x))) = x$ və s. Tənlikləri X çoxluğunda eynigüclüdür.

Təbii olaraq sual yaranır: 2 teoreminə analoji, lakin ciddi azalan $\varphi(x)$ funksiyası üçün hökm doğrudurmu?

$\varphi(x) = \sqrt[3]{1-x}$ funksiyasına baxaq. Bu funksiya R çoxluğunda ciddi azalandır və ixtiyari $x_0 \in R$ üçün $\varphi(x_0) \in R$. $\varphi(x) = x$ tənliyi $\sqrt[3]{1-x} = x$ şəkildədir. Bu tənlik isə, asanlıqla göstərmək olar ki, yeganə $x_0 \in (0;1)$ kökü olan, $x^3 + x - 1 = 0$ tənliyi ilə eynigüclüdür.

$\varphi(\varphi(x)) = x$ tənliyi $\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1-x}} = x$ şəkildədir. Onun kökləri arasında $\varphi(x) = x$ tənliyinin kökü olmayan 0 və 1 ədədləri vardır. Beləliklə, həmin funksiya üçün (A) və (B) tənlikləri eynigüclü deyildir. Deməli, ciddi azalan $\varphi(x)$ funksiyası üçün 2 teoreminə analoji olan (A) və (B) tənliklərinin eynigüclülüüyü haqqında hökm ümumiyyətlə doğru deyil.

İndi baxılan tənliyin 2 teoreminin tətbiqilə həllini vermək olar. $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+24}$ funksiyası R çoxluğunda ciddi artır və ixtiyari $x_0 \in R$ üçün $\varphi(x_0) \in R$. Onda 2 teoreminə əsasən $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x+24}} = x$ (1) tənliyi $\sqrt[3]{x+24} = x$ (1') ilə eynigüclüdür. (1') tənliyi isə $x^3 - x - 24 = 0$ tənliyi ilə eynigüclüdür. Sonuncu tənliyin isə yeganə $x_1 = 3$ kökü vardır. Beləliklə, onunla eynigüclü (1) tənliyinin də yeganə $x_1 = 3$ kökü vardır. Bu kökü Bezu teoreminin tətbiqi ilə yaxud sol tərəfi vuruqlarına ayırmaqla $(x^3 + 3x^2 - 3x^2 + 8x - 9x - 24) = 0$, $x^2(x-3) + 3x(x-3) + 8(x-3)$ tapmaq mümkündür.

Qeyd edək ki, şagirdlərin məktəbdə istifadə etdiyi ənənəvi yolla (1) tənliyinin hər tərəfini ardıcıl olaraq 3-cü dərəcədən qüvvətə yüksəltməklə $x^9 - 72x^6 + 1728x^3 - x - 13848 = 0$ tənliyini almaq olar ki, onun həlli yuxarıda göstərilənə nisbətən mürəkkəbdir. 1), 3), 4)

tənlikləri də uyğun olaraq $x^2 - 5x + 5 = x$, $\sin x = x$ (yeganə $x = 0$ kökü var). $\sqrt{6 - 2x} = x$ tənlikləri ilə eynigüclüdür. Bu tənliklərin həlli isə aşkardır.

241. $f(u) = u^{27}$ funksiyası R-də ciddi artan olduğundan, onda göstərilən fakta (teoremə) əsasən verilmiş tənlik (1) $\operatorname{arcctg}(x^2 + 1002) = \operatorname{arcctg}(2004x - 1001)$ (1') tənliyi ilə eynigüclüdür. $\varphi(u) = \operatorname{arcctg} u$ funksiyası R-də ciddi azaldığından, onda göstərilən fakta (teoremə) əsasən (1') tənliyi $x^2 + 1002 = 2004x - 1001$ (1'') tənliyi ilə eynigüclüdür. Bu tənliyin isə iki $x_1 = 1$ və $x_2 = 2003$ kökü vardır. (1'') tənliyi ilə eynigüclü olan verilmiş (1) tənliyinin də həmin kökləri vardır.

242. $f(u) = \left(\frac{1}{2}\right)^u$ funksiyası R-də ciddi azaldığından, onda 241-dəki fakta (teoremə) əsasən $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[3]{x^3 - x - 1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 3}}$ (1) tənliyi $\sqrt[3]{x^3 - x - 1} = \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 3}$ (1') ilə eynigüclüdür. $\varphi(u) = \sqrt[3]{u}$ funksiyası R-də ciddi artan olduğundan, 241-dəki fakta (teoremə) əsasən (1') tənliyi $x^3 - x - 1 = x^3 + x^2 - 3$ (1'') tənliyi ilə eynigüclüdür. Buradan $x_1 = -2$; $x_2 = 1$. (1'') tənliyi ilə eynigüclü olan (1) tənliyinin də kökləri -2 və 1 dir.

243. $f(u) = \arccos u$ funksiyasının varlıq oblastı $[-1; 1]$ aralığıdır. Burada funksiya ciddi azalır. Odur ki, göstərilən fakta (teoremə) əsasən baxılan (1) tənliyi $\begin{cases} x^2 - 8 = 9x - 26 \\ -1 \leq 9x - 26 \leq 1 \end{cases}$ (1') sistemi ilə eynigüclüdür. Verilən tənliyin və sistemin iki $x_1 = 3$; $x_2 = 6$ həlli vardır. Bunlardan ikiqat bərabərsizliyi yalnız $x_1 = 3$ ədədi ödəyir. Beləliklə (1') sistemin və onunla eynigüclü baxılan (1) tənliyin həmin kökü vardır.

244. Əvvəlcə göstərilən faktın (teoremin) isbatını verək. Fərz edək ki, x_0

$$\text{ədədi } \begin{cases} f(\alpha(x)) = f(\beta(x)) \\ \alpha(x) \in J \\ \beta \in J \end{cases} \quad (\text{A}) \text{ sisteminin həllidir. Bu o deməkdir}$$

ki, $u_1 = \alpha(x_0)$ və $u_2 = \beta(x_0)$ ədədi ifadələrinin mənası vardır, onlardan hər biri J aralığına daxildir və $f(u_1) = f(u_2)$. Göstərək ki, buradan $u_1 = u_2$ alınır. Fərz edək ki, $f(u)$ J aralığında ciddi artır. Onda $u_1 < u_2$ isə $f(u_1) < f(u_2)$, $u_1 > u_2$ isə, onda $f(u_1) > f(u_2)$ alınır ki, bu da $f(u_1) = f(u_2)$ -ə ziddir. Beləliklə, doğrudan da

$$u_1 = u_2, u_1 \in J, u_2 \in J \text{ olduğundan isə } x_0 \text{ ədədi } \begin{cases} \alpha(x) = \beta(x) \\ \alpha(x) \in J \\ \beta(x) \in J \end{cases} \quad (\text{B})$$

sisteminin həllidir.

Analoji olaraq göstərmək olar ki, $f(u)$ funksiyası J -də ciddi azalarsa, onda (A) sisteminin həlli olan x_0 ədədi (B) sisteminin həllidir. Yuxarıda deyilənlər onu göstərir ki, (A) sisteminin ixtiyari həlli (B) sisteminin həllidir. x_1 ədədi (B) sisteminin həllidirsə, onda bu o deməkdir ki, $u_1 = \alpha(x_1), u_2 = \beta(x_1)$ ədədi ifadələri J aralığına daxildir, bunun mənası vardır və $u_1 = u_2$. Lakin onda $f(u_1) = f(u_2)$. Beləliklə alırıq ki, $\alpha(x_1) \in J, \beta(x_1) \in J$ və $f(\alpha(x_1)) = f(\beta(x_1))$, bu isə o deməkdir ki, x_1 ədədi (A) sisteminin həllidir. Beləliklə göstərildi ki, (A) və (B) sistemlərindən heç olmasa birinin həllinin olması məlum olduğu halda onlar eynigüclüdür. Göstərək ki, (A) sisteminin həlli yoxdursa, onda (B) sisteminin də həlli yoxdur. Əksini fərz edək, yəni fərz edək ki, (B) sisteminin həlli vardır. Onda yuxarıdakı isbatə əsasən (A) sisteminin də həlli vardır, bu isə (A) sisteminin həlli olmaması şərtinə ziddir. Beləliklə, fərziyyəmiz doğru deyil, bu isə o deməkdir ki, (B) sisteminin həlli yoxdur. Analoji olaraq isbat etmək olar ki, (B) sisteminin həlli yoxdursa, onda (A) sisteminin də həlli yoxdur. Beləliklə, (A) və (B) sistemlərindən heç olmasa birinin həlli yoxdursa, onda bu sistemlər eynigüclüdür.

Göstərilən fakt (teorem) tam isbat olundu.

241, 243 məsələlərinin həlli ilə əlaqədar göstərilən faktların isbatı verilmədi, çünki onlar burada isbat edilənin xüsusi hallarıdır.

İndi verilən tənliyi həll etmək olar. $f_1(u) = u^{10} + u^{22}$ funksiyaya baxsaq, o özünün bütün R varlıq oblastında ciddi monoton deyildir, odur ki, 241, 243, 244-də göstərilən faktların (teoremlərin) heç birini ona tətbiq etmək olmaz. Lakin $\alpha(x) = (x^2 + 4x - 3)^2$, $\beta(x) = (x + 1)^2$, $f(u) = u^5 + u^{11}$ işarə etsək, onda alırıq ki, ixtiyari

$$x \in R \quad \text{üçün} \quad \alpha(x) \geq 0, \quad \beta(x) \geq 0, \quad \text{odur ki,} \\ (x^2 + 4x - 3)^{10} + (x^2 + 4x - 3)^{22} = (x + 1)^{10} + (x + 1)^{22} \quad (1) \quad \text{tənliyi} \\ \begin{cases} f(\alpha(x)) = f(\beta(x)) \\ \alpha(x) \geq 0 \\ \beta(x) \geq 0 \end{cases} \quad (1') \text{ sistemi ilə eynigüclüdür. } f(u) \text{ funksiyası}$$

$I = [0; +\infty)$ aralığında ciddi artır. Odur ki, məsələnin həllinin əvvəlində göstərdiyimiz fakta (teoremə) əsasən $(1')$ sistemi

$$\begin{cases} \alpha(x) = \beta(x) \\ \alpha(x) \geq 0 \\ \beta(x) \geq 0 \end{cases} \quad (1'') \text{ sistemi ilə eynigüclüdür. İxtiyari } x \in R \text{ üçün}$$

$\alpha(x) \geq 0, \beta(x) \geq 0$ olduğundan $(1'')$ sistemi $\alpha(x) = \beta(x)$ tənliyi ilə, yəni $(x^2 + 4x - 3)^2 - (x + 1)^2 = 0$ $(1''')$ tənliyi ilə eynigüclüdür. Beləliklə, verilmiş (1) tənliyi $(1''')$ ilə eynigüclüdür. Sonuncu tənliyi $(x^2 + 3x - 4)(x^2 + 5x - 2) = 0$ şəkildə yazmaq olar. Buradan isə

$x_1 = 1; \quad x_2 = -4; \quad x_3 = \frac{-5 - \sqrt{33}}{2}, \quad x_4 = \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}$ alırıq. Bu ədədlər baxılan tənliyin kökləridir.

245. $f(u) = \left(\frac{1}{2}\right)^u - u^{100}$ funksiyasının varlıq oblastı R -dir, bu çoxluqda

$f(u)$ ciddi monoton deyildir, odur ki, ona 241, 243, 244 məsələləri ilə əlaqədar göstərilən faktların (teoremlərin) heç birisi tətbiq edilə bilməz.

Lakin baxılan $\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\sin x} - (1 + \sin x)^{100} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\cos x} - (1 + \cos x)^{100} \quad (1)$

tənliyinin həlli ilə əlaqədar ixtiyari $x \in R$ üçün $1 + \sin x \geq 0$ və $1 + \cos x \geq 0$ (1') olduğunu bilərək $\alpha(x) = 1 + \sin x, \beta(x) = 1 + \cos x$

işarə edib alırıq ki, (1) tənliyi
$$\begin{cases} f(\alpha(x)) = f(\beta(x)) \\ \alpha(x) \geq 0 \\ \beta(x) \geq 0 \end{cases} \quad (1'') \text{ sistemi ilə}$$

eynigüclüdür. $J = [0; +\infty)$ aralığında $f(u)$ funksiyası ciddi azalandır.

Odur ki, 244 ilə əlaqədar göstərilən fakta (teoremə) əsasən (1'') sistemi

$$\begin{cases} \alpha(x) = \beta(x) \\ \alpha(x) \geq 0 \\ \beta(x) \geq 0 \end{cases} \quad (1''') \text{ sistemi ilə eynigüclüdür. (1') şərtini nəzərə alaraq}$$

müəyyən edirik ki, (1''') sistemi $\alpha(x) = \beta(x)$ və ya $1 + \sin x = 1 + \cos x$ tənliyi ilə eynigüclüdür. Bu

tənliyin isə həllər seriyası $x_k = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$ dir.

Beləliklə baxılan (1) tənliyinin kökü də $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$ olur.

246. 2 ± 0 olduğundan $2[x] = x$ tənliyinin hər tərəfini 2-yə bölüb $[x] = \frac{x}{2}$ alırıq. Ədədin tam hissəsinin tərifinə görə (həqiqi x ədədinin tam hissəsi $n \leq x$ olan ən böyük n ədədinə deyilir. Həqiqi x ədədinin tam hissəsi $[x]$ və ya $E(x)$ ilə işarə olunur. Yaxud hazırkı dərslikdəki tərif: hər bir x ədədinə $[x]$ ədədini qarşı qoyan funksiya x ədədinin tam hissəsi deyilir və $f(x) = [x]$ kimi işarə olunur). $\frac{x}{2} \in Z$, yəni

$\frac{x}{2} = n, n \in Z$, buradan $x = 2n$. $[x] = \frac{x}{2}$ tənliyinin sol tərəfində

$[x] = x - \{x\}$ bərabərliyini nəzərə alıb $x - \{x\} = \frac{x}{2}$, buradan $\{x\} = \frac{x}{2}$

yaza bilərik. Burada $\{x\}$ - həqiqi x ədədinin kəsr hissəsidir: həqiqi x

ədədinin kəsr hissəsi $x - [x]$ kəmiyyətinə deyilir və $\{x\}$ ilə işarə olunur. $\{x\}$ -in qiymətlər oblastı $[0;1)$ yarımintervalı olduğundan $\frac{x}{2} \in [0;1)$, yəni $x \in [0;2)$. $x \in Z$ olduğundan buradan verilmiş tənlik üçün $x = 0, x = 1$ alınır. Lakin $x = 2n$ olduğundan bu köklərdən yalnız $x = 0$ verilmiş tənliyi ödəyir.

247. $3 \neq 0$ olduğundan $3\{x\} = x$ tənliyinin hər tərəfini 3-ə bölüb $\{x\} = \frac{x}{3}$ alırıq. $\{x\}$ -in qiymətlər çoxluğu $[0;1)$, yəni $\{x\} \in [0;1)$ olduğundan $\frac{x}{3} \in [0;1)$, buradan $x \in [0;3)$. $\{x\} = x - [x]$ olduğunu bilərək $x - [x] = \frac{x}{3}$, buradan $\frac{2}{3}x = [x]$ alırıq. $[x] \in Z$ olduğundan $\frac{2}{3}x \in Z$, onda $\frac{2}{3}x = n, n \in Z$, buradan $x = \frac{3n}{2}$. Müəyyən edildiyinə görə $x \in [0;3)$ və $x = \frac{3n}{2}, n \in Z$, odur ki, verilmiş tənliyin həlli $x = 0, x = \frac{3}{2}$ -dir. Çünki $x = \frac{3n}{2}$ -in $[0;3)$ -ə daxil olması üçün $n = 0, n = 1$ ola bilər, onda $x = \frac{3n}{2}$ -dən $x = 0, x = \frac{3}{2}$ alınır.

248. $\{x\} \in [0;1)$ olduğundan, $5x + 2 \in [0;1)$ və ya $0 \leq 5x + 2 < 1$, buradan $x \in \left[-\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right)$. Tənliyin sol tərəfində $\{x\} = x - [x]$ yazıb $[x] = -4x - 2$ alırıq. $[x] \in Z$ olduğundan $-4x - 2 \in Z$, onda $-4x - 2 = n, x = -\frac{n+2}{4}$. $x \in \left[-\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right)$ və $x = -\frac{n+2}{4}$ olduğundan verilmiş tənliyin kökü $x = -\frac{1}{4}$ -dir.

249. İki hala baxaq:

1) $[x]-1 \geq 0$. Onda $|[x]-1| = [x]-1$ və bərabərsizlik $[x]-1 \geq 0$ şəklinə düşür. Onda $\begin{cases} [x] \geq 1 \\ [x] \geq 4 \end{cases}$ bərabərsizliklər sistemini və buradan

$x \in [4; +\infty)$ alırıq.

2) $[x]-1 < 0$. Onda $|[x]-1| = 1-[x]$ və bərabərsizlik $1-[x] \geq 3$ şəklə düşür. Onda $\begin{cases} [x] < 1 \\ [x] \leq -2 \end{cases}$ bərabərsizliklər sistemini və buradan

$x \in (-\infty; -1)$ alırıq.

Verilmiş bərabərsizlik $\begin{cases} [x]-1 \geq 3 \\ 1-[x] \geq 3 \end{cases}$ ilə ekvivalent olduğundan

$|[x]-1| \geq 3$ bərabərsizliyinin həlli $(-\infty; -1) \cup [4; +\infty)$ nöqtələr çoxluğudur.

250. Əvvəlcə isbat edək ki, $ab \geq 0$ isə $|a+b| = |a|+|b|$ bərabərliyi doğrudur. Doğrudan da bu bərabərliyin hər tərəfini kvadrata yüksəltdikdən sonra $|a+b|^2 = |a|^2 + 2|ab| + |b|^2$, $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2|ab| + b^2$, buradan $|ab| = ab$ alırıq. Sonuncu bərabərlik isə $ab \geq 0$ olduqda doğrudur. Bu faktı verilmiş tənliyə tətbiq etməklə deyə bilərik ki, x -in $(\sin x - 0,5)(0,5 - \log_2 x) \geq 0$ bərabərsizliyini ödəyən qiymətləri onun kökü olacaqdır. Alınmış bərabərsizlik iki $\begin{cases} \sin x - 0,5 \geq 0 \\ 0,5 - \log_2 x \geq 0 \end{cases}$,

$\begin{cases} \sin x - 0,5 \leq 0 \\ 0,5 - \log_2 x \leq 0 \end{cases}$ bərabərsizliklər sistemi ilə eynigüclüdür. Birinci

sistemin həlli $\left[\frac{\pi}{6}; \sqrt{2}\right]$ parçası, ikincinin həlli isə $\left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{13\pi}{6} + 2\pi k\right]$,

$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ şəklində parçaların birləşməsidir. Beləliklə, verilmiş tənliyin həlli: $\left[\frac{\pi}{6}; \sqrt{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{13\pi}{6} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ -dir.

251. İxtiyari iki müxtəlif $y = x^2 + mx + m^2$ və $y = x^2 + nx + n^2$ parabola yeganə nöqtədə $(x = -m - n, y = m^2 + m^2 + mn)$ kəsişir. Onda tələb edilən mümkündürsə parabolaların kəsişmə nöqtələrinin

miqdarı parabolalar cütünün sayına bərabər olmalıdır. Parabolaların sayı k olarsa onda şərtə görə $\frac{k(k-1)}{2} = 2013$. Bu isə mümkün deyil, çünki 2013 sadə ədəddir.

252. $x^2 + px + 100$ üçhədlinin diskriminantı $D = p^2 - 400$ -dir. $|p| > 20$ olduqda $D > 0$, $p = \pm 20$ olduqda $D = 0$. Beləliklə, $|p| > 20$ olduqda alınmış üçhədlilərin hər birinin iki kökü, $p = \pm 20$ olduqda isə hər birinin bir kökü vardır. Qeyd edək ki, Viyet teoreminə görə $x^2 + px + 100$ kvadrat üçhədlisinin iki həqiqi kökünün cəmi p -yə bərabərdir. Onda p -yə uyğun olaraq alınmış bütün kvadrat üçhədlilərin kökləri cəmi $100 + 99 + 98 + \dots + 22 + 21 + 20 + (-20) + (-21) + (-22) + (-98) + (-99) + (-100) = 0$ olar.

253. Göründüyü kimi baxılan tənliyə daxil olan funksiyanı tapmaq tələb olunur [13]. $2f(x) + f(1-x) = x^2$ (1) şərti funksional tənlik adlanır. Funksional tənliklər müxtəlif üsullarla həll edilir. Bu üsullardan biri qeyri-müəyyən əmsallar metodudur. Funksional tənliyin xarici formasına görə axtarılan funksiyanın ümumi şəklini müəyyən etmək mümkün olduqda onu tətbiq etmək olar. Funksional tənliyin həlli tam və ya kəsir-rasional funksiyalar içərisində axtarılan hallarda qeyri-müəyyən əmsallar metodundan daha çox istifadə olunur. (1) bərabərliyi funksional tənlikdir. Məktəbdə bu istilah işlədilmədiyindən onu başqa sözlə şərt adlandırmaq olar. (1) tənliyinin sol tərəfində asılı olmayan x dəyişəni və f funksiyasının qiymətləri üzərində yalnız xətti əməliyyat aparıldığından, sağ tərəfdə isə kvadrat funksiya olduğundan axtarılan funksiyanın da $f(x) = ax^2 + bx + c$ şəkildə kvadrat funksiya olduğunu güman etmək təbiidir. Burada a, b, c qeyri-müəyyən əmsallardır, onları tapmaq lazımdır. Həmin funksiyanı (1) tənliyində yerinə yazıb $2(ax^2 + bx + c) + a(1-x)^2 + b(1-x) + c = x^2 \Leftrightarrow 3ax^2 + (b-2a)x + (a+b+3c) \equiv x^2$ eyniliyini alırıq. Dəyişənin eyni qüvvətlərinin əmsalları bərabər olan iki çoxhədli eyniliklə

bərabərdir: $\begin{cases} 3a=1 \\ b-2a=0 \\ a+b+3c=0 \end{cases}$. Bu sistemdən $a=\frac{1}{3}; b=\frac{2}{3}; c=\frac{1}{3}$ alınır.

Onda funksional tənliyin həlli $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-1)$ olar. İsbat edək ki, başqa həll yoxdur. Fərz edək ki, $g(x)$ funksiyası da həqiqi ədədlər çoxluğunda (1) bərabərliyini ödəyir. Onda elə $x_0 \in R$ vardır ki, $g(x_0) \neq f(x_0)$. Onda $x=x_0$, $x=1-x_0$ olduqda $2g(x_0)+g(1-x_0)=x_0^2$, $2g(1-x_0)+g(x_0)=(1-x_0)^2$ bərabərlikləri ödənilməlidir. Buradan isə alınır ki, $g(x_0)=\frac{1}{3}(x_0^2+2x_0-1)=f(x_0)$. Deməli, $g(x_0)=f(x_0)$. Alınan ziddiyyət fərziyəni inkar edir. Beləliklə, məsələni yeganə həlli vardır.

254. Həllin iki üsulunu göstərək.

I. 1) $[-1;3]$ parçasının uclarında funksiyanın qiymətləri $y(-1)=15, y(3)=23$;

2) $(-1;3)$ intervalında böhran nöqtəsi $y'=0$ tənliyindən $x_1=\frac{3}{4}$ tapılır ($x_1 \in (-1;3)$). Onda $y\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{11}{4}$.

3) $y_{\min} = \min\left\{\frac{11}{4}; 15; 23\right\} = \frac{11}{4}$; $y_{\max} = \max\left\{\frac{11}{4}; 15; 23\right\} = 23$;

4) $E(y) = \left[\frac{11}{4}; 23\right]$. Bu funksiyanın qiymətlər çoxluğu.

II. Tam kvadrat ayırmaqla məsələni asanlıqla həll etmək olar: $y = 4\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{11}{4}, x \in [-1;3]$. Parabolanın təpə nöqtəsinin absisi $x = \frac{3}{4}$ ədədi $(-1;3)$ intervalına daxil olduğundan, parabolanın qolları isə yuxarı yönəldiyindən $y_{\min} = y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{11}{4}$. Ən böyük $y_{\max}$ qiyməti $[-1;3]$ parçasının uclarından birində alınır. $x=3$ nöqtəsi parabolanın təpə nöqtəsinin absisindən uzaqda yerləşdiyindən $y_{\max} = y(3) = 23$.

255. Həllin iki üsulunu göstərək:

I. Verilmiş kəsir-rasional funksiya $x = -2$ və $x = 1$ nöqtələrindən

fərqli bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x - 2}$ düzgün

olmayan kəsrdir. Tam hissəni ayıraraq $y = 1 + \frac{3}{x^2 + x - 2}$ alırıq.

$t = x^2 + x - 2$, $p = \frac{3}{t}, y = 1 + p$ işarə edək. Onda verilmiş funksiyanı üç

funksiyanın kompozisiyası $y = y(p(t(x)))$ şəklində göstərə bilərik. Bundan sonra hər bir elementar funksiyanın onların daxil olma ardıcılığında qiymətlər çoxluğunu tapaq. Onda birinci $t(x)$ funksiyanın $E(t)$ qiymətlər çoxluğu $p(t)$ funksiyanın $D(p)$ təyin oblastı olacaqdır ($p(t)$ funksiyanın təyin olmadığı nöqtələr müstəsna olmaqla); analogi olaraq $E(p) \subseteq D(y)$.

$$1) t = x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow E(t) = \left[-\frac{9}{4}; +\infty\right);$$

$$2) p = \frac{3}{t}, t \in \left[-\frac{9}{4}; 0\right) \cup (0; +\infty).$$

Bilmək lazımdır ki, $p(t)$ funksiya verilmiş funksiyanın dəyişmə oblastının hər bir aralığında monoton azalandır, odur ki, $E(p) = \left(p(0-); p\left(-\frac{9}{4}\right) \cup p(+\infty); p(0+)\right)$ və ya $E(p) = \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup (0; +\infty)$. Burada $p(0-), p(+\infty), p(0+)$ işarələri uyğun olaraq limitləri əvəz edir.

Məsələn, $p(0-) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3}{t}$.

$$3) y = 1 + p, p \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right] \cup (0; +\infty) \Rightarrow E(y) = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty).$$

Deməli verilmiş funksiyanın qiymətlər çoxluğu $E(y) = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty)$ -dir.

II. Verilmiş funksiyanı qeyri-müəyyən şəkildə $(y-1)x^2 + (y-1)x - 2y - 1 = 0$ kimi yazmaq olar. Buradan

$$x = \frac{y-1 \pm \sqrt{9y^2 - 6y - 3}}{y-1}; \quad y-1 \neq 0, \quad 9y^2 - 6y - 3 \geq 0 \quad \text{sistemindən} \quad (y_1 = 1; y_2 = -\frac{1}{3})$$

tapandan sonra) verilmiş funksiyanın dəyişmə oblastının $(-\infty; -\frac{1}{3}] \cup (1; \infty)$ olduğunu alırıq.

$$256. \quad \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = u, \quad \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} = v \quad \text{olsun.} \quad \text{Onda} \quad \begin{cases} u+v=2 \\ u^4+v^4=2 \end{cases},$$

$$2u^2v^2 - 16uv + 14 = 0, \quad u^2v^2 - 8uv + 7 = 0, \quad uv = 4 \pm 3;$$

$$\begin{cases} uv=1 \\ u+v=2 \end{cases} \Rightarrow u=v=1. \quad \begin{cases} uv=7 \\ u+v=2 \end{cases} \quad \text{sisteminin isə həqiqi kökü yoxdur.}$$

Beləliklə $1 + \sqrt{1-x^2} = 1$ (1) tənliyini və buradan $x = \pm 1$ alırıq. Məsələnin həllindən görünür ki, (1) verilmiş tənlikdə eynigüclüdür. Lakin bu eynigüclülüüyü əsaslandırmaq lazımdır. Belə əsaslanma mümkündür. Bunun üçün $f(x) = \sqrt[5]{x}$ funksiyanın $[0; \infty)$ -da yuxarıdan qabarıqlığının tərifini, habelə müvafiq teoremlərin isbatını vermək lazımdır. Bu halda verilmiş tənliyi şifahi həll etmək olardı.

Onu da qeyd edək ki, $f(x)$ funksiya verilmiş aralıqda iki dəfə diferensiallanadırsa və x -in həmin aralıqdan götürülmüş bütün qiymətlərində $f''(x) > 0$ isə onda $f(x)$ bu aralıqda aşağıdan ciddi qabarıqdır.

257. Verilmiş funksiyanın təyin oblastı $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, yəni sıfırdan fərqli bütün həqiqi ədədlərdir. $E(f)$ dəyişmə oblastını tapmaq üçün beş hala baxaq:

$$1) \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} < 0 \\ 1 + 2x < 0 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} < 0 \\ 1 + 2x > 0 \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} > 0 \\ 1 + 2x < 0 \end{cases}; \quad 4) \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} > 0 \\ 1 + 2x > 0 \end{cases}; \quad 5) \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} < 0 \\ 1 + 2x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Fərz edək ki, 1) sistemi ödənilir: } \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} < 0 \\ 1 + 2x < 0 \end{cases}. \quad \text{Bu halda } -1 < x < -\frac{1}{2} \quad \text{və}$$

$$A(x) < 0, \quad \text{burada} \quad A(x) = \arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \arctg(1 + 2x). \quad \text{Onda } x\text{-in}$$

$\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ aralığından götürülmüş bütün qiymətlərində $2 + 2x + \frac{1}{x} < 0$ olduğundan

$$tgA(x) = \frac{1 + \frac{1}{x} + 1 + 2x}{1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)(1 + 2x)} = \frac{2 + 2x + \frac{1}{x}}{-2 - 2x - \frac{1}{x}} = -1.$$

Deməli, $A(x) = -\frac{\pi}{2}$ və $f(x) = \arctg 1 + A(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$. İndi 2)

sisteminin ödənilməsi halına baxaq: $\begin{cases} 1 + \frac{1}{x} < 0 \\ 1 + 2x > 0 \end{cases}$. Bu halda $-\frac{1}{2} < x < 0$ və

$B(x) > 0$, burada $B(x) = \arctg 1 + \arctg(1 + 2x)$.

$tgB(x)$ -i hesablayaq: $tgB(x) = \frac{1 + 1 + 2x}{1 - 1(1 + 2x)} = \frac{2 + 2x}{-2x} = -\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Deməli, $B(x) = -\arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ və

$f(x) = \arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right) + B(x) = \arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$

3) halına baxaq: $\begin{cases} 1 + \frac{1}{x} > 0 \\ 1 + 2x < 0 \end{cases}$. Burada $x < -1$ və $c(x) > 0$,

$c(x) = \arctg 1 + \arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. $tg c(x) = \frac{1 + 1 + \frac{1}{x}}{1 - 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{2 + \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}} = -(1 + 2x)$, deməli,

$C(x) = -\arctg(1 + 2x)$ və $f(x) = C(x) + \arctg(1 + 2x) = -\arctg(1 + 2x) + \arctg(1 + 2x) = 0$.

4) halında $\begin{cases} 1 + \frac{1}{x} \\ 1 + 2x > 0 \end{cases}$ sistemi ödənilməlidir. Burada $x > 0$,

$D(x) > 0$,

$D(x) = \arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \arctg(1 + 2x)$;

$tgD(x) = \frac{1 + \frac{1}{x} + 1 + 2x}{1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)(1 + 2x)} = \frac{2 + 2x + \frac{1}{x}}{-2 - 2x - \frac{1}{x}} = -1$. Onda $D(x) = \frac{3\pi}{4}$ və

$f(x) = \arctg 1 + D(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$.

5) halında $x = -1$ və ya $x = -\frac{1}{2}$. $x = -1$ isə, onda

$$f(-1) = \arctg 1 + \arctg \left(1 + \frac{1}{-1}\right) + \arctg(1 + 2(-1)) = 0. \quad x = -\frac{1}{2} \text{ isə, onda}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \arctg 1 + \arctg \left(1 + \frac{1}{-\frac{1}{2}}\right) + \arctg \left(1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0. \quad \text{Beləliklə, } x < 0$$

olduqda $f(x) = 0$, $x > 0$ olduqda $f(x) = \pi$.

İndi baxılan funksiyanın dəyişmə oblastını asanlıqla yazmaq olar:
 $E(f) = \{0; \pi\}$.

258. Verilmiş tənlikdə kosinusu sinusla ifadə edək:
 $4\sin^3 x = a - 7\cos 2x$; $4\sin^3 x = a - 7(1 - 2\sin^2 x)$; $4\sin^3 x - 14\sin^2 x + 7 = a$.
 Yalnız a ədədi $4\sin^3 x - 14\sin^2 x + 7$ ifadəsinin qiymətlər çoxluğuna daxil olmadıqda alınmış sonuncu tənliyin həlli olmaz.
 $y = 4\sin^3 x - 14\sin^2 x + 7$ ifadəsinin qiymətlər çoxluğunu tapaq. $t = \sin x$ olsun, burada $t \in [-1; 1]$. $y = 4t^3 - 14t^2 + 7$ funksiyaının $[-1; 1]$ parçasında $E(y)$ qiymətlər çoxluğunu tapaq. Bunun üçün əvvəlcə onun törəməsini tapaq: $y' = 12t^2 - 28t = 4t(3t - 7)$. Onda $t = 0$ və $t = \frac{7}{3}$ olduqda $y' = 0$. Standart alqoritmindən istifadə edərək $y(x)$ funksiyaını $[-1; 1]$ parçasında artma və azalma aralıqlarını müəyyən edək.

	-1	(-1; 0)	0	(0; 1)	1
y'		+	0	-	
y	-11		7		-3

Beləliklə, $[-1; 1]$ parçasında kəsilməyən $y = 4t^3 - 14t^2 + 7$ funksiyaı əvvəlcə -11-dən 7-yə (7 ədədi maksimum deyil) qədər artır, sonra isə 7-dən -3-ə qədər azalır. Deməli, $-1 \leq t \leq 1$ olduqda $E(y) = [-11; 7]$. Buradan alınır ki, verilmiş $\sin^3 x - 14\sin^2 x + 7 = a$

tənliyinin a -in $[-11; 7]$ parçasının xaricində yerləşən qiymətlərində kökü yoxdur. Yəni $a \in (-\infty; -11) \cup (7; \infty)$.

259. Köməkçi argument daxil etmək metodundan istifadə ilə

$$2\left(\frac{1}{2}\cos 7x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x\right) = -\sqrt{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3}\cos 7x - \sin \frac{\pi}{3}\sin 7x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\left(7x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \begin{cases} x = \frac{5\pi}{84} + \frac{2\pi m}{7}, m \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{13\pi}{84} + \frac{2\pi m}{7}, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{alırıq. Əvvəl birinci}$$

seriyadan göstərilən intercala daxil olan kökü müəyyən edirik: $\frac{2\pi}{5} < \frac{5\pi}{84} + \frac{2\pi m}{7} < \frac{6\pi}{7}, 1\frac{23}{120} < n < 2\frac{19}{24}$, aşkardır ki, $n = 2$, onda

$$x = \frac{5\pi}{84} + \frac{2\pi \cdot n}{7} = \frac{53}{84}\pi. \text{ İkinci seriyadan göstərilən intervala daxil olan}$$

kökü seçirik: $\frac{2\pi}{5} < -\frac{13\pi}{84} + \frac{2\pi m}{7} < \frac{6\pi}{7}, 1\frac{23}{120} < m < 3\frac{13}{24}$, buradan $m = 2$

və ya $m = 3$. Onda m -in bu qiymətlərində $x = -\frac{13\pi}{84} + \frac{2\pi \cdot 2}{7} = \frac{35\pi}{84}$ və ya

$$x = \frac{13\pi}{84} + \frac{2\pi \cdot 3}{7} = \frac{59}{84}\pi.$$

Deməli verilmiş tənliyin göstərilən intervala daxil olan kökləri $\frac{53}{84}\pi, \frac{35}{84}\pi, \frac{59}{84}\pi$ -dir.

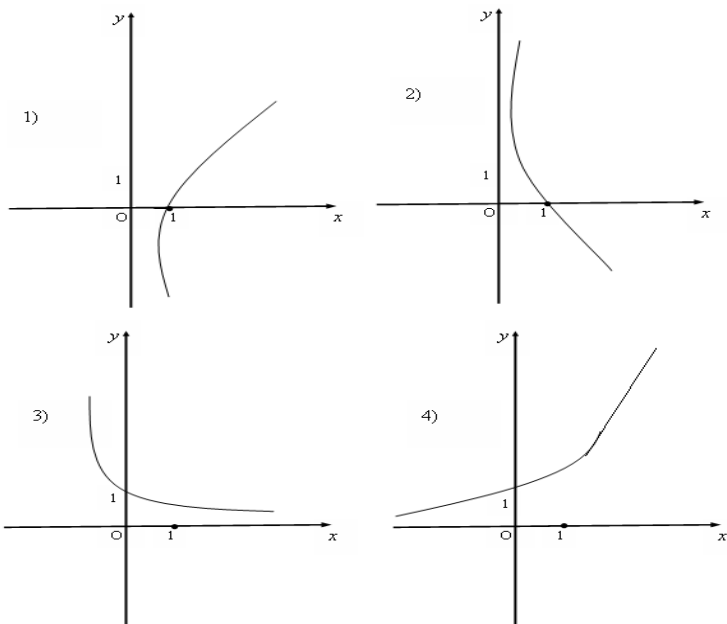
260. Bəzi triqonometrik tənlikləri həll etmək üçün $\sin x$ və $\cos x$ funksiyalarının məhdudluğundan istifadə etmək münasib olur. Verilən tənliyin həllində bu üsuldən istifadə olunur. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

olduğundan, onda $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ -dən istifadə edib $\sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$

və beləliklə $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \sqrt{2} \leq \sqrt{2}$, buradan $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \leq 0$ yazarıq. Verilmiş

tənliyin kökü varsa, onda $x - \frac{\pi}{4} = 0, x = \frac{\pi}{4}$ olması zəruridir (lakin kafi

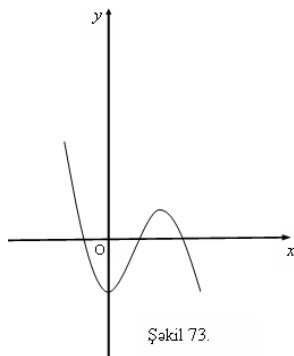
deyil). $x = \frac{\pi}{4}$ qiymətini bilavasitə verilmiş tənlikdə yerinə yazmaqla müəyyən edilir ki, bu ədəd onun köküdür.



Şəkil 72.

261. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ funksiyası bütün

təyin oblastında təyin olunmuşdur (çünki qüvvətin əsası 1-dən kiçikdir), yəni x argumentinin qiyməti artırıldıqda funksiyanın qiyməti azalır. Funksiya yalnız müsbət qiymətlər alır, başqa sözlə qrafik absis oxundan yuxarıda yerləşir. Bu çalışmanı monotonluğu və işarə sabitliyini araşdırmadan da yerinə yetirmək olar.

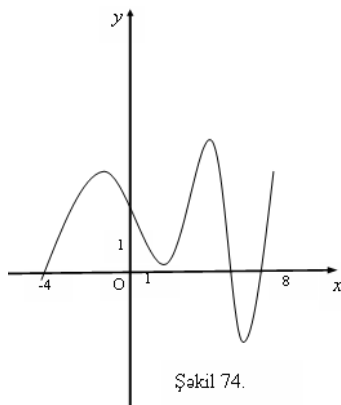


Şəkil 73.

Qrafikin $(-1; 3)$, $(0; 1)$ və $\left(1; \frac{1}{3}\right)$ nöqtələrdən keçdiyini yoxlamaq kifayətdir (Şəkil 72).

262. Funksiyanın qiymətlər çoxluğu qrafikin bütün nöqtələrinin ordinatıdır. Verilmiş halda bu $(-3; 4)$ intervalıdır (Şəkil 73).

263. Verilmiş aralıqda arqumentin iki qiyməti üçün arqumentin böyük qiymətinə funksiyanın böyük qiyməti uyğun olarsa $y = f(x)$ funksiyası bu aralıqda artır. Bu aralığa uyğun olaraq absis oxu boyunca soldan sağa hərəkət zamanı qrafikin bir hissəsi “yuxarı yönəlir”. Analoji olaraq funksiyanın aralıqda azalması müəyyən edilir: Arqument artdıqda funksiyanın qiyməti azalır. (qrafik “aşağı yönəlir”). Göstərilən 74-cü şəkildə funksiya iki aralıqda azalır: $[-1; 2]$ və $[4; 6]$.

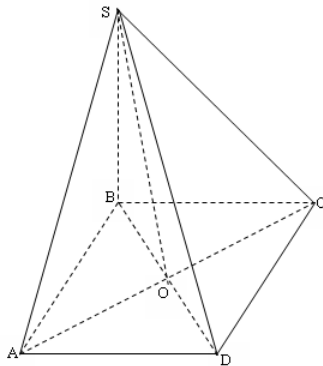


Şəkil 74.

264. $y = 3 \ln x + 5,2$ funksiyanın qrafikinə absisi $x_0 = 6$ olan nöqtədə toxunanın bucaq əmsalı bu funksiyanın törəməsinin $x_0 = 6$ olduqda aldığı qiymətdir. Verilmiş funksiyanın törəməsi $y' = \frac{3}{x}$ -dir.

Onda $y'(6) = 0,5$.

265. $y = f(x)$ funksiyanın törəməsinin x_0 nöqtəsindəki qiyməti bu funksiyanın qrafikinə absisi $x_0 = 2$ olan nöqtədə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalına bərabərdir, yəni $f'(2) = 3$.



Şəkil 75.

266. Absis oxuna paralel düz xəttin toxunanı $y = a$ tənliyi ilə verilir, burada a hər hansı ədəddir. Bu tənliyi $y = 0 \cdot x + a$ şəkildə yazmaq olar. Deməli absis oxuna paralel düz xəttin bucaq əmsalı sıfıra bərabərdir. Onda absis oxuna paralel və $M(x_0; y_0)$ nöqtəsindən keçən toxunanın da bucaq əmsalı sıfıra bərabərdir. Deməli, törəmənin x_0 nöqtəsindəki qiyməti də sıfırdır. Verilmiş funksiyanın törəməsi

$f'(x) = 6x + 15$ olduğundan $6x + 15 = 0$, $x = -2,5$. Deməli M nöqtəsinin absisi $-2,5$ -dir.

267. Verilmiş düz xəttin bucaq əmsalı 2-yə bərabərdir, deməli bu düz xəttə paralel olan toxunanın da bucaq əmsalı 2-dir. Funksiyanın qrafikinə toxunanın bucaq əmsalı bu funksiyanın törəməsinin toxunma nöqtəsindəki qiymətinə bərabər olduğundan $y' = 2$ tənliyini alırıq.

$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ -dir. Onda $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 2$ tənliyindən toxunma nöqtəsinin absisini $x = \frac{1}{27}$ tapırıq.

268. Piramidanın oturacağının tərəfi x olsun, onda ASB üzünün perimetri p olduğundan piramidanın yan tillərinin hər birinin uzunluğu

$$\frac{p-x}{2}, \quad \text{hündürlüyü} \quad \sqrt{\frac{(p-x)^2}{4} - \frac{x^2}{2}} = \frac{\sqrt{p^2 - 2px - x^2}}{2}, \quad \text{həcmi isə}$$

$$V = \frac{1}{3}x^2 \cdot \frac{\sqrt{p^2 - 2px - x^2}}{2} \text{ olar (Şəkil 75).}$$

$f(x) = x^2 \sqrt{p^2 - 2px - x^2} = \sqrt{p^2 x^4 - 2px^5 - x^6}$ funksiyasını araşdırmaq lazımdır. Piramidanın həcmi x -in, alınmış funksiya ən böyük qiymət aldığı qiymətində, ən böyük olacaqdır. $y = \sqrt{x}$ artan funksiya olduğundan, $y = \sqrt{p^2 x^4 - 2px^5 - x^6}$ funksiyası kökün altındakı ifadənin ən böyük qiymətində tələb olunan qiyməti alır. Kökün altındakı ifadənin törəməsi $(p^2 x^4 - 2px^5 - x^6)' = 4p^2 x^3 - 10px^4 - 6x^5 = 2x^3(2p^2 - 5px - 3x^2)$ -dir. $x > 0$ olduğundan (tilin uzunluğu) törəmə yalnız $x = \frac{p}{3}$ olduqda sıfıra bərabər olur və bu nöqtədə işarəsini müsbətdə mənfியə dəyişir.

$$\text{Doğrudan da } 3x^2 + 2px - 2p^2 = 0, \quad x = \frac{p}{3}. \text{ Onda } \frac{p-x}{2} = \frac{p - \frac{p}{3}}{2} = \frac{p}{3}.$$

Deməli, hər bir tillərinin uzunluğu $\frac{p}{3}$ olan piramidanın həcmi ən böyük olar.

269. Maddi nöqtənin $V(t)$ sürəti onun $x(t)$ koordinatının törəməsidir. Deməli $x(t)$ funksiyası törəməsinin $t=2$ nöqtəsində qiymətini tapmaq lazımdır: $V(t) = x'(t) = 2t - e^{2-t}$; $V(2) = 2 \cdot 2 - e^0 = 3$.

270. Kvadrat kökün tərifinə uyğun olaraq verilmiş funksiyanın təyin oblastı $\frac{\sqrt[4]{x-5}}{14x-48-x^2} \geq 0$ bərabərsizliyin həllindən alınır. Bu bərabərsizlik isə aşağıdakı sistemlərlə eynigüclüdür:

$$\begin{cases} x-5 > 0 \\ 14x-48-x^2 > 0 \end{cases} \text{ və ya } \begin{cases} x-5 = 0 \\ 14x-48-x^2 > 0 \end{cases}$$

Birinci sistemin həlli $(5; +\infty)$ və $(6; 8)$ çoxluqlarının kəsişməsidir, yəni $(6; 8)$ aralığıdır. İkinci sistemin həlli isə 5 ədədidir. Beləliklə, baxılan sistemlər məcmusunun həlli $\{5\} \cup (6; 8)$ çoxluğudur. Bu çoxluqda isə yalnız iki tam ədəd vardır: 5 və 7.

271. Piyadanın sürəti $\frac{1}{10} \cdot 40 = 4 \text{ (km/s)}$ -dir. Fərz edək ki, motosikletçi məntəqələr arasındakı məsafəni x saata gedə bilər, onda piyada həmin məsafəni $(x+4,5)$ saata gedər. Beləliklə, piyada və motosikletçi uyğun olar $4(x+4,5)$ km və $40x$ km məsafələri qət edirlər. Şərtə görə bu məsafələr bərabərdir, odur ki, $4(x+4,5) = 40x$, buradan $x = 0,5$ alınır. Beləliklə, iki məntəqə arasındakı məsafə $0,5 \cdot 40 = 20 \text{ (km)}$ -dir.

272. Bu məsələni həll edərkən necə isə iki yol sahəsinə baxmaq faydalıdır: planlaşdırılmış və real. Təbii ki, onlar uzunluqca bərabərdir, lakin onları keçməyə sərf edilən vaxt və sürətlər fərqlidir. Plana görə sərf edilən 2 saatdakı sürəti $x \text{ km/s}$ olsun, Onda məsafə $2x$ olar.

Reallıqda isə sürət $(x+3) \text{ km/s}$, vaxt $1\frac{2}{3} \text{ s}$, deməli məsafə $\frac{5}{3}(x+3) \text{ km}$. Real olaraq gedilən yolun uzunluğu planlaşdırılmışla

eynidir. Odur ki, $2x = \frac{5}{3}(x+3)$ və buradan $x = 15$. Beləliklə,

velosipedçi 2 saatda 15 km/s sürətlə $2 \cdot 15 = 30(km)$ məsafəni qət etməli idi.

273. Hərəkətdəki dəyişiklik dayanma anında başlandı. Avtobus yolun $\frac{5}{6}$ -ni getdikdən sonra yolun $\frac{1}{6}$ hissəsi qalmışdır. Yolun bu hissəsinin gedilməsi üçün sərf olunan vaxtı x s. ilə işarə edək. Onda əvvəldən nəzərdə tutulan sürətlə getməli olan yol $50x km$ olar.

Avtobus $\frac{3}{60} = \frac{1}{20}$ saat dayandığından yolun qalan hissəsinin

gedilməsinə $\left(x - \frac{1}{20}\right)$ saat sərf etmişdir, onda həqiqi qalan yol

$60\left(x - \frac{1}{20}\right) km$ -ə bərabərdir. Məsələnin şərtinə görə planlaşdırılmış

məsafə ($50x km$), həqiqətən gedilmə $\left[60\left(x - \frac{1}{20}\right) km\right]$ bərabərdir.

Beləliklə, $60\left(x - \frac{1}{20}\right) = 50x$ tənliyini və buradan $x = 0,3(saatt)$

alırıq. Deməli yolun $\frac{1}{6}$ hissəsi $50 \cdot 0,3 = 15(km)$ və ya

$60\left(x - \frac{1}{20}\right) = 15(km)$ -dir, onda bütün yol $15 \cdot 6 = 90(km)$ olur.

Deməli avtobus cəmisi 90 km yol getmişdir.

274. Təkrar məqsədilə birlikdə hərəkətə aid belə məsələlər həll etmək məsləhətdir. Birlikdə hərəkət bərkən avtobusun çıxması anından başlayır. Bu vaxta qədər Zaqataladan çıxan maşın

$70 \cdot \frac{5}{3} = \frac{350}{3}(km)$ yol getmişdir və maşınlar arasındakı məsafə

$420 - \frac{350}{3} = \frac{910}{3}(km)$ olmuşdur. Maşınlar aralarındakı məsafə

$\frac{910}{3} km$ olanda bir-birinə $70+60=130 km/saat$ sürətlə yaxınlaşmışlar

və buna $\frac{910}{3} : 130 = 2\frac{1}{3}(\text{saat})$ vaxt sərf etmişlər. Onda Zaqataladan

çıxan maşın görüşə qədər $1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{3} = 4(\text{saat})$ yolda olmuşdur.

275. Bu məsələ də birlikdə hərəkətə aiddir. Birlikdə hərəkət maşın A məntəqəsindən çıxdığı andan başlanır. Bu vaxta qədər avtobus 40 km/saat sürətlə 30 km getmişdir $\left(30 : 40 = \frac{3}{4}\right)$ - bu avtobusun yolun birinci hissəsindəki hərəkətidir. Avtobus yolun ikinci hissəsinə A məntəqəsindən 30 km məsafədə başlamış və B məntəqəsində qurtarmışdır. Fərz edək ki, avtobus yolun ikinci hissəsini getməyə t saat sərf etmişdir. Avtobusun sürəti 40 km/saat olduğundan bu məsafə $40t$ km-ə bərabərdir, ümumiyyətlə isə A məntəqəsindən B-yə qədər avtobus $(30+40t)$ km getmişdir. Birlikdə hərəkət avtobus B məntəqəsinə çatanda qurtarır. t saatda (avtobusun yolun ikinci hissəsini keçməyə sərf etdiyi vaxt) avtobus 60 km/s sürətlə $60t$ km getmişdir və B məntəqəsinə qədər $60 \cdot \frac{1}{12} = 5(\text{km})$ yolu qalmışdır. Beləliklə, A məntəqəsindən B-yə qədər məsafə $(60t+5)$ km-ə bərabərdir. Şərtə görə $30+40t=60t+5$ tənliyi alınır. Onda $t = \frac{5}{4} \text{ saat}$.

A və B məntəqələri arasındakı məsafə isə $30+40t$ və ya $60t+5$ ifadələrində $t = \frac{5}{4}$ yazmaqla alınır: $30 + 40 \cdot \frac{5}{4} = 60 \cdot \frac{5}{4} + 5 = 80(\text{km})$.

276. Hərəkətə aid bir sıra məsələlərdə təyyarənin hərəkəti zamanı küləyin sürəti, çayda hərəkət zamanı isə axının sürəti nəzərə alınır. Bu tip məsələlərdə iki əsas sürətə baxılır – mühərrikin və ya insanların qüvvəsilə yaradılan təyyarənin, gəminin, qayığın öz sürəti və ya külək olmadıqda və ya durğun sudakı sürət və küləyin və ya axının sürəti. Digər iki sürəti külək və ya axın istiqamətdə sürətləri əsas sürətlə (cəm və ya fərq vasitəsilə) ifadə etmək olar.

Verilmiş məsələdə əsas sürət təyyarənin öz sürəti 690 km/saatdır və verilməyən küləyin sürətidir. Küləyin sürətini x km/saat ilə işarə edək. Onda külək istiqamətində təyyarə 5,5 saatda $(690+x)$ km/saat sürətlə $5,5(690+x)$ km, küləyin əksi istiqamətində isə 6 saatda $(690-x)$

km/s sürətlə $6(690-x)$ km uçar. Şərtə görə hər iki istiqamətdə təyyarə eyni məsafəni uçduğundan $5,5 \cdot (690 + x) = 6(690 - x)$ tənliyini alırıq, buradan $x = 30 \text{ km/saat}$ (küləyin sürəti). Onda $6(690-30)=3960$ (km) və ya $5,5(690+30)=3960$ (km). (təyyarənin uçduğu məsafələr). Hər iki istiqamətdə təyyarə $3960 \cdot 2 = 7920$ (km) uçmuşdur.

277. Verilmiş məsələdə əsas sürətlər katerin öz sürəti 15 km/saat və verilməyən axın sürətidir. Axın sürətini $x \text{ km/saat}$ ilə işarə edək.

Onda kater axın istiqamətində $(15+x) \text{ km/s}$ sürətlə $\frac{60}{15+x}$ saat, axının

əksinə isə $(15-x) \text{ km/s}$ sürətlə $\frac{60}{15-x}$ saat hərəkət edir. Xilasedici halqa

axın istiqamətində 25 km üzməyə $\frac{25}{x}$ saat sərf edir. Şərtə görə katerin

hər iki istiqamətə birlikdə sərf etdiyi vaxt, xilasedici halqanın 25 km məsafədə üzmə vaxtına bərabərdir. Buna əsasən $\frac{60}{15+x} + \frac{60}{15-x} = \frac{25}{x}$

və ya $\frac{12}{15+x} + \frac{12}{15-x} = \frac{5}{x}$ tənliyi alınır. $0 < x < 15$ olduğundan bu

tənliyin hər tərəfini $(15+x)(15-x)x$ -ə vurub alınmış tənliklə eynigüclü

$(12(15-x) + 12(15+x))x = 5(15+x)(15-x)$ və ya $x^2 + 72x - 225 = 0$ tənliyini alırıq. Buradan $x = -36 + 39 = 3 \text{ (km/s)}$. Onda katerin

yuxarıya doğru hərəkətə sərf etdiyi vaxt $\frac{60}{15-3} = 5 \text{ (saat)}$ olar.

278. Birgə işə aid məsələləri həll edərkən, bərabərsürətli hərəkətdə olduğu kimi, bilmək lazımdır ki, iş $z = xy$ düsturu ilə təsvir olunur, burada x əmək məhsuldarlığı (hərəkət sürətinə analogi), y – iş vaxtı (hərəkət vaxtı), z – görülən işin həcmi (keçilən yol).

Fərz edək ki, zavod x maşın buraxmalıdır, onda sifariş $20x$ maşın olar. Əslində zavod hər gün $(x+2)$ maşın buraxmışdır və 18 gündə $18(x+2)$ maşın hazır olmuşdur. Məsələnin şərtinə görə $20x = 18(x+2)$, buradan $x = 18$. Beləliklə zavod $20 \cdot x = 20 \cdot 18 = 360$ maşın buraxmışdır.

279. Məsələ iki borunun birgə işinə aiddir. Fərz edək ki, birinci boru hovuzə $1m^3$ suyu x dəqiqəyə, başqa sözlə $\frac{x}{60}$ saata vurur, onda ikinci boru hovuzə $1m^3$ suyu $(x+4)$ dəqiqəyə, yəni $\frac{x+4}{60}$ saata vurur. Bu o deməkdir ki, birinci boru 1 saatda hovuzə $\frac{60}{x}m^3$, digəri isə $\frac{60}{x+4}m^3$ su vurur. Məsələnin şərtinə görə $\frac{60}{x}m^3$ su $\frac{60}{x+4}m^3$ -dən $\frac{100}{5}m^3$ çoxdur. Onda $\frac{60}{x} - \frac{60}{x+4} = 20$ tənliyini alırıq. Bu tənlikdən sadə çevirmələrdən sonra $\begin{cases} x^2 + 4x - 12 = 0 \\ x(x+4) \neq 0 \end{cases}$ və ya $\begin{cases} x_1 = -6, x_2 = 2 \\ x(x+4) \neq 0 \end{cases}$ alırıq. Məsələnin şərtinə görə $x > 0$ olmalıdır. Odur ki, $x = 2$. Onda ikinci boru hovuzə $1m^3$ suyu 6 dəqiqəyə vurur, Habelə o, 1 saatda $10m^3$, 5 saatda isə $50m^3$ suyu hovuzə vurur.

280. Əlyazmasını 1 qəbul edək. Fərz edək ki, birinci tərcüməçinin bütün işi yerinə yetirməsi üçün x saat lazımdır, onda bunun üçün ikinci tərcüməçiyə $(x+4)$ saat lazımdır. Birinci tərcüməçinin məhsuldarlığı $\frac{1}{x}(1/s)$, ikinci tərcüməçinin məhsuldarlığı isə $\frac{1}{x+4}(1/S)$ olar. Başqa sözlə birinci və ikinci tərcüməçi uyğun olar 1 saatda işin $\frac{1}{x}$ və $\frac{1}{x+4}$ hissələrini yerinə yetirir. İlk 2 saatda $\frac{2}{x}$, sonrakı 6 saatda isə $\left(\frac{6}{x} + \frac{6}{x+4}\right)$ əlyazması tərcümə olunmuşdur. Cəmi $\left(\frac{2}{x} + \frac{6}{x} + \frac{6}{x+4}\right)$ əlyazması tərcümə olunmuşdur ki, bu da məsələnin şərtinə görə əlyazmasının 80% və ya $\frac{4}{5}$ -nü təşkil edir. Onda

$$\frac{8}{x} + \frac{6}{x+4} = \frac{4}{5} \text{ tənliyini və buradan } \begin{cases} x_1 = -2,5, x_2 = 16 \\ 5x(x+4) \neq 0 \end{cases} \text{ alırıq. Şərtə görə}$$

x -in qiyməti müsbət olmalıdır. Beləliklə, birinci tərcüməçi əlyazmasını 16 saata tərcümə edə bilər.

281. Fərz edək ki, əmanət hər il $x\%$ artırılmışdır. Onda bir ildən sonra hesabda $\left(2000 + \frac{x}{100} \cdot 2000\right)$ manat və ya $(2000 + 20x)$ manat olar.

Onda ikinci ilin sonunda hesabda

$$(2000 + 20x) + \frac{x}{100} (2000 + 20x) = (0,2x^2 + 40x + 2000) \text{ manat olar.}$$

Şərtə görə bu 2420 manata bərabərdir. Onda $0,2x^2 + 40x + 2000 = 2420$ və buradan $x_1 = -210, x_2 = 10$ alırıq. Şərtə görə x -in qiyməti müsbət ədəd olmalıdır. Deməli əmanət hər il 10% artırılmışdır.

282. Birinci ərintidə gümüşün miqdarı $0,6 \cdot 300q = 180q$, ikincidə isə $0,8 \cdot 900q = 720q$ -dir. Onda yeni ərintidə gümüşün kütləsi $180q + 720q = 900q$, yeni ərintinin kütləsi $300q + 900q = 1200q$, burada gümüşün faiz miqdarı $\frac{900q}{1200q} \cdot 100\% = 75\%$.

283. Əvvəlcə qarışıqda x l spirt olarsa, onda burada su $4x$ l olar. yeni qarışıqda spirtin miqdarı dəyişmiş (x l), burada suyun miqdarı $(4x + 20)$ l, qarışığın miqdarı $(x + 4x + 20)$ l, burada spirtin faiz miqdarı isə $\frac{x}{(5x + 20)} \cdot 100\%$ olur ki, bu da məsələnin şərtinə görə

12% -ə bərabərdir. Onda $\frac{100x}{5x + 20} = 20$, buradan $x = 6$ alırıq. Deməli, əvvəlcə qarışıqda 6 l spirt, 24 l su olmuşdur.

$$284. \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 22y + 122} = 2\sqrt{37} - \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2} \\ \log_{(x+1)}^4 + \log_y^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-11)^2} = \sqrt{2^2 + 12^2} \\ \frac{1}{\log_4^{(x+1)}} + \frac{1}{\log_4^y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \begin{cases} Az + ZB = AB, \text{burada } Z = \{x; y\}, A = \{-1; 1\}, B = \{1; 11\} \\ \frac{\log_4^{(x+y)y}}{\log_4^{(x+1)} \log_4^y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} y+1 = (x+1) \cdot \frac{12}{2} \\ 0 \leq x+1 \leq 2 \\ (x+1)y = 1 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AZ} = t \overline{AB} = t(2; 12), \\ \text{burada } t = \frac{x+1}{2} \in [0; 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6x + 5 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ (x+1)(6x+5) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right) = 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ y = 6x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

285. Verilmiş funksiya $x > -2$ olduqda diferensiallandıdır, $f'(x) = -1 + \frac{3}{x+2}$. Funksiyanın qrafikinə toxunan absis oxuna paralel olduğundan, toxunanın bucaq əmsalı sıfıra bərabərdir. Yəni $-1 + \frac{3}{x+2} = 0$, buradan $\frac{-x-2+3}{x+2} = 0$, $\begin{cases} -x+1=0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$. Bu toxunma nöqtəsinin absisidir. Toxunma nöqtəsinin ordinatı isə $f(1) = 4 + 3 \ln 3$ -dir. Toxunma nöqtəsinin tapılan koordinatları göstərir ki, funksiyanın qrafikinə toxunan absis oxunun üzərinə düşmür. Lakin ona paraleldir.

286. $1 + \sqrt{x} = t^3$ olsun, onda $1 - \sqrt{x} = 2 - t^3$ və tənlik $t + \sqrt[3]{2-t^3} = 2$ və ya $\sqrt[3]{2-t^3} = 2-t$ şəklinə düşər. Alınmış tənliyin hər tərəfini üç dərəcədən qüvvətə yüksəldib (tək dərəcədən qüvvətə yüksəltmədə eynigüclülük alınır). $(t-1)^2 = 0$ və buradan $t = 1$ alırıq. Onda $1 + \sqrt{x} = 1, x = 0$.

287. Tənliyin sol tərəfi həndəsi silsilənin sonlu sayda hədlərinin cəmidir. Məlumdur ki, bu cəmi $S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}$ düsturu ilə hesablamaq

olar, burada $b_1 = \frac{1}{2}, b_n = -\frac{1}{1024}, q = -\frac{1}{2}$. Beləliklə, $S_n = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{1024} \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{341}{1024}$.

Onda $\frac{341}{1024} = \frac{x+1}{512}$, buradan $x = 169,5$.

$$288. y' = \frac{8x-3}{4x^2-3x-10} \cdot \frac{1}{\ln 10} \text{ törəməsi mənfi olmadıqda } x\text{-in}$$

tələb olunan qiyməti $\begin{cases} 4x^2-3x-10 > 0 \\ 8x-3 \geq 0 \end{cases}$ şərtindən tapılır. Sonuncu şərt

$$\begin{cases} x > 2 \\ x < -1,25 \text{ ilə eynigüclüdür, buradan isə } x > 2 \text{ alırıq. Onda } x\text{-in ən} \\ x \geq 0,375 \end{cases}$$

kiçik tam qiyməti 3-dür.

$$289. \text{Qrafiklə düz xəttin } M \text{ və } N \text{ kəsişmə nöqtələri } \begin{cases} y = \frac{16}{x} \\ y = 15x + 8 \end{cases}$$

tənliklər sistemindən tapılır. Bu sistemdən $15x^2 + 8x - 16 = 0$ (1) tənliyi alınır. (1) tənliyinin diskriminantı müsbətdir və iki müxtəlif x_1, x_2 kökü vardır. Qrafikə M və N nöqtələrində toxunanların tənlikləri

uyğun olaraq belədir: $y = \frac{32}{x_1} - \frac{16}{x_1^2}x$ və $y = \frac{32}{x_2} - \frac{16}{x_2^2}x$. Toxunanın

tənliyi $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ -dir. Bu toxunanların kəsişmə

nöqtəsinin x absisi $\frac{32}{x_1} - \frac{16}{x_1^2}x = \frac{32}{x_2} - \frac{16}{x_2^2}x$ tənliyini ödəyir.

Buradan eyniçevirmədən və hər iki tərəfi sıfırdan fərqli $x_1 - x_2$

vuruğuna ixtisar etdikdən sonra $x = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}$ alırıq. (1)-dən Viyet

teoreminə görə $x_1 \cdot x_2 = -\frac{16}{15}$, $x_1 + x_2 = -\frac{8}{15}$. Odur ki, $x = 4$.

290. Funksiyanın artması şərti $f'(x) \geq 0$ dır, odur ki, $f'(x) = 6x^2 - 6ax + 3a \geq 0$ bərabərsizliyi x -in bütün qiymətlərində ödənilməlidir. Deməli $f'(x)$ kvadrat üçhədlisinin diskriminantı $a^2 - 2a$ müsbət olmamalıdır. Yəni $a^2 - 2a \leq 0$.

Buradan $a \in [0; 2]$ alırıq.

291. Tənliyi belə yazmaq olar:

$$\frac{10}{x+10} \left(1 + \frac{9}{x+9} \left(1 + \frac{8}{x+8} \left(\dots \left(1 + \frac{1}{x+1} \right) \dots \right) \right) \right) = 11. \quad \begin{array}{l} \text{ifadələri} \\ \text{ardıcıl} \end{array} \quad \text{çevirməklə}$$

$$\frac{10}{x+10} \left(1 + \frac{9}{x+9} \left(1 + \frac{8}{x+8} \left(\dots \left(1 + \frac{2}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+1} \right) \dots \right) \right) \right) = 11,$$

$$\frac{10}{x+10} \left(1 + \frac{9}{x+9} \left(1 + \frac{8}{x+8} \left(\dots \left(1 + \frac{3}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x+1} \right) \dots \right) \right) \right) = 11,$$

$$\dots \dots \dots \frac{10}{x+10} \left(1 + \frac{9}{x+9} \cdot \frac{x+9}{x+1} \right) = 11,$$

$$\frac{10}{x+10} \cdot \frac{x+10}{x+1} = 11, \text{ buradan } x = -\frac{1}{11}.$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu ədəd verilmiş tənliyi ödəyir. Tənliyin həlli ilə əlaqədar qısa yazılışların alınmasındakı aralıq hesablamaları aparmağı müstəqil iş kimi şagirdlərə tapşırmaq məsləhətdir.

292.

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{\underbrace{44\dots4}_{200} - \underbrace{88\dots8}_{100}} = \sqrt{\underbrace{44\dots4}_{100} \underbrace{00\dots0}_{100} - \underbrace{44\dots4}_{100}} = \sqrt{\underbrace{44\dots4}_{100} \cdot 10^{100} - \underbrace{44\dots4}_{100}} = \\ &= \sqrt{\underbrace{44\dots4}_{100} (10^{100} - 1)} = \sqrt{4 \cdot \underbrace{11\dots1}_{100} \cdot 9 \cdot \underbrace{11\dots1}_{100}} = 2 \cdot 3 \cdot \underbrace{11\dots1}_{100} = \underbrace{66\dots6}_{100}. \end{aligned}$$

293. $\alpha = 3,5x$ işarə edək, onda $2\alpha = 7x$; $10,5x = 3\alpha$, bundan sonra $1 + 2 \cos 2\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$ eyniliyini isbat etmək lazımdır.

$$\begin{aligned} \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} &= \frac{\sin(\alpha + 2\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \cos 2\alpha + \frac{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \cos 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha = \\ &= \cos 2\alpha + (1 + \cos 2\alpha) = 1 + 2 \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

294. Əvvəlcə iki məlum bərabərsizliyi xatırlamaq lazımdır:

1) $a, b, c > 0$ isə, onda $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$. Bu bərabərsizliyi isbat etmək üçün Koşi bərabərsizliyinin iki dəfə tətbiqi lazımdır:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{3}{\frac{a+b+c}{3}} = \frac{9}{a+b+c}.$$

2) $a+b+c=1$ isə, onda $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$. Doğrudan da

$$a^2+b^2+c^2 = \frac{1}{3} + \left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{3}\right)^2 \geq \frac{1}{3}.$$

İndi verilmiş bərabərsizliyi isbat etmək olar. $tg^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1$ eyniliyinə və 1)

bərabərsizliyinə əsasən

$$tg^2 \alpha + tg^2 \beta + tg^2 \gamma = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \gamma} - 3 \geq \frac{9}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} - 3$$

, $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \geq \frac{1}{3}$ olduğundan ($\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 1$ şərtinə və 2) bərabərsizliyinə əsasən)

$$\frac{9}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = \frac{9}{3 - (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma)} \geq \frac{9}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{27}{8}.$$

$$tg^2 \alpha + tg^2 \beta + tg^2 \gamma \geq \frac{27}{8} - 3 = \frac{3}{8}.$$

295. Tənliyin həllində “ $f(x)=g(x)$ tənliyində $f(x), g(x)$ qarşılıqlı tərs funksiyalardır və həmin tənliyin X təyin oblastında artadırlarsa, onda bu tənlik X -də $f(x)=x, g(x)=x$ tənliklərinin hər birilə eynigüclüdür” teoremindən istifadə etmək məqsədəuyğundur. Konkret misallar üzərində teoremin doğruluğunu əsaslandırmaq olar. Məsələn, $y=x^3$ və $y=\sqrt[3]{x}$ funksiyaları R -də artandır, odur ki, $x^3=\sqrt[3]{x}$ tənliyi $x^3=x$ və $\sqrt[3]{x}=x$ tənliklərinin hər birilə eynigüclüdür. Göstərilən teoremə əsasən verilmiş tənliyi belə həll etmək olar. Verilmiş tənlik üçün deyə bilərik ki, $f(x)=\frac{x^3+6}{7}$ və $g(x)=\sqrt[3]{7x-6}$ funksiyaları bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur,

kəsilməzdir və ciddi artandır, odur ki, $E(f) = E(g) = R$ və funksiyaların hər birinin tərsi vardır. $\frac{x^3 + 6}{7} = y$ tənliyini x -ə nəzərən həll edib $x = \sqrt[3]{7y - 6}$ və ya x -lə y -in yerini dəyişdikdən sonra $y = \sqrt[3]{7x - 6}$ alırıq. Buradan alınır ki, $f^{-1}(x) = g(x)$, yəni $f(x)$ və $g(x)$ qarşılıqlı tərs funksiyalardır. Onda göstərilən teoremə uyğun olaraq verilmiş tənlik $\frac{x^3 + 6}{7} = x \Leftrightarrow x^3 - 7x + 6 = 0$ ilə eyni-güclüdür. Sonuncu tənlikdən isə $(x^3 - x) - 6(x - 1) = 0$ yazdıqdan sonra $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -3$ alırıq.

296. x - verilmiş üçrəqəmli ədəd, y - isə çıxılan natural ədəd olsun, onda

$$\frac{\log_2 x - y}{y} \cdot \frac{\log_2 x - y}{y} = 1 \Rightarrow \log_3 x \log_2 x - y(\log_2 x + \log_3 x) + y^2 = y^2 \Rightarrow y = \frac{\log_3 x \log_2 x}{\log_2 x + \log_3 x} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\log_x^3 \log_x^2}{1} + \frac{1}{\log_x^2}} = \frac{1}{\log_x^3 + \log_x^2} = \log_6 x, \text{ buradan } x = 6^x \in \{6, 36, 216, 1296, \dots\}.$$

Bu çoxluqda yalnız bir üçrəqəmli ədəd 216 vardır.

297. $85^0 + x = \alpha$ olarsa, onda $5^0 - x = 90^0 - \alpha$ və verilmiş tənlik $tg\alpha + ctg\alpha = 2$ şəkilə düşər. Buradan $tg^2\alpha - 2tg\alpha + 1 = 0, tg\alpha = 1$. Odur ki, $85^0 + x = 45^0 + 180^0 n, n \in Z$ və ən kiçik müsbət kök $n=1$ olduqda $x = 140^0$ alınır.

298. Aşkardır ki, $x = 0$ tənliyin kökü deyil. $x \neq 0$ olduqda tənliyi $a = \frac{27x^3 + 62,5}{27x^2} = x + \frac{62,5}{27x^2}$ şəkildə yazaq və onunla eynigüclü

$$\begin{cases} y = a \\ y = x + \frac{62,5}{27x^2} \end{cases} \text{ sisteminə keçək. Bu sistemin neçə kökü olması}$$

məsələsini yalnız grafik üsulu ilə həll etmək olar. Sistemin birinci tənliyi absis oxuna paralel üfiqi düz xəttir, onda $x \neq 0$ olduqda

$y = x + \frac{62,5}{27x^2}$ funksiyasının grafikinə

qurmaq qalır. $y' = 1 - \frac{125}{27x^3}$ olduğundan,

$x_0 = \frac{5}{3}$ olduqda törəmə sıfıra bərabərdir.

Odur ki, $(-\infty; 0)$ və $(\frac{5}{3}; +\infty)$

aralıqlarında funksiya artır, $x \in (0; \frac{5}{3})$

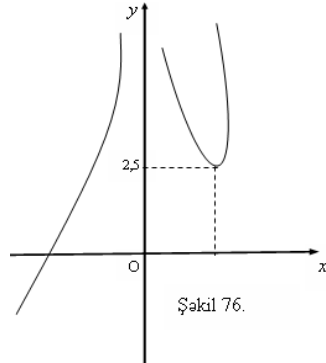
olduqda isə azalır. x_0 nöqtəsində 0

minimum qiymət alır, deməli bu nöqtədə $y(\frac{5}{3}) = \frac{5}{3} + \frac{125 \cdot 9}{2 \cdot 27 \cdot 25} = \frac{15}{6} = 2,5$.

Nəticədə baxılan funksiyanın grafikinə eskizi (Şəkil 76) alınır. $a > 2,5$ isə $y = a$ üfiqi düz xətti onu üç nöqtədə kəsir, bu şərti ödəyən ən kiçik tam ədəd isə $a = 3$ -dir.

299. $y = f(x)$ funksiyanın dövrü 3-ə bərabər və həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin olunduğundan $f(x + 3n) = f(x)$, burada n -ixtiyari tam ədəddir. Onda $f(8) = f(2 + 2 \cdot 3) = f(2) = 5$ və $f(-4) = f(2 - 2 \cdot 3) = f(2) = 5$. Onda $2f(8) - 3f(-4) = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 5 = -5$.

$$\begin{aligned} 300. (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x &= 2a \sin 2y + \cos 2y \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x + \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^x} = \\ &= \sqrt{4a^2 + 1} \left(\frac{2a}{\sqrt{4a^2 + 1}} \sin 2y + \frac{1}{\sqrt{4a^2 + 1}} \cos 2y \right) \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x + \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^x} = \\ &= \sqrt{4a^2 + 1} \left(\frac{2a}{\sqrt{4a^2 + 1}} \sin 2y + \frac{1}{\sqrt{4a^2 + 1}} \cos 2y \right) \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x + \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^x} = \\ &= \sqrt{4a^2 + 1} \cdot \sin \left(2y + \arccos \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + 1}} \right). \end{aligned}$$



Şəkil 76.

$y = a^x, a > 0, a \neq 1$ üstlü funksiyası və $y = \sin x$ triqonometrik funksiyası həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin olunmuşdur. $t > 0$ olduqda $t + \frac{1}{t} \geq 2$ və $|\sin u| \leq 1$ olduğundan a -nın $(x; y)$ həqiqi ədədlər cütünün varlığını təmin edən verilmiş tənliyi ödəyən qiymətləri $\sqrt{4a^2 + 1} \geq 2$ şərtini ödəməlidir. Buradan

$$4a^2 + 1 \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a < -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ alınır.}$$

301.

$$\log_2(x-4)^4 - \log_2(x-2) - 9 = 0 \Leftrightarrow 4\log_2^{[x-2]} - \log_2^{[x-2]} - 9 = 0 \Leftrightarrow 3\log_2^{[x-2]} = 9 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \log_2^{[x-2]} = 3 \Leftrightarrow |x-2| = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 10 \end{cases}$$

302.

$$2\cos^2 2x = (a+1)\cos 2x \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - (a+1)\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(2\cos 2x - (a+1)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{a+1}{2} \end{cases}$$

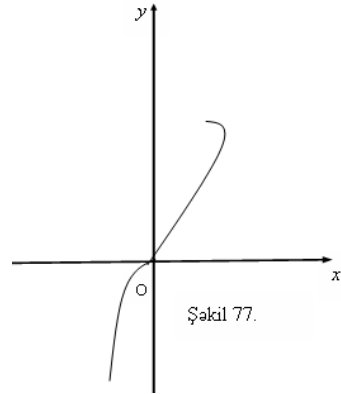
$\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ parçasında birinci tənli-

yin üç kökü vardır, odur ki, ikinci tənliyin kökü olmadıqda və ya onun kökləri birinci tənliyin kökləri ilə eyni olduqda məsələnin şərti ödənilə bilər,

yəni $\begin{cases} \left|\frac{a+1}{2}\right| > 1 \\ \frac{a+1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+1}{2} > 1 \\ \frac{a+1}{2} < -1 \\ a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a < -3 \\ a = -1 \end{cases} \text{ cavabı}$

belə də yazmaq olar: $(-\infty; -3) \cup \{-1\} \cup (1; +\infty)$.

303. $f''(x) = 6x$ olduğundan $x < 0$ olduqda $f''(x) < 0$, $x > 0$ olduqda isə $f''(x) > 0$. Odur ki, baxılan funksiya $x < 0$ olduqda yuxarıdan, $x > 0$ olduqda isə aşağıdan qabarıqdır (Şəkil 77).



$$304. 1) \int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} (\sin x)' dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^t + C = e^{\sin x} + C,$$

burada $t = \sin x$ əvəzlənməsi aparılmışdır.

$$2) \int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2 dx^2 = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin x^2 + C,$$

burada $t = x^2$.

$$3) t = \sqrt{x} \text{ olsun, onda } x = t^2 \text{ və } dx = 2t dt.$$

Buradan

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 + \sqrt{x}} &= \int \frac{2t dt}{2 + t} = 2 \int \frac{2 + t - 2}{2 + t} dt = 2 \int \left(1 - \frac{2}{2 + t} \right) dt = 2 \int dt - 4 \int \frac{dt}{2 + t} = \\ &= 2t - 4 \ln(2 + t) + C = 2\sqrt{x} - 4 \ln(2 + \sqrt{x}) + C. \end{aligned}$$

$u(t)$ funksiyasının ibtidai funksiyası $U(t)$ isə, yəni $\int u(t) dt = U(t) + C$ (1). Onda $\int u(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = u(\varphi(x)) + C$ (2) və ya $\int u(\varphi(x)) d\varphi(x) = u(\varphi(x)) + C$ (3).

(3) və ya (2) düsturları dəyişəni əvəzetmə metodu ilə integrallama düsturları adlanır. Onlar (1) düsturundan t -in yerində diferensiallanan $t = \varphi(x)$ funksiyasını yazmaqla alınır. (3) düsturu $f(x)$ funksiyası $f(x) = u(\varphi(x)) \varphi'(x)$ şəkildə verildikdə və ya $u(t)$ ibtidai funksiyası yəni (1) inteqralı məlum olduqda $\int f(x) dx$ inteqralını hesablamağa imkan verir. 303 (1, 2, 3)-də artıq belə nümunəni göstərdik. İndi (3) düsturunun mühüm xüsusi hallarını göstərək:

a) Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyası $F(x)$ -dir, yəni $\int f(x) dx = F(x) + C$ bərabərliyi doğrudur. Onda

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, a \neq 0 \quad (4). \text{ Burada } \varphi(x) = ax + b.$$

$$f(ax + b) dx = \frac{1}{a} f(ax + b) d(ax + b).$$

b) $\int \frac{dt}{t} = \ln(t) + C$ bərabərliyindən istifadə edib, $\varphi(x) \neq 0$ isə

$$\int \frac{\varphi'(x) dx}{\varphi(x)} = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C \quad (5) \text{ alırıq.}$$

c) $\int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1, t > 0$ olduğundan

$$\int \varphi(x) \varphi'(x) dx = \int \varphi^\alpha(x) d\varphi(x) = \frac{\varphi^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C \quad (6)$$

Burada $\alpha \neq -1, \varphi(x) > 0$.

303 (4-11) integrallarını (4)-(6) düsturlarının tətbiqilə hesablayırıq.
4)

$$\int (5x+3)^8 dx = \frac{1}{5} \int (5x+3)^8 d(5x+3) = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x+3)^9}{9} + C = \frac{(5x+3)^9}{45} + C$$

$$5) \int \frac{dx}{(x+a)^k} = \begin{cases} \ln|x+a| + C, k=1 \\ \frac{(x+a)^{1-k}}{1-k} + C, k \neq 1 \end{cases}$$

$$6) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+a)}{x^2+a} = \frac{1}{2} \ln|x^2+a| + C$$

$$7) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{d(x^2+a)}{2\sqrt{x^2+a}} = \sqrt{x^2+a} + C$$

$$8) \int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$$

$$9) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0$$

$$10) \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0$$

$$11) \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x+a} = \frac{\ln|x-a|}{2a} - \frac{\ln|x+a|}{2a} +$$

$$+ C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq 0$$

12) $\sqrt{a^2 + x^2} = t - x$ əvəzləməsindən istifadə edək. Onda $a^2 + x^2 = t^2 - 2tx + x^2$, $x = \frac{t^2 - a^2}{2t}$; $\sqrt{a^2 + x^2} = t - \frac{t^2 - a^2}{2t} = \frac{2t^2 - t^2 + a^2}{2t} = \frac{t^2 + a^2}{2t}$; $dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2 + a^2}{t^2}$ alırıq. Bu qiymətləri verilmiş integralda yerinə yazıb

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{t^2 + a^2}{t^2}}{\frac{t^2 + a^2}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C \text{ alırıq.}$$

13) 303(12)-nin ümumiləşdirilməsi məqsədilə verilən bu integralı hesablamaq üçün $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x$ əvəzləməsindən istifadə etmək olar. Onda $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x$ -dən $x = \frac{t^2 - c}{b + 2 + \sqrt{a}}$,

$$dx = \frac{2t^2 \sqrt{a} + 2tb + 2\sqrt{ac}}{(b + 2t\sqrt{a})^2},$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{at^2 + bt + \sqrt{ac}}}{b + 2t\sqrt{a}} \text{ alınır. Bu qiymətləri verilmiş}$$

integralda yerinə yazıb sadə çevirmələr apardıqdan sonra

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = 2 \int \frac{dt}{b + 2 + \sqrt{a}} \text{ və burada } b + 2 + \sqrt{a} = u$$

əvəzləməsindən istifadə edib $t = \frac{u - b}{2\sqrt{a}}$, $dt = \frac{2}{2\sqrt{a}} du$,

$$2 \int \frac{dt}{b + 2t\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln u + C_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|b + 2\left(\sqrt{a}x + \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)\right| + C_1$$

alıırıq.

303 (14-17) şəklində integralları hesablamaq üçün integralaltı funksiyanın surətini, məxrəcin törəməsini ayırmaqla,

$$\alpha x + \beta = \frac{\alpha}{2a}(2ax + b) + \beta - \frac{\alpha b}{2a} \text{ bərabərliyindən istifadə edərək}$$

çevirmək məqsəduyğundur. Göründüyü kimi 303(14) və 303(15) uyğun olaraq 303(16) və 303(17)-nin ümumiləşdirilməsidir. Bu deyiləni xüsusi hal üçün sonuncu iki integral üzərində göstərək:

$$303 \quad (16). \quad 3x+4 = \frac{3}{2}(2x+3) + 4 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}(2x+3) - \frac{1}{2} \quad \text{olduğundan}$$

$$\int \frac{3x+4}{x^2+3x+5} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+3x+5} = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+3x+5)}{x^2+3x+5} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+3x+5}$$

Sonra məxrəcdə tam kvadratı ayırıq:

$$x^2+3x+5 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 5 - \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2 = t^2 + a^2, \text{ burada}$$

$$t = x + \frac{3}{2}, \quad a = \frac{\sqrt{11}}{2}. \quad \text{Odur ki,} \quad \int \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C, \quad a \neq 0$$

düsturundan istifadə edib

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+5} = \int \frac{d\left(x + \frac{3}{2}\right)}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{11}} + C \quad \text{alırıq.}$$

$$\text{Beləliklə,} \quad \int \frac{3x+4}{x^2+3x+5} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2+3x+5) - \frac{1}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{11}} + C$$

$$303 \quad (17). \quad \int \frac{4x-5}{\sqrt{x-x^2}} dx = \int \frac{-2(1-2x)-3}{\sqrt{x-x^2}} dx = -2 \int \frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}} dx - 3 \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} =$$

$$-2 \int \frac{d(x-x^2)}{\sqrt{x-x^2}} - 3 \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$$

$$x-x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{və} \quad \int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \arcsin \frac{t}{a} + C, \quad a > 0 \quad \text{olduğundan}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin(2x-1) + C.$$

$$\text{Beləliklə,} \quad \int \frac{4x-5}{\sqrt{x-x^2}} dx = 4\sqrt{x-x^2} - 3\arcsin(2x-1) + C.$$

Ümumiləşdirməni (yəni 303 (14-15)-in həllini) göstərilən 303 (16-17) xüsusi hallarına analogi olaraq yerinə yetirmək olar.

303 (18). Fərz edək ki, $u(x)$ və $v(x)$ eyni aralıqda təyin olmuş x -dən asılı diferensiallanan funksiylərdir. Onda $d(uv) = udv + vdu$ (1).

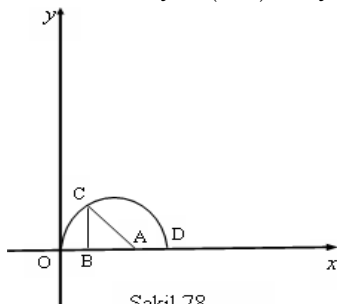
$$\int d(uv) = uv + C \quad \text{olduğundan} \quad (1) \quad \text{düsturundan alınır ki,}$$

$\int u dv + \int v du = \int d(uv) = uv + C$. Odur ki, hissə-hissə integrallama adlanan $\int u dv = uv - \int v du$ (2) düsturu doğrudur. Verilmiş integralda $u(x) = \ln x$ və $v(x) = x$ işarə edək. $d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$ və (2) düsturundan istifadə edib $\int \ln x dx = x \ln x - \int x d(\ln x) = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$ alırıq.

303 (19). $u(x) = x$ və $v(x) = \sin x$ işarə edək. $d(\sin x) = \cos x dx$ və (2) düsturundan istifadə edib $\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$ alırıq.

$$303 (20). \int \frac{x^4}{1+x^2} dx = \int \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} dx = \int \frac{x^4 - 1}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^3}{3} - x + \arctg x + C.$$

304. İntegralaltı funksiyanın $y = \sqrt{2x - x^2}$ yəni $y^2 + (x-1)^2 = 1, y \geq 0$ qrafikini quraq. Bu qrafik mərkəzi



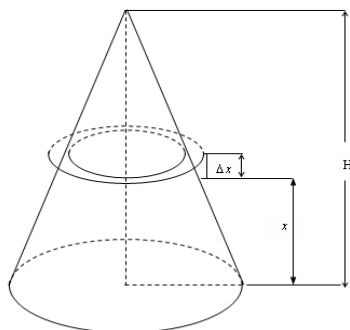
Şəkil 78.

A(1; 0) nöqtəsində və radiusu 1 olan (Şəkil 78) yarımqvadrantdır. İntegral yarımqvadrant və $x = 0,5$, $y = 0$ düz xətlərilə əhatə olunmuş ayrıxətli trapeziyanın sahəsinə bərabərdir. Bu sahə ABC üçbucağının və CAD sektorunun sahələri cəminə bərabərdir. ABC üçbucağında $AB = 0,5$, $BC = 0,5\sqrt{3}$, $\angle CAB = 60^\circ$. $S(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{8}$, dərəcə

ölçüsü 120° olan sektorun sahəsi $S(CAD) = \frac{\pi}{3}$. Beləliklə,

$$\int_{0,5}^2 \sqrt{2x - x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{3}.$$

305. Konusu oturacaq müstəvisinin paralel müstəvilərlə “elementar konuslara” ayıraq (Şəkil 79). Müstəvi ilə kəsmə nəticəsində oturacaqları konusun oturacağından x və $x + \Delta x$ məsafədə olan alınmış konuslardan



Şəkil 79.

birinə baxaq. Onun oturacağıın radiusu $r = r(x) = R \cdot \frac{H-x}{H}$,

hündürlüyü Δx -dir. Onun həcmi təqribən oturacağıın radiusu həmin radius olan silindrin həcminə yəni $V(x) = \pi r^2 \Delta x$, kütləsi isə $m(x) = \pi r^2 d \Delta x$ dir. Baxılan silindri x hündürlüyünə qaldırmaq üçün tələb olunan işi ΔA ilə işarə edək. Onda $\Delta A = \pi r^2 dg x \Delta x$ və ya

$\frac{\Delta A}{\Delta x} = \pi r^2 dg x$. Burada limitə keçib $A' = \pi r^2 dg x$ alırıq. Onda

$$A = \int_0^H \pi r^2 dg x dx = \frac{\pi R^2 dg}{H^2} \int_0^H (H-x)^2 x dx = \frac{\pi R^2 dg}{H^2} \int_0^H (H^2 x - 2Hx^2 + x^3) dx =$$

$$= \left(\frac{H^2 x^2}{2} - \frac{2Hx^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^H = \frac{\pi R^2 H^2 dg}{12}$$

306. Suyun müqavimət qüvvəsi bir tərəfdən təcillə, digər tərəfdən isə məsələnin şərtinə görə sürətlə mütənəsibdir. Beləliklə, sürətin törəməsinə bərabər olan təcil, sürətin özü ilə mütənəsibdir, yəni $V' = kv$, $\frac{dv}{dt} = kv$, $\frac{dv}{V} = k dt$. Dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənlik

aldıq. Alınmış tənliyin hər tərəfini inteqrallayıb $\int \frac{dv}{V} = \int k dt$,

$\ln|v| = kt + C_1$, $|v| = e^{kt+C_1}$, $v(t) = ce^{kt}$. Qayığın başlanğıc sürəti 10 m/san olduğundan $v(0) = 10$, $10 = C e^0$, $C = 10$. 5 saniyədən sonra

qayığın sürəti 8 m/san olduğundan $V(5) = 8$, $8 = 10e^{5k}$, $k = \frac{\ln 0,8}{5}$.

Sürətin nə vaxt 1m/san qədər azaldığını müəyyənləşdirmək üçün $1 = 10e^{kt}$ tənliyindən t -ni tapmaq lazımdır, $t = \frac{\ln 0,1}{k}$, $t = \frac{5 \ln 0,1}{\ln 0,8}$.

$$307. S = \frac{1}{2} dR^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot 4 = 2\pi.$$

$$308. f(-5) = 1 + 10 = 11.$$

$$309. \quad y = \frac{4}{x^2 + 2x + 3} \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = \frac{4}{y} \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = \frac{4}{y} \Rightarrow x^2 + 2x + 3 - \frac{4}{y} = 0,$$

$$D = 1 - 3 = \frac{4}{y} - 2, \quad D \geq 0 \quad \text{olmalıdır.} \quad \frac{4}{y} - 2 \geq 0, \quad \frac{4 - 2y}{y} \geq 0,$$

$E(y) = (0; 2]$; ƏBQ 2-yə bərabərdir. Verilmiş funksiyanın qiymətlər çoxluğunu belə də tapmaq olar: $y = \frac{4}{(x+1)^2 + 2} > 0, \quad y > 0,$

$$y = \frac{4}{(x+1)^2 + 2} \leq \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow y \leq 2. \text{ Buradan } 0 < y \leq 2.$$

$$310. \quad \frac{5\pi}{3} - \text{IV rüb} \quad \sin \frac{5\pi}{3} < 0, \quad \frac{5\pi}{7} - \text{II rüb} \quad \cos \frac{5\pi}{7} < 0, \quad \frac{7\pi}{8} - \text{II rüb} \quad \operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} < 0;$$

$$3 - \text{II rüb} \quad \operatorname{ctg} 3 < 0; \quad \sin \frac{5\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} \operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} \operatorname{ctg} 3 > 0.$$

$$311. \quad f(-3) = f(3), \quad f(-4) = f(4), \quad f(-3) < f(-4)$$

312. Məlumdur ki, $f(x)$ funksiyanın əsas dövrü T olarsa, onda $f(x \pm T) = f(x + 2T) = \dots = f(x + nT), n \in \mathbb{Z}$ bərabərlikləri doğrudur. Odur ki, $f(14) = f(2 + 3 \cdot 4) = f(2) = 3$.

313. Əvvəlcə $f(x) = \{x\}$ funksiyanın dövrü funksiya olduğunu göstərmək lazımdır. Doğrudan da x ədədini müsbət tam və vahidlər qədər artırırsa, onun kəsr hissəsi dəyişməz qalar: $f(x+n) = \{x+n\} = x+n - [x+n] = x+n - ([x]+n) = x+n - [x] - n = x - [x] = \{x\}$, burada n müsbət tam ədəddir. Deməli $f(x) = \{x\}$ dövrü funksiya. Bu dövr isə istənilən müsbət n tam ədəddir. Müsbət tam ədədlər içərisində ən kiçiyi 1-ə bərabər olduğu üçün baxılan funksiyanın ən kiçik müsbət dövrü $T=1$ -dir.

Qeyd edək ki, $f(x) = [x]$ funksiyası dövrü funksiya deyil. $[2]$ -də bu fakt əksini fərz etmə metodu ilə isbat olunur.

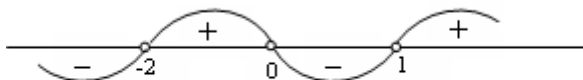
314. $\frac{x+1}{2} = t$ işarə edək. Onda

$$x = 2t - 1 \Rightarrow f(t) = 2t - 1 + 2 = 2t + 1 \Rightarrow f(x) = 2x + 1$$

315. $y = ax^2 - 4x + 5 = a\left(x^2 - \frac{4}{a}x\right) + 5 = a\left(x - \frac{2}{a}\right)^2 - \frac{4}{a} + 5.$

Bu funksiya $(-\infty; 1]$ -də azalan, $[1; +\infty)$ -də artan olduğundan $a > 0$ və $\frac{2}{a} = 1$ olmalıdır. Odur ki, $a = 2$ -dir.

316. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x-1)(x+2)$ funksiyasının sıfırları $x = 0, x = 1, x = -2$ -dir. Odur ki, $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 1)$ olduqda $y < 0$, $x \in (-2; 0) \cup (1; +\infty)$ olduqda isə $y > 0$ (Şəkil 80).



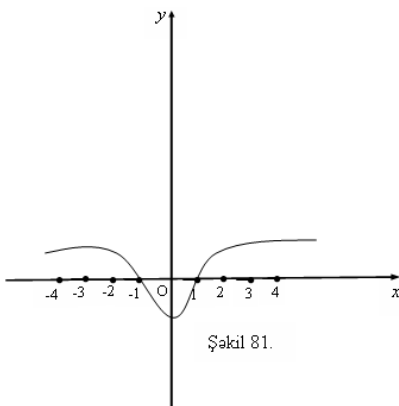
Şəkil 80.

317. $x \geq 0$ olduqda $y = \sqrt{x} - 1$ funksiyasının qrafikini quraq və onun bu hissəsini Oy oxuna nəzərən simmetrik köçürək (Şəkil 81). Funksiyanın sıfırlarını tapaq: $\sqrt{|x|} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1.$

Şəkildən görünür ki, $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ -də $y > 0$, $x \in (-1; 1)$ -də $y < 0$.

$(-\infty; 0]$ aralığında verilmiş funksiya azalır, $[0; +\infty)$ -də artır.

318. $f(-x) = -f(x)$ oldu-



Şəkil 81.

ğundan $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 9}$ tək funksiyadır. $x > 0$ olduqda $x^2 + 9 \geq 6x$

($a^2 + b^2 \geq 2ab$ bərabərsizliyinə görə) $\Rightarrow \frac{2x}{x^2 + 9} \leq \frac{1}{3}$. Bərabərlik

$x = 3$ olduqda alınır. Deməli $f(3) = \frac{1}{3}$ verilmiş funksiyanın ƏBQ-dir.

Funksiya tək olduğundan $f(-3) = -\frac{1}{3}$ və bu qiymət funksiyanın ƏKQ-dir.

319. Sektorun qövsünün uzunluğu l , radiusu R olsun. Sektorun perimetri $l + 2R$ olduğundan, şərtə görə $2l = l + 2R$, $l = 2R$. Qövsün uzunluğu $l = \alpha R$ düsturu ilə hesablanır, burada α mərkəzi bucaqdır.

Onda $\alpha = \frac{l}{R} = \frac{2R}{R} = 2 \text{ radian}$.

320. Şərtə görə $m = 2 \sin 3 \cdot \frac{\pi}{6}$, onda $m = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$.

321. Məlum teoremə görə $y = f(x)$ funksiyası əsas dövrü T olan dövrü funksiyasıdırsa $y = Af(kx + b)$ -nin əsas dövrü $\frac{T}{|K|}$ -dir.

Buradan alınır ki, $\cos x$ funksiyasının əsas dövrü 2π olduğu üçün

$y = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ funksiyasının əsas dövrü $T = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$ -dir.

322.

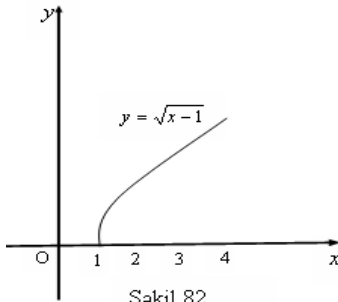
$$3 \sin 4t + 3 \sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right) = 3 \sin 4t + 3 \sin 4t + \cos \frac{\pi}{4} + 3 \cos 4t \sin \frac{\pi}{4} = 3 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \\ \times \sin 4t + \frac{3\sqrt{2}}{2} \cos 4t = 3\sqrt{2+\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \sin 4t + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \cos 4t\right) = 3\sqrt{2+\sqrt{2}} \sin(4t + \varphi)$$

. Burada $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ olduğundan φ birinci rübün bucağıdır.

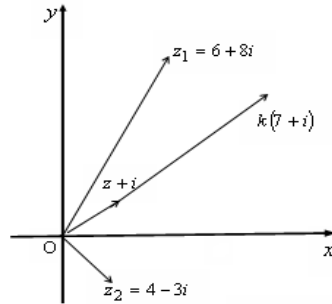
323. $y_1 = x^2$ funksiyası $[0; \infty)$ aralığında artan olduğundan $y = x^2 + 1$ də həmin aralıqda artan funksiyadır və ona görə də tərs funksiyası vardır. $x^2 = y - 1 \Rightarrow x > 0$ olduğundan $x = \sqrt{y - 1}$. Deməli $y = \sqrt{x - 1}$, $f(x) = \sqrt{x - 1}$ (Şəkil 82).

$$324. \quad \begin{aligned} & \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \beta) = \operatorname{tg}(\pi - \operatorname{arctg} \gamma); \\ & \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \alpha) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \beta)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \alpha) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \beta)} = -\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \gamma); \quad \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta} = -\gamma; \\ & \alpha + \beta + \gamma = \alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

325. $y = \arccos x$ funksiyası azalan olduğundan $\arccos(-0,4) > \arccos 0,4$.



Şəkil 82.



Şəkil 83.

$$326. \quad \cos\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\arccos \frac{1}{8}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}.$$

327. $\operatorname{ctg} x = t$ əvəz edək. Onda $t^2 - (\sqrt{3} - 1)t - \sqrt{3} < 0$ bərabərsizliyini alırıq. Buradan $-1 < t < \sqrt{3}$ tapırıq. Əvəzləməyə görə $-1 < \operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$ ikiqat bərabərsizliyini həll etmək lazımdır. $\operatorname{arccotg}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, $\operatorname{arccotg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$ olduğunda görə ikiqat bərabərsizliyi $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} < \operatorname{ctg} x < \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$ (1) şəkildə yazı bilərik. $\operatorname{ctg} x$

funksiyası $(0; \pi)$ aralığında azalan funksiya. ctgx -in dövrü funksiya olduğunu da nəzərə almaqla (1) bərabərsizliyindən $\frac{3\pi}{4} + \pi n > x > \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ alırıq. Beləliklə verilmiş bərabərsizliyin həlləri $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}$ çoxluğu. $n \in \mathbb{Z}$ çoxluğudur.

$$328. \quad \overline{z_1} = -4i \text{ olduğundan alırıq: } \left(\frac{\overline{z_1} + z_2}{3z_1} \right)^6 = \left(\frac{-4i + i - 3}{12i} \right)^6 = \left(\frac{-3(1+i)}{12i} \right)^6 = \\ = \left(-\frac{1+i}{4i} \right)^6 = \frac{((1+i)^2)^3}{4^6 \cdot i^6} = \frac{(1+2i+i^2)^3}{2^{12} \cdot (i^2)^3} = \frac{2^3 \cdot i^3}{2^{12} \cdot (-1)^3} = \frac{-2^3 \cdot i}{2^{12}(-1)} = \frac{i}{2^9} = \frac{i}{512}.$$

$$329. \quad z = a + bi \text{ olsun. Şərtə görə } z = (\overline{z})^2 \text{ olmalıdır. Buradan} \\ a + bi = (a - bi)^2 \text{ və ya } a + bi = a^2 - b^2 - 2abi \text{ bərabərliyindən} \\ \begin{cases} a = a^2 - b^2 \\ b = -2ab \end{cases} \text{ sistemini alırıq. Sistemin ikinci tənliyini } b(1 + 2a) = 0$$

şəklində yazmaq olar. Buradan $b = 0$ və ya $a = -\frac{1}{2}$ alırıq. $b = 0$ olduqda sistemin birinci tənliyindən $a_1 = 0$ və $a_2 = 1$ tapılır. Yəni $z_1 = 0 + 0i$ və $z_2 = 1 + 0 \cdot i$ ədədləri məsələnin şərtini ödəyir. Bu halda z_1 və z_2 həqiqi ədədlərdir. $a = -\frac{1}{2}$ olduqda sistemin birinci tənliyindən $-\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - b^2$ və ya $b^2 = \frac{3}{4}$, alırıq ki, buradan da $b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Beləliklə, $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ və $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ axtarılan kompleks ədədlərdir.

330. $\overline{z_1}$ və $\overline{z_2}$ vektorları (Şəkil 83) istiqamətində yönəlmiş iki eyni uzunluqlu vektoru toplaşaq, tən bölən boyunca yönəlmiş vektoru alırıq. $|\overline{z_1}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, $|\overline{z_2}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = 5$ olduğundan

$\frac{1}{2}\bar{z}_1$ və $\bar{z}_2$ vektorları eyni uzunluqdadır. Deməli,

$$\frac{6+8i}{2} + 4-3i = 7+i \text{ olduğundan } 7+i \text{ ədədinə uyğun vektor } \bar{z}_1 \text{ və}$$

$\bar{z}_2$ vektorlarının əmələ gətirdiyi bucağın tənböləni üzrə yönəlib. Buradan alınır ki, göstərilən tənbölən üzərində yerləşən nöqtələrə uyğun kompleks ədədlər $(7+i) \cdot k$ şəklindədir, $k \in R, k > 0$.

$$331. x = R \cos \alpha = 4 \cos \frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3};$$

$$y = R \sin \alpha = 4 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2. \text{ Deməli, Polyar koordinatları } 4 \text{ və}$$

$\frac{\pi}{6}$ nöqtənin Dekart koordinatları $(2\sqrt{3}; 2)$ -dir.

$$332. Z = R(\cos \alpha + i \sin \alpha) = R \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} R + i R \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{olduğundan } z-1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} R - 1 \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} R i. \text{ Buradan } |z-1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} R - 1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} R \right)^2}$$

$$\text{olduğundan, şərtə görə } \left(\frac{\sqrt{2}}{2} R - 1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} R \right)^2 = 1 \text{ tənliyini həll edib}$$

$R=0$ və $R=\sqrt{2}$ alırıq. $Z \neq 0$ olduğundan $R=\sqrt{2}$ olur. Onda axtarılan kompleks ədəd $z = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1+i$ -dir.

$$333. i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \text{ olduğundan } \sqrt[3]{i} = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}, k = 0, 1, 2.$$

Buradan

$$w_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$w_1 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) =$$

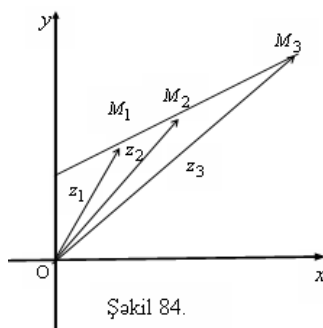
$$= -\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;$$

$$w_2 = \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -1.$$

334. $x_2 = 3 + 4i$ axtarılan həqiqi əmsallı tənliyin köküdürsə, $x_3 = 3 - 4i$ qoşma kompleks ədədi də onun kökü olmalıdır. Odur ki, tənlik $(x+1)(x-3-4i)(x-3+4i)$ şəklində olmalıdır. Buradan $(x+1)[(x-3)^2 - (4i)^2] = 0;$ $(x+1)(x^2 - 6x + 25) = 0;$ $x^3 - 5x^2 + 19x + 25 = 0$ tənliyini alırıq.

335. $z_2 - z_1$ və $z_3 - z_2$ fərqləri $\vec{M_1M_2}$ və $\vec{M_2M_3}$ vektorlarına uyğundur (Şəkil 84). $\vec{M_1M_2}$ və

$\vec{M_1M_3}$ vektorları bir düz xətt üzərində yerləşir və istiqamətləri eynidir. Odur ki, onlara uyğun $z_2 - z_1$ və $z_3 - z_2$ kompleks ədədlərin eyni bir φ argumentləri olmalıdır. Beləliklə, $z_2 - z_1 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$ $z_3 - z_2 = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi),$ burada



r və ρ həqiqi ədədlərdir. $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{r}{\rho},$ deməli şərtəki nisbət həqiqi ədəddir.

336. $y = \cos \varphi + i \sin \varphi$ funksiyasına baxaq. Bu bərabərliyin hər tərəfini diferensiallayıb $\frac{dy}{d\varphi} = -\sin \varphi + i \cos \varphi = i^2 \sin \varphi + i \cos \varphi = i(\cos \varphi + i \sin \varphi) = iy$ alırıq. Deməli, $\frac{dy}{d\varphi} = iy,$ buradan $\frac{dy}{y} = id\varphi$ və ya $\ln y = i\varphi,$ $y = e^{i\varphi}.$ Deməli, $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ (1). Burada φ əvəzinə $-\varphi$

yazaq. Onda $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$ (2). (1) və (2) –dən
 $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$; $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$ alınır.

337. $\sqrt{a+bi} = x+iy$ (A) olsun. Bu bərabərliyin hər tərəfini kvadrata yüksəldib $a+bi = x^2 - y^2 + 2xyi$ alırıq. Buradan $x^2 - y^2 = a$ (1), $2xy = b$ (2). Hər iki tənliyin hər tərəfini kvadrata yüksəldib $\begin{cases} x^4 - 2x^2y^2 = a^2 \\ 4x^2y^2 = b^2 \end{cases}$ və buradan $(x^2 + y^2)_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$;

$$(x^2 + y^2)_2 = -\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{alırıq.} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \end{cases}$$

$$x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a), \quad y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a) \quad \text{və} \quad \text{ya}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}. \quad x \quad \text{və} \quad y \quad \text{-in}$$

qiymətlərini (A)-da yerinə yazıb

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right) \quad \text{alırıq. Bu } b > 0$$

olan hal üçündür. $b < 0$ olduqda isə

$$\sqrt{a-bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right) \quad \text{alınır.}$$

338. $|z - 1 - i| \leq 4$ bərabərsizliyini $z = x + iy$ olduğunu nəzərə almaqla $|x + iy - 1 - i| \leq 4$ və ya $|(x-1) + (y-1)i| \leq 4$ şəkildə yazmaq olar. Bərabərsizliyin sol tərəfindəki modal ifadəsindəki kompleks ədədin modulu $R = (x-1)^2 + (y-1)^2$ -dir. Deməli axtarılan nöqtələr radiusu 4, mərkəzi (1;1) nöqtəsində olan dairənin daxilində və onun çevrəsi üzərində yerləşir.

339.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt[3]{3-x} - 1)(\sqrt[3]{(3-x)^2} + \sqrt[3]{3-x} + 1)}{(4-2x)(\sqrt[3]{(3-x)^2} + \sqrt[3]{3-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3-x + \sqrt[3]{(3-x)^2} + \sqrt[3]{3-x} - \sqrt[3]{(3-x)^2} - \sqrt[3]{3-x} - 1}{2(2-x)(\sqrt[3]{(3-x)^2} + \sqrt[3]{3-x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2(\sqrt[3]{(3-x)^2} + \sqrt[3]{3-x} + 1)} = \frac{1}{2(1+1+1)} = \frac{1}{6}.$$

$$340. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x}{\operatorname{tg} 5x} = \frac{8}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\arcsin 8x}{8x}}{\frac{\operatorname{tg} 5x}{5x}} = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$341. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2-3}{x+2} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \left(-\frac{3}{x+2} \right) \right]^{x+3}, \text{ son}$$

ifadə də $t = -\frac{3}{x+2}$ əvəz etsək, $x = -2 - \frac{3}{t} \Rightarrow x+3 = 1 - \frac{3}{t}$ və $x \rightarrow \infty$ -də $t \rightarrow 0$ olar. Onda

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \left(-\frac{3}{x+2} \right) \right]^{x+3} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1-\frac{3}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{\frac{1}{t}} \right]^{-3} = 1 \cdot e^{-3} = e^{-3}$$

342. Verilmiş funksiyanın $x = 3$ nöqtəsində kəsilməz olması üçün $f(3-0) = f(3+0)$ bərabərliyi ödənilməlidir:

$$f(3-0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{2x^2 - 6x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{2x(x-3)}{x-3} = 2 \lim_{x \rightarrow 3-0} x = 2 \cdot 3 = 6;$$

$$f(3+0) = \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} (ax+2) = 3a+2, \text{ Onda } 3a+2=6 \Rightarrow 3a=4 \Rightarrow a=1\frac{1}{3}$$

343. $f(x) = x^3 + 4x + 3$ funksiyası $[-1; 0]$ parçasında kəsilməzdir. $f(-1) = -2 < 0$ və $f(0) = 3 > 0$ olduğundan, Koşi teoreminə ($f(x)$ funksiyası $[a; b]$ parçasında kəsilməz və onun uc nöqtələrində müxtəlif işarəli qiymətlər alırsa, $[a; b]$ parçasının daxilində heç olmasa bir nöqtə var ki, funksiya həmin nöqtədə sıfıra çevrilir) görə $f(x)$ -in $[-1; 0]$ -də kökü vardır. $f(-0,6) = 0,384 > 0$ və

$f(-0,8) = -0,712 < 0$ olduğundan, $f(x)$ -in $[-0,8; -0,6]$ parçasında kökü var və 0,1 dəqiqliklə bu kök $x_0 = -0,7$ -dir.

344. $(x_1; y_1)$ və $(x_2; y_2)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin bucaq əmsalı $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ düsturu ilə hesablanır.

$f(x_1) = y_1 = 2^0 = 1$; $f(x_2) = y_2 = 2^1 = 2$ olduğundan $k = \frac{2-1}{1-0} = 1$.

345. $x \neq 1$ olduqda verilmiş funksiyanı $f(x) = \begin{cases} x-1, & x > 1 \text{ isə} \\ -(x-1), & x < 1 \text{ isə} \end{cases}$ şəklində yazaraq asanlıqla göstərmək olar ki, $x > 1$ olduqda $f'(x) = (x-1)' = 1$, $x < 1$ olduqda isə $f'(x) = (1-x)' = -1$. İndi $x_0 = 1$ nöqtəsində argumentin və funksiyanın artımına baxaq: $x = 1 + \Delta x$, $\Delta x = x - 1$;

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1 + \Delta x) - f(1) = f(x) - f(1) = |x - 1|$ olduğundan $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 1, & x > 1 \text{ olduqda,} \\ -1, & x < 1 \text{ olduqda} \end{cases}$. Buradan $x > 1$

olduqda $f'(1+0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1$, $x < 1$ olduqda

$f'(1-0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1$, $x < 1$ olduqda

$f'(1-0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-1) = -1$ alınır. Bu isə o deməkdir ki,

$f(x) = |x-1|$ funksiyası $x = 1$ nöqtəsində diferensiallanan deyil.

346. Hə. Məsələn, $f(x) = |x-2|$ və $g(x) = 6 - |x-2|$ funksiyalarının hər birinin $x = 2$ nöqtəsində törəməsi yoxdur. Lakin $f(x) + g(x) = 6$ funksiyasının bütün ədəd oxunda törəməsi var, yəni diferensiallandı.

347. Yox. Çünki verilmiş $y = f(x)$ funksiyanın x_0 nöqtəsində sıfırdan fərqli $f'(x)$ törəməsi varsa, onda bu funksiyanın tərsi olan $x = g(y)$ funksiyanın $y_0 = f(x_0)$ nöqtəsində törəməsi var və bu

törəmə $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ (1) düsturu ilə hesablanır. Buradan görünür

ki, $f'(x_0) > 0 \Rightarrow g'(y_0) > 0$. Deməli funksiyanın törəməsi müsbətdirsə, onun tərs funksiyanının törəməsi də müsbətdir.

$$348. \quad f'(x) = (\sin 2x - \sqrt{2}x)' = 2 \cos 2x - \sqrt{2}; \quad f'(x) = 0;$$

$$2 \cos 2x - \sqrt{2} = 0; \quad \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad \text{və} \quad \text{ya}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad f'(x) < 0 \quad \text{olarsa,} \quad 2 \cos 2x - \sqrt{2} < 0;$$

$$\cos 2x < \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ buradan } x \in \left(\frac{\pi}{8} + \pi k; \frac{7\pi}{8} + \pi k \right) k \in \mathbb{Z}.$$

$$349. 1) y' = (\arcsin(\sin x))' = \frac{(\sin x)'}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{\cos x}{|\cos x|}$$

2)

$$y' = (2^{\cos 2x})' = 2^{\cos 2x} \ln 2 (\cos 2x)' = 2^{\cos 2x} \ln 2 (-\sin 2x)(2x)' = -2 \cdot 2^{\cos 2x} \cdot \ln 2 \cdot \sin 2x =$$

$$= -\ln 2 \cdot \sin 2x \cdot 2^{\cos 2x+1}$$

3)

$$y' = (\sqrt{\log_7 x})' = \frac{1}{2\sqrt{\log_7 x}} \cdot (\log_7 x)' = \frac{\frac{1}{x \ln 7}}{2\sqrt{\log_7 x}} = \frac{1}{2x \ln 7 \sqrt{\log_7 x}}$$

350. Funksiyaların qrafiklərinin hansı bucaq altında kəsişdiyini müəyyən etmək üçün qrafiklərin kəsişmə nöqtəsində onlara çəkilən toxunanların arasındakı bucağı tapmaq lazımdır. Verilmiş $y = 12 - x$

və $y = 4\sqrt{x}$ funksiylarının kəsişmə nöqtəsinin absisini $12 - x = 4\sqrt{x}$ tənliyindən tapmaq olar. $x + 4\sqrt{x} - 12 = 0$. Buradan $\sqrt{x} = -6$, $\sqrt{x} = 2$ alınır, birinci tənliyin həlli yoxdur, ikinci tənlikdən isə $x = 4$. $y = 12 - x$ funksiyanının qrafikinə OX oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucağın tangensi absisi $x = 4$ olan

nöqtədə $tg\alpha = f'(x_0) = f'(4) = 1$ olduğundan $\alpha = 135^\circ$, $y = 4\sqrt{x}$ funksiyasının qrafikinin isə bu nöqtədə OX oxu ilə əmələ gətirdiyi bucağın tangensi $\left(f'(x) = \frac{z}{\sqrt{x}} \right)$. $tg\beta = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$ və $\beta = 45^\circ$

olduğundan $\alpha - \beta = 90^\circ$ alırıq. Bu verilmiş funksiyaların qrafiklərinə $x = 4$ nöqtəsində çəkilmiş toxunanlar arasındakı bucaqdır. Deməli verilmiş funksiyaların qrafikləri 90° bucaq altında kəsişirlər.

351. Funksiyanın uyğun törəmələri tapıb verilmiş tənlikdə yerinə yazmaq lazımdır.

352. $\omega(t)$ bucaq sürəti $\varphi(t)$ -nin t -yə görə törəməsinə bərabərdir. Odur ki, $\omega(t) = \varphi'(t) = 3t - 2$. $t = 5 \text{ san}$ anındakı bucaq sürəti isə $\omega(t) = 3 \cdot 5 - 2 = 13 \text{ rad / san}$ -dir.

353. $f(x) = \cos x$ qəbul etsək, $f'(x) = -\sin x$; $61^\circ = 60^\circ + 1^\circ$; $x_0 = 60^\circ$; $\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ ifadələrini $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ təqribi bərabərliyində nəzərə alıb $\cos 61^\circ = \cos 60^\circ + (-\sin 60^\circ) \cdot 1^\circ \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 0,5 - \frac{\pi\sqrt{3}}{360^\circ} = 0,5 - 0,0148 \approx 0,485$.

354. $J(t) = \left(t + \frac{2}{t} \right)' = 1 - \frac{2}{t^2}$; $J(t) = 0$; $1 - \frac{2}{t^2} = 0$; $t^2 = 2$; $t = \pm\sqrt{2}$; $t > 0$ olduğundan $t = \sqrt{2}$ san. anında cərəyan şiddəti sıfıra bərabər olar.

355. $f(x) = x^4 - 4x - 1$ funksiyası bütün ədəd oxunda kəsilməzdir. $f'(x) = 4x^3 - 4$ olduğundan $[1; +\infty)$ aralığında $f(x)$ funksiyası artan, $(-\infty; 1]$ aralığında isə azalandır. $[-1; 0]$ aralığı $f(x)$ funksiyasının azalma aralığına daxildir. Digər tərəfdən parçanın uc nöqtələrində $f(-1) = (-1)^4 - 4(-1) - 1 = 4 > 0$ və $f(0) = -1 < 0$, yəni funksiya əks işarəlidir. Hər hansı parçanın uc nöqtələrində verilmiş funksiya əks işarəli olduqda, bu parçada azalan və kəsilməz olarsa, belə funksiyanın qrafiki absis oxunu yalnız bir nöqtədə kəsər. Deməli, $x^2 - 4x - 1 = 0$ tənliyinin $[-1; 0]$ parçasında yeganə kökü var. Bu

kökü $f_1(x) = x^4$ və $f_2(x) = 4x + 1$ funksiyalarının grafiklərinin kəsişmə nöqtəsinin absisi kimi tapmaq olar.

356. 1) $f(0) = \sin 0^0 + \cos 0^0 = 1$; $f(\pi) = \sin \pi + \cos \pi = -1$;
 2) $f'(x) = \cos x - \sin x$; $f'(x) = 0$; $\cos x - \sin x = 0$; $\operatorname{tg} x = 1$;
 $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ və $[0; \pi]$ aralığına düşən kök $x_1 = \frac{\pi}{4}$ -dir. Onda

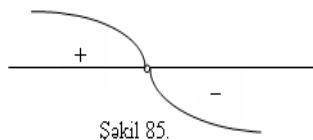
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}. \quad 3) \quad \text{Funksiyanın}$$

törəməsinin olmadığı nöqtə yoxdur. 4) $f(0) = 1$; $f(\pi) = -1$;
 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ qiymətlərini müqayisə etməklə alırıq ki,
 $\max_{[0; \pi]} f(x) = \sqrt{2}$, $\min_{[0; \pi]} f(x) = -1$.

357. 1) Funksiyanın təyin oblası: $D(f) = \mathbb{R}$; 2) $f(-x) \neq -f(x)$ və $f(-x) \neq f(x)$ olduğundan, funksiya nə təkdir, nə də cütdür; 3) Funksiya dövrü deyil; 4) Funksiya ordinat oxu ilə $(0; 1)$, absis oxu ilə isə $(1; 0)$ nöqtəsində kəşişir; 5) Verilmiş funksiya bütün ədəd oxunda kəsilməzdir; 6) Funksiyanın işarə sabitliyi aralıqları $f(x) > 0$ və $f(x) < 0$ bərabərsizliklərindən alınır ki, uyğun olaraq $x \in (-\infty; 1)$ və $x \in (1; +\infty)$ -dir (Şəkil 85);

7) Funksiyanın asimptotları yoxdur. 8) Funksiyanın artma,

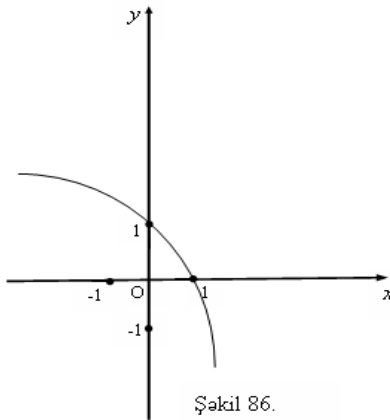
$$\text{azalma aralıqları } f'(x) = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}.$$



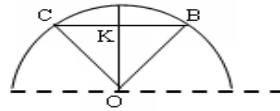
Şəkil 85.

$x \in \mathbb{R}$ üçün $f'(x) < 0$ olduğundan verilmiş funksiya bütün ədəd oxunda azalandır; 9) Funksiyanın ekstremum nöqtələri və ekstremumları yoxdur. $(-2; \sqrt[3]{9})$, $(0; 1)$,

$(2; -\sqrt[3]{7})$ əlavə nöqtələrindən və 1)-9) mərhələlərinin nəticələrindən istifadə edərək funksiyanın qrafikini qururuq (Şəkil 86).



Şəkil 86.



Şəkil 87.

358. Konusun radiusunu yarımkürənin radiusu ilə ifadə edək. (Şəkil 87). Konusun radiusu r , hündürlüyü h , yarımkürənin radiusu isə R olsun.

$\triangle BOK$ -dan $r^2 = R^2 - h^2$, $r^2 = R^2 - h^2$, burada $0 < r < R$, $0 < h < R$.

Konusun həcmi düsturunda $\left(V = \frac{\pi}{3} r^2 h \right)$ bu ifadəni nəzərə alsaq,

$$V = \frac{\pi}{3} h(R^2 - h^2) = \frac{\pi}{3} (hR^2 - h^3) \quad \text{alırıq.} \quad V(h) = \frac{\pi}{3} (hR^2 - h^3)$$

funksiyanın ən böyük qiymətini tapmaq lazımdır:

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} (R^2 - 3h^2) = 0, \quad h^2 = \frac{R^2}{3}, \quad h = \frac{R}{\sqrt{3}}, \quad \text{onda}$$

$$r^2 = R^2 - h^2 = R^2 - \frac{R^2}{3} = \frac{2R^2}{3}. \quad h = \frac{R}{\sqrt{3}} \quad \text{nöqtəsində törəmənin işarəsi}$$

“+”-dən “-”-yə dəyişdiyindən bu nöqtə maksimum nöqtəsidir. Onda

$$V(\max) = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{2R^2}{3} \cdot \frac{R}{3} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27} \quad R = 3 \quad \text{qiymətini}$$

sonuncu düsturda yerinə yazıb $V(\max) = 2\sqrt{3}\pi (sm^3)$ alırıq.

$$359. \quad f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{funksiyanın ibtidai funksiyanın}$$

ümumi ifadəsi $F(x) = -\cos x + C$ şəklindədir. $C = 0$ və $C = \frac{\pi}{2}$

götürməklə $F_1(x) = -\cos x$, $F_2(x) = -\cos x + \frac{\pi}{2}$ alırıq. Aşkardır ki, $F_2(x)$ funksiyasının qrafiki $F_1(x)$ -in qrafikindən ordinat oxu boyunca $\frac{\pi}{2}$ qədər paralel köçürməklə alınır. Eyni nəticəni belə mühakimə etməklə də almaq olar: $f(x) = \sin x$ funksiyasının $F_1(x) = -\cos x + C_1$ və $F_2(x) = -\cos x + C_2$ kimi iki ibtidai funksiyasını yazıq. Şərtə görə $F_2(x) - F_1(x) = C_2 - C_1 = \frac{\pi}{2}$ -dir. Buradan $C_2 = C_1 + \frac{\pi}{2}$. Yəni $F_1(x) = -\cos x + C_1$,

$$F_2(x) = -\cos x + C_1 + \frac{\pi}{2}. \quad \text{Burada } C_1 = 0 \quad \text{götürsək}$$

$$F_1(x) = -\cos x, \quad F_2(x) = -\cos x + \frac{\pi}{2}.$$

360. $x(t)$ funksiyası $\vartheta(t)$ -nin ibtidai funksiyası olduğundan $x(t) = \frac{2t^2}{2} - 3t + C = t^2 - 3t + C$. Şərtə görə $x(0) = 0$ olduğundan $C = 0$. Onda $x(t) = t^2 - 3t$ axtarılan funksiyadır.

361. $y = c_1(x - c_2)$ (1) tənliyini iki dəfə diferensiallayıb $y' = 2c_1(x - c_2)$ və $y'' = 2c_1$ (2) alırıq. (1) və (2) tənliklərindən C_1 və C_2 parametrlərini kənar edib axtarılan $2yy'' = (y')^2$ tənliyinə gəlirik. Asanlıqla göstərmək olar ki, (1) funksiyası bu tənliyi eyniliyə çevirir.

362. Hə. 263. $y^2 - xy + x^2 - c^2 = 0$ tənliyini y -ə görə kvadrat tənlik kimi həll edək: $y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4x^2 + 4c^2}}{2}$ və $y = \frac{x + \sqrt{4c^2 - 3x^2}}{2}$, $y = \frac{x - \sqrt{4c^2 - 3x^2}}{2}$ (1) alırıq. Buradan $y' = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{6x}{2\sqrt{4c^2 - 3x^2}} \right) = \frac{\sqrt{4c^2 - 3x^2} - 3x}{2}$ (2). (1) və (2) ifadələrini verilmiş diferensial tənlikdə yerinə yazdıqda

eynilik alırıq. Eyni qayda ilə $y = \frac{x - \sqrt{4c^2 - 3x^2}}{2}$ funksiyasından

törəmə aldıqda da həmin nəticəyə gəlirik.

364. $x'(t)$ və $x''(t)$ -ni tapaı. $x'(t) = \frac{0,4}{3} \cdot \cos\left(0,4t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{15} \cos\left(0,4t + \frac{\pi}{4}\right)$,
 $x''(t) = -\frac{2}{15} \cdot 0,4 \sin\left(0,4t + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{75} \sin\left(0,4t + \frac{\pi}{4}\right)$. Göründüyü kimi
 $x(t) = \frac{1}{3} \sin\left(0,4t + \frac{\pi}{4}\right)$ funksiyası $x''(t) + \frac{4}{25}x(t) = 0$ tənliyinin
 həllidir.

365. $y'' + 9y = 0$ olduğundan $\omega^2 = 9$ və $\omega = 3$. Verilmiş
 diferensial tənliyin həllini $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(3t + \varphi)$
 şəklində axtaraq. Onda $y' = 3A \cos(3t + \varphi)$. Şərtə görə $y(0) = 3$ və

$y'(0) = 9$ olduğundan $\begin{cases} A \sin \varphi = 3 \\ 3A \cos \varphi = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \varphi = \frac{3}{A} \\ \cos \varphi = \frac{3}{A} \end{cases}$. Onda $\operatorname{tg} \varphi = 1$,

$\varphi = \frac{\pi}{4}$. Digər tərəfdən $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \frac{9}{A^2} + \frac{9}{A^2} = \frac{18}{A^2}$. Odur ki,

$A^2 = 18$, $A = 3\sqrt{2}$. Beləliklə verilmiş diferensial tənliyin axtarılan
 həlli $y = 3\sqrt{2} \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$ şəklindədir.

Buradan y' və y'' -i tapıb y və y'' -in qiymətlərini verilmiş
 tənlikdə yerinə yazmaqla alınan nəticənin doğruluğunu yoxlamaq olar.

366. Şərtə görə $T_1 = 0^\circ S$ olduğundan cismin temperaturu
 $T'(t) = -KT(t)$ tənliyini ödəyir. Buradan $\frac{dT}{dt} = -KT$ və ya
 $\frac{dT}{T} = -k dt$. Bu bərabərlikdən integrallamaqla $\int \frac{dT}{T} = -k \int dt$ və ya
 $\ln|T| = -kt + C$ alırıq. Sonuncu bərabərlik cismin temperaturunun

$$= 1,2 \frac{t^2}{2} - 0,4 \cdot \frac{t^{-2}}{(-2)} + C_1 = 0,6t^2 + \frac{0,2}{t^2} + C_1 \quad \text{şərtə görə } v(1) = 3 \text{ m / san. Onda}$$

$$0,6 + 0,2 + C_1 = 3; \quad C_1 = 2,2. \quad v(t) = 0,6t^2 + \frac{0,2}{t^2} + 2,2 \quad \text{və}$$

$$S(t) = \int v(t) dt = \int \left(0,6t^2 + \frac{0,2}{t^2} + 2,2 \right) dt = 0,6 \cdot \frac{t^3}{3} - \frac{0,2}{t} + 2,2t. \quad 2$$

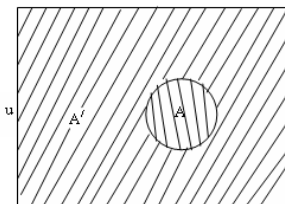
saniyədən 5 saniyəyədək zaman müddətində cismin getdiyi yol

$$\Delta S = S(5) - S(2) = 0,2(5^3 - 2^3) - 0,2 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right) +$$

$$+ 2,2(5 - 2) = 0,2 \cdot 117 + 0,2 \cdot 0,3 + 2,2 \cdot 3 = 23,4 + 0,06 + 6,6 = 30,06 \text{ (m)}.$$

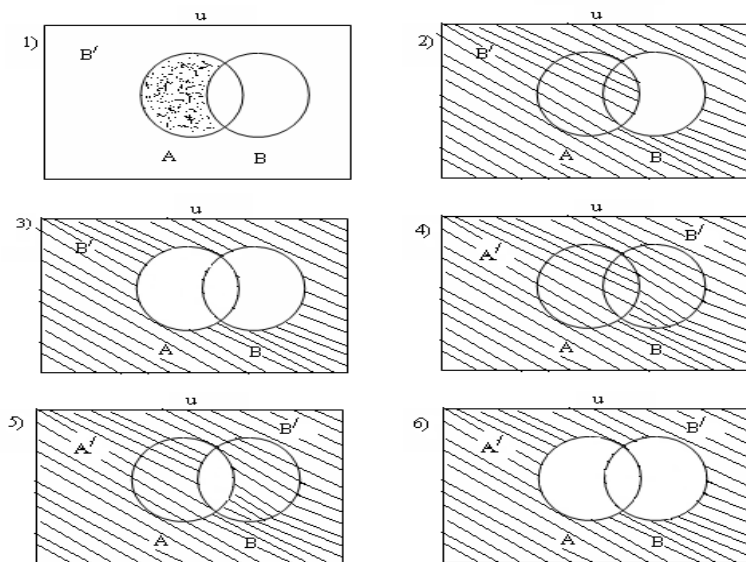
Son nəticəni müəyyən integralın tətbiqi ilə də almaq olar:

$$\Delta S = \int \left(0,6t^2 + \frac{0,2}{t^2} + 2,2 \right) dt = 30,06 \text{ (m)}.$$



Şəkil 90.

370. Adətən, konkret məsələləri həll edərkən baxılan çoxluqlar müəyyən bir U



Şəkil 91.

çoxluğunun alt çoxluqları olur. Belə çoxluğa universal və ya əsas

çoxluq deyilir. Qeyd olunan universal çoxluqda A -nın U -ya tamamlayıcısı A' ilə işarə edilir. Yəni $A' = A'_U = U \setminus A = \{x / x \in U, x \notin A\}$. Eylər-Ven diaqramları ilə universal çoxluqda A və A' çoxluqları əyani olaraq 90-cı şəkildəki kimi təsvir olunur. Məsələnin həllindən əvvəl bu deyilənləri şagirdlərə xatırlatmaq, sonra isə $(A \cap B)'$, $(A \cup B)'$, $A' \cup B'$, $A' \cap B'$ yazılışlarının uyğun olaraq A və B çoxluqlarının kəsişməsinin, birləşməsinin tamamlayıcıları, tamamlayıcılarının birləşməsi və kəsişməsi olduğunda diqqəti cəlb etmək lazımdır. İndi göstərilən xassələrin isbatını vermək olar: $x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ və ya $x \notin B \Leftrightarrow x \in A'$ və ya $x \in B' \Leftrightarrow x \in A' \cup B'$.

Analoji olaraq $x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ və $x \notin B \Leftrightarrow x \in A'$ və $x \in B' \Leftrightarrow x \in A' \cap B'$.

371. 91-ci şəkildə tələb olunan təsvirlər, 370-ci məsələdə isə $(A \cup B)' = A' \cap B'$ və $(A \cap B)' = A' \cup B'$ olduğu göstərilir.

372. $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = \{x | (x \in A \setminus C) \wedge x \notin (B \setminus C)\} = \{x | x \in A \wedge x \in C' \wedge x \in B' \vee x \in C\} = \{x | x \in A \wedge x \in C' \wedge x \in B' \vee x \in A \wedge x \in C' \wedge x \in C\} = \{x | x \in (A \cap C' \cap B') \vee x \in (A \cap C' \cap C)\} = \{x | x \in (A \cap C' \cap B') \vee x \in \emptyset\} = \{x | x \in A \wedge x \in (B \cup C)'\} = \{x | x \in A \wedge x \in B' \vee x \in C'\} = (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$

373.

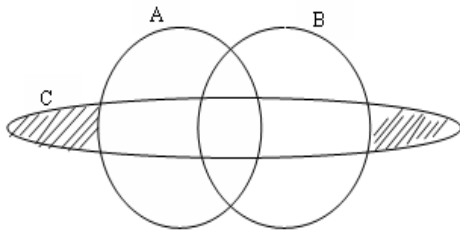
$(A/B)' = \{x | x \in U \wedge [x \in A/B]'\} = \{x | x \in U \wedge [x \in A \vee x \notin B]'\} = \{x | x \in U \wedge$

$x \notin A' \vee x \in B\} = \{x | x \in U \wedge$

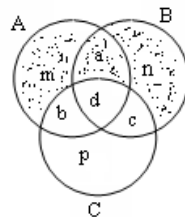
$x \in (A' \cup B)\} = \{x | x \in (A' \cup A) \vee x \in (A' \cup B)\} = \{x | x \in A' \vee x \in A \vee x \in B\} = \{x | x \in A' \cup (A \cap B)\} = A' \cup (A \cap B)$

374. $(A \cap B) \cap (B' \cap A) = (A \cap A) \cap (B \cap B') = A \cap \emptyset = \emptyset$.

375. Ştrixlənmiş hissə A və B çoxluqlarının birləşməsi olan $A \cup B$ çoxluğunun C -də olmayan hissəsi, yəni $C / (A \cup B)$ fərqidir (Şəkil 92).



Şəkil 92.



Şəkil 93.

376. A , B , C çoxluqlarının birləşməsindəki hissələri m, a, n, b, d, c, p ilə işarə edək (Şəkil 93). C çoxluğunun $A \cup B$ çoxluğunda olmayan hissəsinin, yəni $(A \cup B) \setminus C$ çoxluğunun elementləri sayın tapmalıyıq. Məlumdur ki,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$$

və $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ [3, səh 156, teorem 2]. Şərtə görə

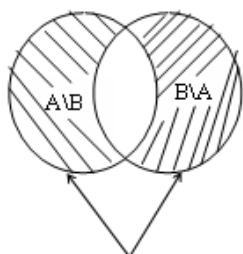
$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) = 30 \quad \text{və}$$

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 22. \quad \text{Onda } n(c) + 22 - n(A \cap C) - n(B \cap C) = 30,$$

$$n(A \cap C) + n(B \cap C) = 32 - 30 = 2 \text{ alırıq.}$$

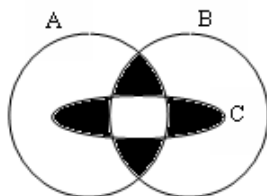
Deməli, $n(A \cap C) + n(B \cap C) = 2$ və ya $d + c + b = 2$. Onda $p = n(c) + 2 = 8 + 2 = 10$ və $m + a + n = 30 - 10 = 20$ olar. Deməli, $n[(A \cup B) \setminus C] = m + a + n = 20$.

377. A və B çoxluqlarının simmetrik fərqi $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ kimi təyin edilir (Şəkil 94). Ona görə $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B') \cup (B \cap A') = (A' \cap B) \cup (B' \cap A) = (A' \setminus B') \cup (B' \setminus A') = A' \Delta B'$.



$A \Delta B$

Şəkil 94.



Şəkil 95.

$$378. [(A \cap B) \cup C] \setminus (A \cap B \cap C).$$

379. Rəşional və irrasional ədədlər çoxluğunun hər biri həqiqi ədədlər çoxluğunun kəsişməyən alt çoxluqlarıdır. Yəni $Q \subset R$, $I \subset R$ və $Q \cap I = \emptyset$, $Q \cup I = R$. Deməli, həqiqi ədədlər çoxluğunu rəşional və irrasional ədəd çoxluğu üzrə iki sinifə ayırmaq olar.

380. İlk 200 natural ədədlər çoxluğunu U ilə (baxılan məsələdə universal çoxluq), 3-ə, 5-ə və 7-yə bölünən ədədlər çoxluğunu isə uyğun olaraq A , B və C ilə işarə edək. Onda 3, 5 və 7 rəqəmlərinin heç birinə bölünməyən ədədlərin

$$x = n[U \setminus (A \cup B \cup C)] = n(U) - n(A \cup B \cup C) = n(u) - n(A) - n(B) - n(C) + n(A \cap B) + n(A \cap C) +$$

$$+ n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) \text{ olar. } A \cap B \text{ çoxluğu həm 3-ə, həm}$$

də 5-ə bölünən, yəni 15 bölünən; $A \cap C$ çoxluğu həm 3-ə, həm də 7-yə bölünən, yəni 21-ə bölünən, $B \cap C$ çoxluğu isə həm 5-ə, həm də 7-yə bölünən, yəni 35-ə bölünən ədədlər, $A \cap B \cap C$ çoxluğu isə həm 3-ə, həm də 7-yə, yəni 105-ə bölünən ədədlər çoxluğudur.

$$n(u) = 200; \quad n(A) = \left\lceil \frac{200}{3} \right\rceil = 66; \quad n(B) = \left\lceil \frac{200}{5} \right\rceil = 40;$$

$$n(C) = \left\lceil \frac{200}{7} \right\rceil = 28;$$

$$n(A \cap B) = \left[\frac{200}{15} \right] = 13;$$

$$n(A \cap C) = \left[\frac{200}{21} \right] = 9;$$

$$n(B \cap C) = \left[\frac{200}{35} \right] = 5;$$

$$n(A \cap B \cap C) = \left[\frac{200}{105} \right] = 1\text{-dir.}$$

Onda axtarılan ədəd $x = 200 - 66 - 40 - 28 + 13 + 9 + 5 - 1 = 92$ olar.

381. Riyaziyyat dərəcəyində iştirak edən şagirdlər çoxluğunu A , fizika dərəcəyində iştirak edən şagirdlər çoxluğunu B ilə işarə edək, onda hər iki dərəcədə iştirak edən şagirdlər çoxluğu $A \cap B$ olar. Onda $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 90 + 80 - 40 = 130$, yəni şagirdlərin 130 nəfəri riyaziyyat və fizika dərəcələrinin heç olmasa birində iştirak edir. Deməli, $150 - 130 = 20$ nəfər şagird adı çəkilən dərəcələrin heç birində iştirak etmir.

382.

$$A \times (B \setminus C) = \{x \mid x \in A \vee x \in B \setminus C\} = \{x \mid x \in A \vee x \in B \vee x \notin C\}.$$

Digər

tərəfdən

$$(A \times B) \setminus (A \times C) = \{x \mid x \in (A \times B) \vee x \notin (A \times C)\} = \{x \mid [x \in A \vee x \in B] \vee [x \notin A \vee x \notin C]\} = \{x \mid x \in A \vee x \in B \vee x \notin C\}$$

olduğundan $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

383. Məlumdur ki, rəqəmlərinin cəmi 3-ə bölünən ixtiyari ədəd 3-ə bölünür. abcdefgh şəklində 8 rəqəmli ədədin də 3-ə bölünməsi üçün onun rəqəmləri cəmi 3-ə bölünməlidir. Bu ədədi 7 rəqəminin hər birini 3 üsulla seçmək olar. Yəni bu rəqəmlərdən hər biri ya 4, ya 5 ya da 9 ola bilər. Qalan bir rəqəmi isə bir üsulla seçmək mümkündür. Sadəlik üçün həmin bir rəqəmi sonuncu rəqəm hesab etmək olar. Onda bütün üsulların sayı $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 3^7$ -dir. Ümumi nəticənin konkretləşdirilməsinə də şagirdlərin diqqətini cəlb etmək olar. İlk 7 rəqəm 4, 5, 9, 4, 5, 9, 4 isə 8-ci rəqəm 5 olmalıdır. Onda alınan 45945945 ədədi 3-ə bölünər. Həmin qayda ilə alınmış 7 rəqəmli ədəd 4594595 olarsa 8-ci rəqəm 4 olmalıdır və s.

384. Belə üçrəqəmli ədədlərin sayı $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ -dir.
Rəqəmlərin sayı 5

olduğundan, hər rəqəm $60 : 5 = 12$ dəfə təkrar olunur. Üçrəqəmli ədəd $\overline{abc}$ olsun. Onda $\sum \overline{abc} = 100a + 10b + c = 100 \underbrace{(1+2+3+4+5)}_{12 \text{ dəfə}} + 10 \underbrace{(1+2+3+4+5)}_{12 \text{ dəfə}} + \underbrace{1+2+3+4+5}_{12} =$
 $= 15 \cdot 12(100 + 10 + 1) = 180 \cdot 111 = 19980$.

385. $\frac{1}{93}, \frac{2}{93}, \dots, \frac{92}{93}$ məxrəci 93 olan düzgün kəsrləridir. Bu kəsrlərdən sürətlərində 3 və 31 vuruqları olanlar ixtisar olunandır. 92-yə qədər olan natural ədədlər işərisində 3-ə bölünən ədədlərin sayı $\frac{92}{3} = 30 + \frac{2}{3}$ olduğundan, 30-dur. 31-ə bölünən ədədlərin sayı isə $\frac{92}{31} = 2 + \frac{30}{31}$ olduğundan 2-dir. Deməli, $30+2=32$ sayda kəsir ixtisar olunan, $92-32=60$ sayda kəsir isə ixtisar olunmayandır.

386. Məsələnin şərtindən alınır ki, tək ədədlər də tək nömrəli yerlərdə olur.

Baxılan çoxluqda cüt və tək ədədlər çoxluqlarından hər birini $n!$ üsulla düzmək olar. Onda vurma prinsipinə görə axtarılan bütün mümkün üsulların sayı $n!n! = (n!)^2$ olar.

387. Verilmiş çoxluğun iki elementini yanaşı qoyaraq onları bir element hesab edək. Onda bu çoxluğun elementləri sayı $(n-1)$ olar. Bu elementlərdən düzəlmiş bütün permutasiyaların sayı $(n-1)!$ -dir. Yanaşı elementləri isə öz aralarında $2! = 2$ üsulla düzmək olar. Onda verilmiş iki elementli yanaşı olan bütün permutasiyaların sayı $2(n-1)!$ olar. Digər tərəfdən n elementdən düzələn bütün permutasiyaların sayı $n!$ -dir. Odur ki, verilmiş iki elementli yanaşı olmayan permutasiyaların sayı $n! - 2(n-1)! = (n-1)!n - 2(n-1)! = (n-1)!(n-2)$ -dir.

388.

$n! = 362880 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \times$
 $\times 8 \cdot 9 = 9!; n! = 9!, n = 9$.

389. Verilmiş 6 rəqəmdən düzələn bütün üçrəqəmli ədədlərin sayı (rəqəmləri təkrarlanmayan) A_6^3 , bunlardan 3-ə bölünənləri isə 123, 126, 135, 213, 234, 246, 345, 456-dir. 3-ə bölünən belə ədədlərin hər birindən düzələn permutasiyaların sayı $3! = 6$ olduğundan, bütün belə 3-ə bölünən üçrəqəmli ədədlərin sayı $8 \cdot 6 = 48$, axtarılan ədədlərin sayı isə $A_6^3 - 48 = 6 \cdot 5 \cdot 4 - 48 = 72$ olar.

390. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 rəqəmlərindən düzələn və rəqəmləri təkrarlanmayan bir, iki və üç rəqəmli ədədlərin sayı uyğun olaraq A_9^1, A_9^2, A_9^3 -dir. Onda 1000 dən kiçik olan belə ədədlərin sayı $A_9^1 + A_9^2 + A_9^3 = 9 + 9 \cdot 8 + 9 \cdot 8 \cdot 7 = 585$ -dir.

391. 1) 3 qız yanaşı olduqda onları bir nəfər kimi götürsək $7+1=8$ nəfər alınar. 8 nəfəri $8!$ üsulla sıraya düzmək olar. Digər tərəfdən qızlar öz aralarında $3!$ üsulla sıraya düzülə bilər. Onda axtarılan müxtəlif variantların sayı $8!3!$ olar. 2) Qızların yanaşı olmaması üçün onların hər biri iki oğlan arasında olmalıdır. 7 oğlan arasında 6 yer olduğundan, bu yerlərdə 3 qızı A_6^3 üsulla sıraya düzmək olar. Digər tərəfdən 7 oğlan öz aralarında 7 üsulla düzülə bilər. Onda tələb olunan bütün mümkün variantların sayı $7! A_6^3$ olar.

392. Baxılan funksiyanın təyin oblastı

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3 \leq 7-x \\ 7-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 5 \\ x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 5 \text{ olduğundan, } D(f) = \{3; 4; 5\}.$$

Onda $x = 3; 4; 5$ qiymətlərində uyğun olaraq A_{7-x}^{x-3} funksiyanının qiymətləri 1; 3; 2-yə bərabər olur. Deməli verilmiş funksiyanın qiymətlər çoxluğu $E(f) = \{1, 2, 3\}$ -dir.

393. 3 meyvə daxil olan hədiyyədə 1 alma 2 nar, 2 alma 1 nar, 3 alma ola bilər. Bir alma 2 nardan ibarət 3 meyvə daxil olan hədiyyəni $C_5^1 \cdot C_6^2$ üsulla, iki alma bir nardan ibarət 3 meyvə daxil olan hədiyyəni $C_5^2 \cdot C_6^1$ üsulla, 3 almadan ibarət hədiyyəni isə $C_5^3 \cdot C_6^0$ üsulla hazırlamaq mümkündür. Onda bütün hədiyyələrin sayı $C_5^1 \cdot C_6^2 + C_5^2 \cdot C_6^1 + C_5^3 \cdot C_6^0 = 75 + 60 + 10 = 145$ olar.

394. Verilmiş çoxluğun elementlərindən düzəlmiş üçrəqəmli, rəqəmləri təkrarlanmayan, ədədlərin sayı $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ -dir. Ədədlərin 500-dən kiçik olması üçün 1, 3 və 4 rəqəmləri ilə başlanmalıdır. Bu rəqəmlərin hər birilə başlayan üçrəqəmli ədədlərin sayı A_5^2 -dir. Onda 1, 3, 4 rəqəmlərinin hamısı ilə başlayan üçrəqəmli ədədlərin sayı $3A_5^2 = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ dir. Eyni qayda ilə ədədlərin 700-dən böyük olması üçün bu ədədlər 8 və 9 rəqəmlərilə başlamalıdır. Bu rəqəmlərlə başlayan ədədlərin sayı isə $2A_5^2 = 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ olar.

395. 1) Cəmi $8+6=14$ kürəcik olduğundan, onlardan 5 kürəciyi $C_{14}^5 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 14 \cdot 13 \cdot 12 = 2002$ üsulla seçmək olar. 2) 3 ağ kürəciyi C_8^3 üsulla, 2 qırmızı kürəciyi C_6^2 üsulla seçmək mümkündür olduğundan, vurma prinsipinə görə, bütün üsulların sayı $C_8^3 \cdot C_6^2 = 840$ olar. 3) 5 ağ kürəciyi $C_8^5 = C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ üsulla seçmək mümkündür. 4) Kürəciklərin eyni rəngli olması üçün ya onların 5-də ağ və ya 5-də qırmızı olmalıdır. Belə üsulların sayı $C_8^5 + C_6^5 = C_8^3 + C_6^1 = 56 + 6 = 62$ -dir.

396. Funksiyanın təyin oblastı,

$$\begin{cases} 0 \leq 2x - 8 \leq x + 1 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 8 \geq 0 \\ 2x - 8 \leq x + 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 9 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 9$$

olduğundan, $D(f) = \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ -dir. $x = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ olduqda $f(x) = C_{x+1}^{2x-8}$ funksiyası uyğun olaraq $C_5^0 = 1$, $C_6^2 = 15$, $C_7^4 = C_7^3 = 35$, $C_8^6 = C_8^2 = 28$, $C_9^8 = C_9^1 = 9$, $C_{10}^{10} = 1$ qiymətlərini alır. Deməli baxılan funksiyanın qiymətlər çoxluğu $E(f) = \{1; 9; 15; 28; 35\}$ -dur.

397. 1) 15 sayğacdən 10-nu $C_{15}^{10} = C_{15}^5 = 3003$ sayda üsulla seçmə imkanı var. 2) Montyor ilk iki sayğacı C_2^2 üsulla, digər 8 sayğacı isə

C_{13}^8 üsulla quraşdırıldığından, onun $C_2^2 \cdot C_{13}^8 = C_{13}^8 = C_{13}^8$ sayda seçmə imkanı olur. 3) Montyor ya birinci ya da ikinci sayğacı quraşdırılmalıdırsa, belə üsulların sayı C_2^1 -dir. O digər 9 sayğacı C_{13}^9 üsulla quraşdırdığından, seçmə imkanının sayı $C_2^1 \cdot C_{13}^9 = 2C_{13}^9$ -dir.

4) Montyor ilk 5 sayğacdən 3-nü C_5^3 üsulla, digər 7 sayğacı isə C_{10}^7 üsulla quraşdırdığından, onun $C_5^3 \cdot C_{10}^7$ sayda seçmə imkanı var.

5) O, ilk 5 sayğacdən ən azı üçünü quraşdırmalıdırsa, o ya 3 sayğacı, ya 4, ya da 5 sayğacı quraşdırmalıdır. Birinci halda seçmə imkanlarının sayı $C_5^3 \cdot C_{10}^7$, ikinci halda $C_5^4 \cdot C_{10}^6$, üçüncü halda isə $C_5^5 \cdot C_{10}^5$ sayda olduğundan, bütün üsulların sayı $C_5^3 \cdot C_{10}^7 + C_5^4 \cdot C_{10}^6 + C_5^5 \cdot C_{10}^5$ olur.

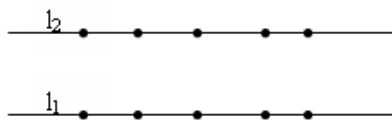
6) O, son 5 sayğacın ən azı 3-nü quraşdırmalıdırsa, deməli son 5 sayğacdən ya heç birini, ya birini, ya ikisini, ya da üçünü quraşdırmalıdır. Birinci halda seçmə imkanlarının sayı $C_5^0 \cdot C_{10}^5$, ikinci halda $C_5^1 \cdot C_{10}^9$, üçüncü halda $C_5^2 \cdot C_{10}^8$, dördüncü halda isə $C_5^3 \cdot C_{10}^7$ sayda olduğundan, bütün üsulların sayı $C_5^3 \cdot C_{10}^7 + C_5^2 \cdot C_{10}^8 + C_5^1 \cdot C_{10}^9 + C_5^0 \cdot C_{10}^5$ olur.

398. 1) 1-ci kompüter 3 informasiyanı C_{12}^3 üsulla, 2-ci kompüter 3 informasiyanı C_9^3 üsulla, 3-cü kompüter 3 informasiyanı C_6^3 üsulla, 4-cü kompüter son 3 informasiyanı C_3^3 üsulla ala bildiyindən bütün üsulların sayı $C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3$ olar.

2) Kompüterlərdən biri 6 informasiyanı C_{12}^6 üsulla, 2-ci kompüter 2 informasiyanı C_6^2 üsulla, 3-cü kompüter 2 informasiyanı C_4^2 üsulla, 4-cü kompüter isə son iki informasiyanı C_2^2 üsulla ala bildiyindən, bütün üsulların sayı $C_{12}^6 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2$ -dir.

3) Kompüterlərdən hansısa 6 informasiya qəbul etməlidir. Bu 4 kompüterdən ixtiyari biri ola bildiyindən, onları C_4^1 üsulla seçmək olar. Hər bir seçilmiş kompüter üçün isə məsələn 2) variantında olduğu kimi həll edildiyindən, bütün üsulların sayı $C_4^1 \cdot C_{12}^6 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2$ olar.

399. Üçbucaqları iki qayda ilə qurmaq olar (Şəkil 96).



Şəkil 96.

I halda üçbucağın bir təpə nöqtəsi l_1 düz xətti üzərində, digər iki təpə nöqtəsi isə l_2 düz xətti üzərində götürülə bilər, II halda isə üçbucağın bir təpə nöqtəsi l_2 düz xətti üzərində, digər iki təpə nöqtəsi isə l_1 düz xətti üzərində götürülə bilər. I halda n nöqtədən bir nöqtəni C_n^1 üsulla, m nöqtədən iki nöqtəni C_m^2 üsulla seçmək olar, onda üçbucaqların sayı $C_n^1 \cdot C_m^2$ -dir. II halda m nöqtədən bir nöqtəni C_m^1 , n nöqtədən iki nöqtəni C_n^2 üsulla seçmək mümkündür, onda üçbucaqların sayı $C_m^1 \cdot C_n^2$ olar. Beləliklə, iki halda birlikdə qurulan bütün üçbucaqların sayı $C_n^1 C_m^2 + C_m^1 C_n^2$ olar.

400. Ümumiyyətlə $(x + a)^m$ binomunun açılışında $(k + 1)$ -ci hədd $T_{k+1} = (-1)^k C_m^k x^{m-k} a^k$ düsturu ilə hesablanır. Oudur ki, $(\sqrt{x} - \sqrt{2})^{18}$ binomunun açılışında $(k + 1)$ -ci həddi $T_{k+1} = (-1)^k C_{18}^k (\sqrt{x})^{18-k} (\sqrt{2})^k$ şəkildə yazmaq olar. Şərtə görə $(\sqrt{x})^{18-k} = x^8$, onda $x^{\frac{18-k}{2}} = x^8$, $k = 2$. Deməli axtarılan hədd $T_{2+1} = C_{18}^2 x^8 \sqrt{2} = 153\sqrt{2} x^8$ və ya $T_3 = 153\sqrt{2} x^8$ -dir.

401. Binomun açılışında $(k + 1)$ -ci hədd $T_{k+1} = C_9^k (\sqrt{3})^{9-k} (\sqrt[3]{2})^k = C_9^k \cdot 3^{\frac{9-k}{2}} \cdot 2^{\frac{k}{3}}$ olduğundan, həddin tam ədəd olması üçün $9-k$ cüt ədəd olmalıdır. Bunun üçün $k = 1, 3, 5, 7$ olmalıdır. Digər tərəfdən k ədədi 3-ə bölünməlidir. Bu isə yalnız $k=3$ olduqda mümkündür. Beləliklə,

binomun ayrılışında tam olan hədd $T_{3+1} = C_9^3 \cdot 3^3 \cdot 2 = 54C_9^3 = 4536$ -dir.

402. Verilmiş binomun açılışında $(k+1)$ -ci hədd $T_{k+1} = C_{124}^k (\sqrt{3})^{124-k} (\sqrt[4]{5})^k = C_{124}^k \cdot 3^{\frac{124-k}{2}} \cdot 5^{\frac{k}{4}}$ olduğundan, hədlərin tam ədəd olması üçün k ədədi 4-in böləni yəni, $k = 4n$ olmalıdır. Şərtə $0 \leq k \leq 124$; $0 \leq 4n \leq 124$; $0 \leq n \leq 31$ -dir. Deməli ayrılışın 32 həddi təməldir. $k=4n$ bərabərliyindən alınır ki, $n = 0, 1, 2, \dots, 31$ olduqda $k = 0, 4, 8, \dots, 124$ olur. Deməli k -in bu qiymətlərində alınan hədlər tam ədədlərdir. Belə hədlərin sayı isə qeyd etdiyimiz kimi 32-dir.

403. $(\sqrt{5} + \sqrt{2}x)^{20}$ binomunun açılışında $(k+1)$ -ci hədd $T_{k+1} = C_{20}^k (\sqrt{5})^{20-k} \cdot (\sqrt{2}x)^k = C_{20}^k \cdot 5^{\frac{20-k}{2}} \cdot 2^{\frac{k}{2}} \cdot x^k$ dir. İndi $a_k = C_{20}^k \cdot 5^{10-\frac{k}{2}} \cdot 2^{\frac{k}{2}}$ əmsallarından ən böyüyünü tapmaq üçün $a_{k-1} \leq a_k$, yəni $C_{20}^{k-1} \cdot 5^{10-\frac{k}{2}} \cdot 2^{\frac{k-1}{2}} \leq C_{20}^k \cdot 5^{10-\frac{k}{2}} \cdot 2^{\frac{k}{2}}$ bərabərsizliyini həll etmək lazımdır. Sonuncu bərabərsizliyin hər tərəfini $5^{10-\frac{k}{2}} \cdot 2^{\frac{k-1}{2}}$ ifadəsinə bölsək $C_{20}^{k-1} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \leq C_{20}^k \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ və ya $\frac{20! \cdot \sqrt{5}}{(k-1)!(21-k)!} \leq \frac{20! \cdot \sqrt{2}}{k!(20-k)!}$ bərabərsizliyini alırıq. Buradan $\frac{\sqrt{5}}{21-k} \leq \frac{\sqrt{2}}{k}$ və ya $k \leq 7(\sqrt{10} - 2)$. Beləliklə, $k = 0, 1, \dots, 7$ olduqda $a_{k-1} \leq a_k$ və $k \geq 8$ olduqda isə $a_{k-1} > a_k$ bərabərsizlikləri ödənilir. Deməli ən böyük əmsal $\max_{0 \leq k \leq 8} a_k = a_7 = C_{20}^7 \cdot 5^{6,5} \cdot 2^{3,5} = C_{20}^7 \cdot 5^6 \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = C_{20}^7 \cdot (5^2)^3 \cdot 2^3 \cdot (5 \cdot 2)^{\frac{1}{2}} = C_{20}^7 (25 \cdot 2)^3 \cdot 10^{\frac{1}{2}} = C_{20}^7 50^3 \sqrt{10}$.

404. Məlumdur ki, n dərəcəli binomda binomial əmsalların cəmi 2^n -dir. Yəni $\sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.

Doğrudan da $(a+b)^n$ binomunun açılışında $a=b=1$ götürsək
 $(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$ alarıq. Deməli, istənilən çoxhədlinin əmsalları cəmi bu çoxhədlinin $x=1$ olduqda qiymətinə bərabərdir. Odur ki, $x=1$ olduqda $\left(3\sqrt{2}x - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^8 = \left(3\sqrt{2} - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^8 = \left(\frac{3 \cdot 2 - 5}{\sqrt{2}}\right)^8 = \frac{1}{16}$ olduğundan baxılan çoxhədlinin əmsalları cəmi $\frac{1}{16}$ -ə bərabərdir.

405. 1) Nyuton binomu düsturunda $a=1, b=x$ götürüb
 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$ eyniliyini alarıq. Bu eyniliyin hər tərəfinin x dəyişəninə görə törəməsini alsaq $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k C_n^k x^{k-1}$ eyniliyini alarıq. Bu eynilikdə $x=1$ hesab edib $\sum_{k=0}^n k C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$ (1) eyniliyini

alırıq. Digər tərəfdən, $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k C_n^k x^{k-1}$ eyniliyinin hər tərəfindən yenə x dəyişəninə görə törəmə alsaq $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^n k(k-1) C_n^k x^{k-2}$ eyniliyi alınar. Buradan $x=1$

olduqda $\sum_{k=0}^n k(k-1) C_n^k = n(n-1) \cdot 2^{n-2}$ (2) eyniliyi alınır. (2)

eyniliyini $\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k - \sum_{k=0}^n k C_n^k = n(n-1) \cdot 2^{n-2}$ şəklində yazmaq olar.

Burada (1) eyniliyini nəzərə alıb

$$\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k = n \cdot 2^{n-1} + n(n-1) \cdot 2^{n-2} = n \cdot 2^{n-2} (2 + n - 1) = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$$

eyniliyini alırıq. Burada $k=0$ olduqda cəmin 1-ci toplananı sıfırdır.

Odur ki, $\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$ tələb edilən eyniliyi alırıq.

$$2) \sum_{k=0}^n (k+1)C_n^k = \sum_{k=0}^1 kC_n^k + \sum_{k=0}^1 C_n^k \quad \text{bərabərliyində} \quad \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$

və $\sum_{k=0}^n C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$ eyniliklərini nəzərə alsaq,

$$\sum_{k=0}^n (k+1)C_n^k = n \cdot 2^{n-1} + 2^n = 2^{n-1}(n+2) \text{ tələb edilən eyniliyi alırıq.}$$

406. Məlumdur ki, $(x+1)^n = x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + nx + 1$.
Bu bərabərliyi $(x+1)^n = \left(x^{n-2} + nx^{n-3} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-4} + \dots + \frac{n(n-1)}{2}\right)x^2 + nx + 1$ və ya
 $(x+1)^n = Ax^2 + nx + 1$ şəklində yazmaq olar. Burada
 $A = x^{n-2} + nx^{n-3} + \dots + \frac{n(n-1)}{2}$. Analoji olaraq $(x-1)^n = Bx^2 + (-1)^{n-1}nx + (-1)^n$
yaza bilərik. Onda $a_n = (x+1)^n + (x-1)^n = x^2(A+B) + nx(1+(-1)^{n-1}) + 1+(-1)^n$
olar. n -in tək qiymətlərində bu ifadə $a_n = cx^2 + 2nx$ şəklinə düşür,
burada $C = A + B$. Xüsusi halda $a_n = 6^n + 8^n$ isə, onda
 $a_n = (7-1)^n + (7+1)^n$ yazırıq, $n = 83$ üçün
 $a_{83} = c \cdot 7^2 + 2 \cdot 83 \cdot 7 = 49c + 1162$ alınır. Bu ifadənin 49-a bölünmə-
sindən alınan qalıq, 1162-nin 49-a bölünməsindən alınan qalığa
bərabərdir. Bu isə 35-dir.

$$407. \text{Aşkardır ki, } \sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n}. \text{ Məlumdur}$$

ki, $(a+b)^n$ binomunun açılışında cüt nömrəli binomial əmsalların
cəmi tək nömrəli binomial əmsalların cəminə, bunların hər biri isə 2^{n-1} -
ə bərabərdir. Bu xassəyə əsasən $(a+b)^{2n}$ binomunun açılışında cüt
nömrəli binomial əmsalların cəmi $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}$
-dir.

408. Nyuton binomuna əsasən

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) A$$

şkardır ki, $1 - \frac{1}{n} < 1$, $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) < 1, \dots, \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < 1$ odur ki,

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}. \quad \text{Digər tərəfdən}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2^2}, \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} < \frac{1}{2^3}, \dots, \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{olduğuna görə,}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right). \quad \text{Bu bərabərsizliyin sağ tərəfində}$$

mötərizə içərisindəki ifadə vurulmuş $q = \frac{1}{2}$, birinci həddi $b_1 = 1$ olan

həndəsi silsilədir. Odur ki, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3$. Deməli,

$$n \in N \quad \text{üçün} \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

409. Binomun açılışında üçüncü hədd

$$T_{2+1} = C_n^2 (x^2)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} C_n^2 x^{2n-4} \text{-dir. Şərtə görə } \frac{1}{16} C_n^2 = 31. \text{ Buradan}$$

$$\frac{n(n-1)}{32} = 31 \text{ və ya } n = 32.$$

410. Binomun açılışında $(k+1)$ -ci hədd düsturunda, yəni

$$T_{k+1} = C_{50}^k a^{50-k} b^k \text{ bərabərliyində } |a| = \sqrt{3}|b| \text{ olduğunu nəzərə alsaq}$$

$$T_{k+1} = C_{50}^k 3^{25-\frac{k}{2}} b^{50} \text{ alırıq. Məsələnin şərtinə görə } \begin{cases} T_{k+1} > T_k \\ T_{k+1} > T_{k+2} \end{cases}$$

olmalıdır. Burada $T_k = C_{50}^{k-1} 3^{25-\frac{k-1}{2}} b^{50}$ və $T_{k+2} = C_{50}^{k+1} 3^{25-\frac{k+1}{2}} b^{50}$ qiymətlərini yerinə yazıb

$$\begin{cases} \frac{50!}{k!(50-k)!} > \frac{50! \sqrt{3}}{(k-1)!(51-k)!} \\ \frac{50!}{k!(50-k)!} > \frac{50!}{(k+1)!(49-k)!} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{k} > \frac{\sqrt{3}}{51-k} \\ \frac{\sqrt{3}}{50-k} > \frac{1}{k+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < \frac{51}{\sqrt{3}+1} \\ k > \frac{50-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \end{cases} \Rightarrow \frac{50-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} < k < \frac{51}{\sqrt{3}+1}$$

$$\text{alırıq. } \frac{50-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = 17,68, \quad \frac{51}{\sqrt{3}+1} = 18,63 \text{ olduğundan } k=18 \text{ olar. Deməli}$$

$$T_{\max} = C_{50}^{18} b^{50} \cdot 3^{16}.$$

411. Məlumdur ki, $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$. Bu düstura əsasən:

$$C_{n+1}^{m+1} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!};$$

$$C_{n+1}^m = \frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!}; \quad C_{n+1}^{m-1} = \frac{(n+1)!}{(m-1)!(n-m+2)!}. \quad \text{Onda}$$

$$C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^m = 5 : 5 \quad \text{bərabərliyindən} \quad \frac{n-m+1}{m+1} = 1 \quad \text{və ya} \quad n = 2m;$$

$$C_{n+1}^m : C_{n+1}^{m-1} = 5 : 3 \quad \text{bərabərliyindən} \quad \frac{n-m+2}{m} = \frac{5}{3} \quad \text{və ya}$$

$$8m - 3n = 6; \quad \begin{cases} n = 2m \\ 8m - 3n = 6 \end{cases} \quad \text{sistemindən isə } m = 3, n = 6 \text{ alınır.}$$

$$412. \quad C_{n+2}^2 + C_{n+1}^2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2} = (n+1)^2. \quad \text{Deməli}$$

$$C_{n+2}^2 + C_{n+1}^2 = (n+1)^2 \quad (1)$$

Fərz edək ki, (1) bərabərliyi $n=k$ üçün doğrudur, yəni $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = C_{k+1}^2 + 2(C_k^2 + C_{k-1}^2 + \dots + C_2^2)$. İsbat edək ki, verilmiş $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = C_{n+1}^2 + 2(C_n^2 + C_{n-1}^2 + \dots + C_2^2)$ (2) bərabərliyi $n=k+1$ üçün də doğrudur. Bunun üçün onu (1) eyniliyi ilə tərəf-tərəfə toplayaq. Onda

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = C_{k+2}^2 + 2(C_{k+1}^2 + C_k^2 + \dots + C_2^2)$ alınar. Beləliklə (1) bərabərliyi $n=k$ dan $n=k+1$ -ə keçdikdə də doğrudur. Bilavasitə yoxlama ilə alınır ki, $n=2$ olduqda da doğrudur. Riyazi induksiya prinsipinə görə (2) bərabərliyi ixtiyari natural $n \geq 2$ üçün doğrudur.

413. 1)

$abcd, abdc, abcl, ablc, abcf, abfc, abdl, abld, ablf, abfl, abdf, abfd$ aranjemanların sayı $A_4^2 = 12$ dir. a, b hərfləri göstərilən iki elementləri ortasında və sonunda da ola bilər. Deməli axtarılan aranjemanların sayı $3 \cdot A_4^2 = 36$ olar.

2) a, b hərifləri sıraları ilə fərqlənməklə daxil olduqda isə tələb olunan aranjemanların sayı $2 \cdot 3 \cdot A_4^2 = 72$ olar.

414. 1) $A_6^4 - A_5^4 = 240$ olar (a daxil olmayanları ümumi saydan çıxırıq)

2) $A_5^3 = 60$.

415. Qabaqriq n bucaqlıda dörd təpə nöqtəsi bir kəsişmə nöqtəsini təyin edir. Odur ki, tələb olunan nöqtələrin sayı C_n^4 -dir.

$$416. \bar{P}_{1,2,3,2,1,1} = \frac{(1+2+3+2+1+1)!}{1!2!3!2!1!1!} = \frac{10!}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 151200.$$

$$417. \bar{P}_{3,2} = \frac{(3+2)!}{3!2!} = \frac{5!}{2 \cdot 3 \cdot 2} = 10.$$

$$418. \bar{P}_{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210.$$

$$419. \bar{P}_{3,2,5} = \frac{10!}{3!2!5!} = 2520.$$

420. Məsələnin şərtinə görə yazılan yeddi rəqəmli ədədlərin hər birində 2, 0, 4 və 3 rəqəmləri uyğun olaraq 2, 1, 1 və 3 dəfə daxil olmalıdır. Bu rəqəmlərdən düzəldilə bilən hər bir yeddirəqəmli ədəd, birinci yerdə sıfır olan hallardan başqa, verilmiş rəqəmlərdən düzələn təkrarlı permutasionlardır.

Odur ki, axtarılan yeddirəqəmli ədədlərin sayı

$$\bar{P}_{3,2,1}^{(7)} - \bar{P}_{3,2,1}^{(6)} = \frac{7!}{3!2!1!} - \frac{6!}{3!2!1!} = 420 - 60 = 360 \text{ olar.}$$

$$421. \text{ Bu üsulların sayı } \bar{C}_{10}^{20} = C_{10+20-1}^{20} = C_{29}^{20} = C_{29}^9 = 10015005 \text{-dir.}$$

$$422. \bar{C}_{10}^{12} = C_{21}^{12} - C_{21}^9 = 220.$$

$$423. \bar{C}_p^n = C_{n+p-1}^n.$$

$$424. \text{ Axtarılan ədədlərin sayı: } 1) \bar{A}_3^5 = 3^5 = 243; \quad 2) \bar{A}_4^3 = 4^3 = 64 \text{ olar.}$$

425. Əşyalardan hər-hansı birini götürək. Onu istənilən qutuya qoymaq olar. Beləliklə bu halda k imkan vardır. İndi başqa əşyalardan

birini götürək. Birinci əşyanın hansı qutuda olmasından asılı olmayaraq onu da ixtiyari qutuda yerləşdirmək olar. Beləliklə əşya 2 olarsa, onları k qutuya $k \cdot k = k^2$ üsulla qoymaq olar. 3 əşyanı k qutuya k^3 üsulla qoymaq mümkündür. n əşya olduğundan, onları k qutuya k^n üsulla qoymaq olar. Bu isə verilmiş k elementdən hər birində n element olmaqla düzəldilə bilən bütün mümkün müxtəlif təkrarlı aranjemanların sayıdır.

426. Məsələnin həllinin iki üsulunu göstərək.

I. Məsələdə 10000-dən kiçik bütün ədədlərin sayını tapmaq lazım gəlir. Deməli birrəqəmli, ikirəqəmli, üçrəqəmli və dördərəqəmli ədədlərin hamısının birlikdə sayı tapılmalıdır. Hər bir birrəqəmli ədədi əvvəlki üç rəqəmi sıfır olan dörd rəqəmlə yazı bilərik. Məsələn, 2 rəqəmini 0002 kimi yazmaq olar, sıfır rəqəmi 0000 kimi yazıla bilər. Hər bir ikirəqəmli ədədi də əvvəlki iki rəqəmi sıfır olan dörd rəqəm vasitəsilə yazı bilərik. Məsələn, 35 ədədini 0035 kimi yazırıq. Eləcə də üçrəqəmli ədədləri də birinci rəqəmi sıfır olan dörd rəqəm vasitəsilə yazı bilərik. Məsələn, 314 ədədi 0314 kimi yazılır.

Beləliklə, baxılan məsələnin tələbi belə də qoyula bilər: məsələnin şərtindəki 8 rəqəmdən göstərilən şəkildə neçə dördərəqəmli ədəd düzəltmək olar? Axtarılan ədədlərin sayı $\overline{A}_8 = 8^4 = 4096$ -dir.

II. Birrəqəmli ədədlərin sayı 8-dir. İkirəqəmli ədədlərin sayı isə $7 \cdot 8$ -dir. Doğrudan da birinci rəqəm sıfırdan başqa verilən rəqəmlərdən hər biri ola bilər. İkinci rəqəm isə verilən 8 rəqəmin hər biri ola bilər. Deməli, verilən rəqəmlərdən düzələn bütün müxtəlif ikirəqəmli ədədlərin sayı $\overline{A}_8^2 - \overline{A}_8^1 = 64 - 8 = 56 = 7 \cdot 8$.

Eyni mühakiməyə əsasən üçrəqəmli ədədlərin sayı $\overline{A}_8^3 - \overline{A}_8^2 = 8^3 - 8^2 = 7 \cdot 8^2$, dördərəqəmli ədədlərin sayı isə $\overline{A}_8^4 - \overline{A}_8^3 = 8^4 - 8^3 = 7 \cdot 8^3$ olar. Beləliklə, tələb olunan bütün ədədlərin sayı $8 + 7 \cdot 8 + 7 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^3 = 8^4 = 4096$.

427. Axtarılan ədədlərin son iki rəqəmi 12, 24, 32, 44, 52 olmalıdır. Son iki rəqəm müəyyən olduqdan sonra, əvvəlki iki rəqəmi $\overline{A}_5^2$ üsulla seçmək olar. Odur ki, axtarılan bütün dördərəqəmli ədədlərin sayı $5\overline{A}_5^2 = 125$ olar.

428. $\overline{A}_2^8 = 2^8 = 256$.

429. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ (1) funksiyası üçün

$$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 \dots + na_nx^{n-1} \quad (2)$$

$$f''(x) = 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3x + 4 \cdot 3 \cdot a_4x^2 + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} \quad (3)$$

$$f'''(x) = 3 - 2 \cdot 1a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4x + \dots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} \quad (4)$$

və s. yazmaq olar. (1), (2), (3) və (4) bərabərliklərində $x = 0$ götürsək $f(0) = a_0$, $f'(0) = 1 \cdot a_1$, $f''(0) = 1 \cdot 2a_2$,

$$f'''(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 \text{ və buradan } a_0 = f(0), a_1 = \frac{f'(0)}{1}, a_2 = \frac{f''(0)}{1 \cdot 2},$$

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ alırıq. Eyni qayda ilə } a_4 = \frac{f^{IV}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, a_5 = \frac{f^V(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

və s. ixtiyari natural k ədədi üçün isə riyazi induksiya metoduna görə

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \quad (5) \text{ alınır. (5) bərabərliyini } 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k = k! \text{}$$

olduğunu nəzərə almaqla $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ (6) şəkildə yazmaq olar. $f^{(0)}(x)$

-yazılışı və ya $f(x)$ funksiyasının sıfırıncı törəməsi ifadəsi ilə sadəcə olaraq $f(x)$ funksiyasının özünü nəzərdə tutsaq və $0! = 1$ qəbul etsək, onda $k=0$ üçün də (6) düsturu doğrudur.

430. Əvvəlki məsələdən (429) istifadə etmək lazımdır. Bu halda $f(x) = (x+1)^{10}$, $f'(x) = 10(x+1)^9$; $f''(x) = 10 \cdot 9(x+1)^8$; $f'''(x) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot (x+1)^7$. Odur ki, $f'''(0) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1^7 = 720$ 429

məsələsinin həllindəki (6) düsturuna əsasən $\frac{f'''(0)}{3!} = \frac{720}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$

alırıq. Deməli $(x+1)^{10}$ çoxhədlisində x^3 - i əmsalı 120-dir.

431. $f(x) = (3x-1)^9$; $f'(x) = 9(3x-1)^8 \cdot 3 = 27(3x-1)^8$; $f''(x) = 27 \cdot 8(3x-1)^7 \cdot 3 = 648(3x-1)^7$ Odur ki, tələb edilən əmsal $\frac{f''(0)}{2!} = \frac{648 \cdot (-1)^7}{1 \cdot 2} = -324$ olar.

432. Bu halda $f(x) = (x+a)^n$ çoxhədlisinə baxmaq lazımdır, burada a verilmiş ədəddir. Həmin çoxhədlinin sərbəst həddi $f(0) = a^n$ -dir. x -in qüvvətlərinin əmsallarını tapmaq üçün 429 məsələsinin həllindəki (6) düsturundan istifadə edək. Bu düstura əsasən x^k -nin əmsalı $\frac{f^k(0)}{k!}$ -dir, burada $f^k(0)$ ifadəsi $x=0$ olduqda $f(x)$

çoxhədlisinin k -ci törəməsinin qiymətidir. Bu qiyməti tapaq. Bu halda

$$f(x) = (x+a)^n;$$

$$f'(x) = n(x+a)^{n-1};$$

$$f''(x) = n(n-1)(n-2)(x+a)^{n-3}$$

$$f^k(x) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(x+a)^{n-k}$$

Odur ki, $f^k(0) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a^{n-k}$. Deməli,

$$f(x) \text{ çoxhədlisində } x^k\text{-in əmsalı } \frac{f^k(0)}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} a^{n-k}$$

olar. Burada $\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = C_n^k$ olduğunu nəzərə alsaq

$f(x)$ çoxhədlisində x^k - in əmsalı $C_n^k a^{n-k}$ olduğunu alırıq. Onda x - in əmsalı $C_n^1 a^{n-1}$, x^2 -nin əmsalı $C_n^2 a^{n-2}$ olur və s. Odur ki, verilən çoxhədlini

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 + \dots + C_n^{n-1} a x^{n-1} + C_n^n x^n \quad (1)$$

şəkildə yazmaq olar. Qeyd edək ki, $(a+x)^n$ -in ayrılışında sayca $(k+1)$ -ci toplanan $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} x^k$ şəklindədir. $(a-x)^n$ halı üçün isə $T_{k+1} = (-1)^k C_n^k a^{n-k} x^k$ -dən istifadə etmək lazımdır. (1) düsturuna Nyuton binomu düsturu ¹, bu düsturdakı $1, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}, C_n^n$ əmsallarına isə binomal əmsallar deyilir.

¹ (1) düsturunu hələ Nyutondan əvvəl Yakov Bernulli (1654-1705) ciddi olaraq isbat etmişdir. Bernulli dünyaya 11 görkəmli riyaziyyatçı vermiş

433. A, B, C hadisələrindən A və B, B və C, A və C hadisələrinin eyni zamanda baş verməsi uyğun olaraq $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$ kimi yazılır. Bu hadisələrdən heç olmasa ikisinin baş verməsi hadisəsinin riyazi ifadəsi isə $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ -dir.

434. Ən çoxu bir gerbin yuxarı düşməsi hadisələri $\{(grrr), (rgrr), (rrgr), (rrrg), (rrrr)\}$ -dir, burada gerb və rəqəm sözlərinin baş hərfləri göstərilmişdir.

435. Elementar hadisələr fəzası:

$$u = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (5, 6), (5, 7), (6, 7)\}.$$

436. Qabda olan kürəciklərin sayı 12 olduğundan, bir kürənin seçilmə sınağında elementar hadisələr fəzasının elementləri sayı $\overline{C}_{12}^1 = C_{12+1-1}^1 = C_{12}^1 = 12$ -dir. Doğrudan da QQQQQMMMMAAA göründüyü kimi elementləri 5, 4 və 3 dəfə təkrarlanan təkrarlı kombinezondur. Belə kombinezonların sayı isə göstəriləndiyi kimi C_{12}^1 -dir.

437. 1) Üç atəşin hər üçünün hədəfə dəyməsi hadisəsi: $A_1 \cap A_2 \cap A_3$; 2) Üç atəşin hədəfdən yayınması hadisəsi: $\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}$, 3) heç olmasa bir atəşin hədəfə dəyməsi hadisəsi: $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

438. $\{GR, RG, RR\}$ hadisəsi baş vermişdir. Bu isə RR hadisəsinin əksi olan hadisədir.

439. Məsələnin şərtindən görünür ki, 600 pomidordan 500-ü bitmişdir. Onda əkilən ştilin bitməsi ehtimalının təqribi qiyməti $\frac{500}{600} = \frac{5}{6}$ -dir.

440. I, II və III zərin atılmasında alınan nəticələr çoxluğunu A, B və C ilə işarə edək. $A = B = C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olduğundan, eyni imkanlı hadisələrin sayı $u = A \times B \times C$ Dekart hasilinin elementlərinin

isveçrəli alimlər ailəsinin üzvlərindən biri olmuşdur. Nyuton isə n-in kəsir və mənfii qiymətləri üçün də (1) düsturunu tətbiq etmək ideyasını vermişdir. Bu ideyadan ali riyaziyyatın bir çox məsələlərinin həllində geniş istifadə edilir.

sayı üçün yazılmış ifadədən tapılır:

$$n(u) = n(A) \cdot n(B) \cdot n(C) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216.$$

İndi bu hadisə üçün əlverişli nəticələrin sayını tapaq. I, II və III zərin atılmasında üst üzə düşən xalların sadə ədəd olması çoxluğunu A_1, B_1 və C_1 ilə işarə etsək, $A_1 = B_1 = C_1 = \{2, 3, 5\}$ olduğundan əlverişli nəticələrin sayı $n(u_1) = n(A_1) \cdot n(B_1) \cdot n(C_1) = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ olar.

441. 1) Öyrənilmiş 149 sualdan 5 suala cavab verməklə alınan üsulların sayı C_{149}^5 olduğundan, tələbə biletin bütün suallarını bilir hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı C_{149}^5 -dir.

Digər tərəfdən, imtahana salınmış bütün sualların sayı 150 olduğundan, bu hadisə üçün bütün mümkün nəticələrin sayı C_{150}^5 olur. Onda həmin hadisənin ehtimalı

$$p = \frac{C_{149}^5}{C_{150}^5} = \frac{149 \cdot 148 \cdot 147 \cdot 146 \cdot 145}{150 \cdot 149 \cdot 148 \cdot 147 \cdot 146} = \frac{145}{150} = \frac{29}{30} \text{ -dur.}$$

2) Tələbənin bilmədiyi 150-149=1 sualın düşməsi C_5^1 üsulla baş verə bildiyindən, onun biletin bir sualını bilmir hadisəsinin ehtimalı $\frac{C_5^1}{C_{150}^5} = \frac{5! \cdot 5}{150 \cdot 149 \cdot 148 \cdot 147 \cdot 146} = \frac{1}{149 \cdot 28 \cdot 147 \cdot 146}$ -dir. Bu isə olduqca kiçik ədəddir.

442. 1) B, R, C, Ə həriflərindən düzələ bilən bütün təkrarsız permutasiyaların sayı $4!=24$ olduğundan, çıxarılan kartlarda “cəbr”

sözünün alınması hadisəsinin ehtimalı $p = \frac{1}{24}$ olar. 2) “Riyaziyyat”

sözündə i, a, y hərifləri uyğun olaraq 2, 2, 3 dəfə təkrar olur, qalan həriflərin hər biri isə bu sözə bir dəfə daxildir. Odur ki, 10 hərifdən düzələn bütün müxtəlif təkrarlı permutasiyaların sayı

$$p_{1,2,3,2,1,1}^{-(10)} = \frac{10!}{1!2!3!2!1!1!} = 151200 \text{ olduğundan, çıxarılan kartlarda}$$

“Riyaziyyat” sözünün alınması hadisəsinin ehtimalı $p = \frac{1}{151200}$ -dir.

443. 12 qırmızı kürəcikdən 3 kürəciyi C_{12}^3 üsulla, 20-12=8 sayda ağ kürədən 5-3=2 kürəciyi C_8^2 üsulla seçmək olar. Digər tərəfdən 20 kürəcikdən 5 kürəciyi C_{20}^5 üsulla seçmək olar. Odur ki, məsələnin şərtində göstərilən hadisənin ehtimalı $p = \frac{C_{12}^3 \cdot C_8^2}{C_{20}^5} = \frac{385}{969}$ olar.

444. Həllin iki üsulunu göstərək.

1) 0,1,2,3,...,9 rəqəmlərinin hər birini 10 üsulla seçmək mümkündür. Onda iki rəqəmi $10 \cdot 10 = 100$ üsulla seçmək olar. Məsələnin şərtinə görə telefonun son iki rəqəmlərində 00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 kimi 10 sayda variant yoxdur. Qalan $100-10=90$ variantdan yalnız biri doğru olduğundan, yığılan nömrənin düzgün olması ehtimalı $p = \frac{1}{90}$ -dir.

2) 0,1,2,3,...,9 rəqəmlərindən düzəldilən bütün mümkün ikirəqəmli ədədlərin sayı $\overline{A}_{10} = 10^2 = 100$. Bu ədədlərdən rəqəmləri eyni olan ikirəqəmli ədədlərin sayını çıxdıqda ($100-10=90$) alınan variantlardan yalnız biri doğru olduğundan tələb olunan ehtimal $p = \frac{1}{90}$ -dir.

445. 1) Kürəciklər müxtəlifdir hadisəsinin ehtimalı $p = \frac{C_{10}^1 \cdot C_6^1 \cdot C_8^1}{C_{24}^3} = \frac{60}{253}$, 2) Kürəciklərin 3-ü də qırmızıdır hadisəsinin ehtimalı isə $p = \frac{C_{10}^3 \cdot C_6^0 \cdot C_8^0}{C_{24}^3} = \frac{15}{253}$ -dir.

446. 1) E_1 və ya E_3 hadisələrindən heç olmasa birinin baş verməsi hadisəsi $E_1 \cup E_3$ deməkdir. $E_1 \cap E_3 = \emptyset$ olduğundan $p(E_1 \cup E_3) = p(E_1) + p(E_3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$.

2) Eyni qayda ilə E_2 və ya E_4 hadisələrindən heç olmasa birinin baş verməsi hadisəsi $E_2 \cup E_4$ kimi yazılır. $E_2 \cap E_4 = \emptyset$ olduğundan $p(E_2 \cup E_4) = p(E_2) + p(E_4) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$.

3) E_5 və E_6 hadisələrinin heç birinin baş verməməsi hadisəsi $\overline{E_5 \cup E_6}$ kimi yazılır. $E_5 \cap E_6 = \emptyset$ olduğundan

$$p(E_5 \cup E_6) = p(E_5) + p(E_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}. \quad \text{Onda}$$

$$\overline{p(E_5 \cup E_6)} = 1 - p(E_5 \cup E_6) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}.$$

$$447. p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) = 1. \text{ Buradan}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 1 - p(C). \text{ Digər tərəfdən De Morqan}$$

qanununa görə $(A \cup B)' = A' \cap B'$ olduğundan

$$p(A' \cap B') = p(A \cup B)' = 1 - p(A \cup B) = 1 - 1 + p(C) = p(C). \quad \text{Deməli}$$

$$p(C) = p(A' \cap B') = \frac{3}{7}.$$

448. 1) $p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) = \frac{1}{7} + \frac{5}{14} + \frac{1}{2} = 1$ olduğundan, bu hal mümkünür.

2) $p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5}{3} > 1$ olduğundan, bu hal mümkün deyil.

449. Oğlanların sayı 3 olduğundan 15 nəfər dərnək üzvündən xüsusi qabiliyyətli 8 nəfərin 1-in oğlan olması hadisəsinin sayı $C_3^1 \cdot C_{12}^7$, 8 nəfərin heç birinin oğlan olmaması şərti elə mümkün halların sayı isə C_{12}^8 -dir. Odur ki, əlverişli nəticələrin sayı $C_3^1 C_{12}^7 + C_{12}^8$, bütün mümkün halların sayı isə C_{15}^8 -dir. Deməli, dərnək üzvlərindən xüsusi qabiliyyətli 8 nəfərdən ən azı 1-in oğlan olması hadisəsinin ehtimalı

$$p = \frac{C_3^1 \cdot C_{12}^7 + C_{12}^8}{C_{15}^8} = \frac{3 \cdot \frac{12!}{7!5!} + \frac{12!}{8!4!}}{\frac{15!}{8!7!}} = \frac{29}{65} \text{ olar.}$$

$$450. p(A \cap B) + p(\overline{A \cap B}) = 1 \text{ olduğundan}$$

$$p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{3}{15} \text{ Digər tərəfdən}$$

$$p(\overline{A \cup B}) = \overline{p(A \cap B)} \text{ -dir. Odur ki, } p(\overline{A \cup B}) = \frac{3}{15}.$$

451. $P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1$ və ya $P(A \cup B)+P(C)+P(D)=1$,
buradan $P(D)=1-P(A \cup B)-P(C)=1-\frac{1}{3}-\frac{3}{8}=\frac{5}{12}$.

452. 1) 1, 2, 3, ..., 10 ədədlərindən 5-tək, 5-i isə cütdür. Cəmin cüt olması üçün iki hal mümkündür. I seçilmiş ədədlərin üçü də cütdür. Bu üsulların sayı C_5^3 -dir. II seçilmiş üç ədədin ikisi tək, biri cütdür. Belə üsulların sayı $C_5^2 \cdot C_5^1$ olar. Onda seçilmiş üç ədədin cəminin cüt olması üçün əlverişli üsulların sayı $C_5^3 + C_5^2 C_5^1$ -dir. Digər tərəfdən ilk 10 natural ədəddən üç-üç götürməklə düzələn bütün kombinozonların sayı C_{10}^3 olduğundan məsələnin şərtində tələb olunan ehtimal

$$p = \frac{C_5^3 + C_5^2 C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} + 5 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!}} = \frac{1}{2} \text{ -dir.}$$

2) İlk 10 natural ədəddən təsadüfi olaraq götürülmüş hər hansı üç ədədin hasilinin cüt olması üçün onlardan ən azı birinin cüt olması kifayətdir. Belə üçlüklərin sayını tapmaq üçün 10 ədəddən hər dəfə üçünü götürməklə düzələn bütün kombinozonların sayından, üç sayda tək ədədin hasili şəklində düzələn bütün üçlüklərin sayını çıxmaq lazımdır. Tək ədədlərin sayı 5 olduğundan, hasili cüt ədəd olan bütün üçlüklərin sayı $C_{10}^3 - C_5^3$ olar. Onda hasilin cüt olması ehtimalı

$$p = \frac{C_{10}^3 - C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} + 5 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!}} = \frac{10 + 50}{120} = \frac{1}{2}.$$

453. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Buradan

$$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = \frac{7}{8} + \frac{1}{4} - \frac{5}{8} = \frac{7 + 2 - 5}{8} = \frac{1}{2}.$$

Onda

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

454. Qutudan çıxarılan kürəcik sarı rəngdə deyilsə, o ya qırmızı, ya da yaşıl rəngdədir. Belə kürəciklərin sayı $14+10=24$ -dür. Qırmızı kürəciklərin sayı 14 olduğundan, çıxan kürəciyin qırmızı olması ehtimalı $p = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$ -dir.

455. 8 elementli çoxluğun bütün 6 elementli alt çoxluqlarının sayı C_8^6 -dir. Bunlardan 4 elementinin olmadığı alt çoxluqların sayı C_7^6 -dir. Onda təsadüfən çıxarılan karta 4 elementi yerləşməyən alt çoxluğun çıxması ehtimalı $P = \frac{C_7^6}{C_8^6} = \frac{C_7^1}{C_8^2} = \frac{7}{\frac{8 \cdot 7}{2}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ olar.

456. İkinci zərdə hər hansı xalın düşmə ehtimalı, birinci zərdə düşən xaldan asılı olmayaraq $\frac{1}{6}$ -dir. Bilmək lazımdır ki, birinci zərdə də 4 xalın düşməsi ehtimalı $\frac{1}{6}$ -dir.

457. Dəmir pulu atarkən rəqəm üzünün düşməsi hadisəsi A, zəri atarkən tək xalın düşməsi hadisəsi B olsun. Dəmir pulun iki üzü olduğundan, rəqəm üzünün düşməsi hadisəsinin ehtimalı $P(A) = \frac{1}{2}$ -

dir. Zər atılarkən tək xalın düşməsi ehtimalı $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ olur. Digər

tərəfdən pulun və zərin atılması nəticəsində yaranan elementar hadisələr fəzasının elementləri sayı $2 \cdot 6 = 12$, əlverişli halların sayı isə üç $\{(R,1), (R,3), (R,5)\}$ olduğundan $P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ olur. Həm də

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Deməli $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ olduğundan

A və B hadisələri, yəni “rəqəm düşdü” və “tək xal düşdü” hadisələri asılı deyil.

458. Məlumdur ki, $0 < P(B) < 1$ olduqda

$P(A/B) \cdot P(B) + P(A \setminus \overline{B})P(\overline{B})$ (1). Bununla əlaqədar [3]-də Teorem

3-ün nəticəsinə baxmalı. Şərti ehtimalın tərifinə görə [3, səh 205].

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (2) \text{ və } P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \quad (3).$$

(2) və (3) –ü (1)-də nəzərə alsaq

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cdot P(B) + \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \cdot P(\bar{B}) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}).$$

Deməli $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$. Onda buradan

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$. A və B hadisələri asılı olmadığından

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Onda

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}).$$

Çünki, [3]-dəki Teorem 1-ə görə istənilən B hadisəsi və onun əksi $\bar{B}$ hadisəsi üçün $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$ -dir. Beləliklə, $P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$ olduğundan A və $\bar{B}$ hadisələri asılı deyil.

459. Üç qutudakı bütün ağ kürəciklərin sayı $5+4+7=16$ -dır. İkinci qutuda 4 ağ kürəcik olduğundan, qutuların birindən çıxan ağ kürəciyin ikinci qutudan çıxması ehtimalı $P = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ olur.

460. I tüfənglə hədəfi vurma ehtimalı 0,2 olduğundan, atıcı x sayda sınaqdan 0,2 x –ində hədəfi vurur. Eyni qayda ilə digər dörd tüfənglə x sayda atəş edərək atıcı bunlardan 0,3 x ; 0,4 x ; 0,5 x ; 0,6 x dəfəsində hədəfi vurur. Bütün mümkün atəşlərin sayı 5 x , hədəfə dəyən atəşlərin sayı 0,2 x +0,3 x +0,4 x +0,5 x +0,6 x =2 x olduğundan, tüfəngdən bir atəşlə hədəfi vurma ehtimalı $P = \frac{2x}{5x} = 0,4$ olur.

461. Sıra və yerlərin nömrələri cəmin aşağıdakı cədvəldə göstərək.

Cədvəl 1.

yer sıra	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Sıra və sıradakı yerlərin nömrələri cəminin cüt olması hadisəsini A ilə bu hadisənin əksi olan cəmin tək olması hadisəsini $\bar{A}$ ilə işarə edək. A və $\bar{A}$ hadisələri uyğun olaraq cüt-cüt uyuşmayan $A_2, A_4, \dots, A_{20}$ və $A_3, A_5, \dots, A_{19}$ hadisələrinə ayrılır. Onda toplama teoreminə görə

$$P(A) = P(A_2) + P(A_4) + \dots + P(A_{20}),$$

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_5) + \dots + P(\bar{A}_{19}) \quad \text{olar. Cədvəldən görünür ki,}$$

$$P(A_2) = P(20) = \frac{1}{100};$$

$$P(A_4) = P(A_{18}) = \frac{3}{100};$$

$$P(A_6) = P(A_{16}) = \frac{5}{100};$$

$$P(A_8) = P(A_{14}) = \frac{7}{100};$$

$$P(A_{10}) = P(A_{12}) = \frac{9}{100}.$$

Odur

ki,

$$P(A) = 2 \left(\frac{1}{100} + \frac{3}{100} + \frac{5}{100} + \frac{7}{100} + \frac{9}{100} \right) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}.$$

$P(\bar{A})$ ehtimalını da bu qaydada hesablamaq olar. Ona görə ki, yenə cədvəldən göründüyü kimi $P(\bar{A}_3) = P(\bar{A}_{19}) = \frac{2}{100}$;

$$P(\bar{A}_5) = P(\bar{A}_{17}) = \frac{4}{100}; \quad P(\bar{A}_9) = P(\bar{A}_{13}) = \frac{8}{100}; \quad P(\bar{A}_{11}) = \frac{10}{100};$$

$$P(\bar{A}_7) = P(\bar{A}_{15}) = \frac{6}{100}. \quad \text{Onda}$$

$$P(\bar{A}) = 2 \left(\frac{2}{100} + \frac{4}{100} + \frac{6}{100} + \frac{8}{100} \right) + \frac{10}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

Lakin bizi maraqlandıran cəmin tək olması hadisəsi A hadisəsinin əksi olduğundan, onun ehtimalı $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ olduğunu az hesablama aparmaqla tapa bilərik. Şagirdlərin hər iki üsulu bilməsi yaxşı olar.

Beləliklə, sıra və sıradakı yerin nömrələri cəminin cüt və ya tək olması eyni ehtimallıdır. Hər ikisi $\frac{1}{2}$ -ə bərabərdir.

462. Məsələ 461-ə analogi həll edilir. 1) uyğun 2 cədvəlini düzəldək. Bu cədvəldən görünür ki,

Cədvəl 2.

yer sıra	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(A_2) = P(A_{12}) = \frac{1}{36};$$

$$P(A_4) = P(A_{10}) = \frac{3}{36};$$

$$P(A_6) = P(A_8) = \frac{5}{36}.$$

Odur ki, cüt-cüt uyuşmayan A_2, A_4, A_6, A_8 hadisələrinə ayrılan A hadisəsinin $P(A)$ ehtimalı $P(A) = \left(\frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} \right) \cdot 2 = \frac{9}{36} \cdot 2 = \frac{1}{2}$ -dir.

Eyni qayda ilə cüt-cüt ortaq hissələri olmayan $\bar{A}_3, \bar{A}_5, \bar{A}_7, \bar{A}_9, \bar{A}_{11}$ hadisələrinə ayrılan $\bar{A}$ hadisəsinin ehtimalı hesablanır. Cədvəl 2-dən görünür ki, $P(\bar{A}_3) = P(A_{11}) = \frac{2}{36}$; $P(\bar{A}_5) = P(\bar{A}_9) = \frac{4}{36}$; $P(\bar{A}_7) = \frac{6}{36}$. Odur ki,

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{2}{36} + \frac{4}{36} \right) \cdot 2 + \frac{6}{36} = \frac{12}{36} + \frac{6}{36} = \frac{1}{2} \text{ və ya daha az hesablama ilə}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{2}. \text{ Beləliklə, sıra və sıradakı yerin nömrələri cüt və}$$

ya tək olması eyni ehtimalıdır. Hər iki halda ehtimal $\frac{1}{2}$ -ə bərabərdir.

2) Eyni qayda ilə cədvəl 3-ü düzəldək.

Cədvəl 3.

yer sıra \	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	9
3	4	5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9	10	11
5	6	7	8	9	10	11	12
6	7	8	9	10	11	12	13
7	8	9	10	11	12	13	14

Bu cədvəldən görünür ki, A və $\bar{A}$ hadisələri uyğun olaraq cüt-cüt uyuşmayan $A_2, A_4, A_6, A_8, A_{10}, A_{12}$ və $\bar{A}_3, \bar{A}_5, \bar{A}_7, \bar{A}_9, \bar{A}_{11}$ hadisələrinə ayrılır. Onda toplama teoreminə görə

$$P(A) = P(A_2) + P(A_4) + \dots + P(A_{12}),$$

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_5) + \dots + P(\bar{A}_{11}). \text{ Yenə cədvəl 3-dən görünür}$$

$$\text{ki,} \quad P(A_2) = P(A_{14}) = \frac{1}{49}; \quad P(A_4) = P(A_{12}) = \frac{3}{49};$$

$$P(A_6) = P(A_{10}) = \frac{5}{49};$$

$$P(\bar{A}_3) = P(\bar{A}_{13}) = \frac{2}{49};$$

$$P(\bar{A}_5) = P(\bar{A}_{11}) = \frac{4}{49}; \quad P(\bar{A}_7) = P(\bar{A}_9) = \frac{6}{49}, \quad P(A_8) = \frac{7}{49}. \quad \text{Onda}$$

$$P(A) = \left(\frac{1}{49} + \frac{3}{49} + \frac{5}{49} \right) \cdot 2 + \frac{7}{49} = \frac{9}{49} \cdot 2 + \frac{7}{49} = \frac{25}{49} \quad \text{və}$$

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{2}{49} + \frac{4}{49} + \frac{6}{49} \right) \cdot 2 = \frac{12}{49} \cdot 2 = \frac{24}{49}.$$

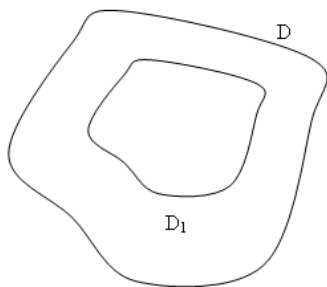
$P(\bar{A})$ ehtimalını belə də

$$\bar{P}(A) = 1 - P(A) = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}$$

tapmaq olar.

463. Bilmək lazımdır ki, belə məsələlərə həndəsi ehtimal məsələləri deyilir və müəyyən D oblastına atılmış cismin bu oblasta yerləşən $D_1 \subset D$ oblastına düşməsi hadisəsinin ehtimalı

olaraq D_1 oblastının ölçüsünün (uzunluq, sahə, həcm) D oblastının ölçüsünə olan nisbəti götürülür. (Şəkil 97).



Şəkil 97.

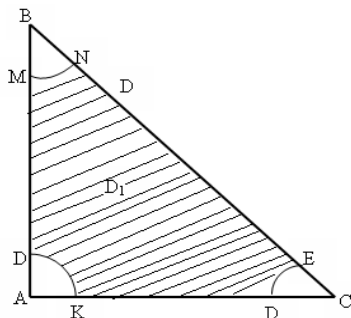
Baxılan məsələnin həllində aksiom kimi qəbul edilir ki, D oblastından götürülən nöqtə, onun istənilən nöqtəsi ola bilər; bu nöqtənin D_1 oblastının ixtiyari hissəsində olması ehtimalı, həmin hissənin sahəsi ilə mütənasib olmaqla onun tutduğu yerdən və formasından asılı deyildir. Məsələnin şərtinə görə doğru olan $P(D_1) = KS(D_1)$ bərabərliyində $D_1 = D$ qəbul edib, $P(D) = 1$ olduğunu nəzərə alsaq

$$k = \frac{1}{S(D)} \quad \text{olar. Beləliklə axtarılan ehtimal} \quad P(D_1) = \frac{S(D_1)}{S(D)} \quad (1). \quad (1)$$

düsturu ilə hesablanan ehtimal, həndəsi ehtimal adlanır. Bu düsturda D oblastı mümkün olan eyniehtimallı halların, D_1 isə əlverişli halların çoxluğu rolunu oynayır. Klassik ehtimal üçün doğru olan $P(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset$ təklifi həndəsi ehtimal üçün doğru deyil, yəni həndəsi ehtimalı sıfır olan hadisənin mümkün olmayan hadisə olduğunu

demək olmaz. Məsələn, müstəvinin müəyyən oblastından təsadüfi götürülən bir nöqtənin həmin oblastın daxilində yerləşən müəyyən bir parçanın nöqtəsi olması hadisəsinin ehtimalı sıfırdır.

464. Bu məsələdə 463-dəki D oblastı katetləri 6 və 8 olan ABC üçbucağı D_1 oblastı isə üçbucağın təpələrindən 2-dən böyük məsafədə yerləşən nöqtələrdir (Şəkil 98). Deməli, axtarılan ehtimal



Şəkil 98.

$$P = \frac{S(D_1)}{S(ABC)} = \frac{S(ABC) - S(\text{sek}APK) - S(\text{sek}MBN) - S(\text{sek}CDE)}{S(ABC)}.$$

Radiusu r , mərkəzi bucağı φ olan sektorun sahəsi $\frac{1}{2}r^2\varphi$

olduğundan $S(\text{sek}APK) = \frac{1}{2}r^2\frac{\pi}{2} = \pi$,

$$S(\text{sek}MBN) + S(\text{sek}CDE) = \frac{1}{2}r^2(\varphi_1 + \varphi_2) = \pi, \quad \varphi_1 = \hat{B}, \varphi_2 = \hat{C}, r = 2$$

və üçbucağın sahəsi $S(ABC) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$. Odur ki, $p = \frac{24 - 2\pi}{24} = 1 - \frac{\pi}{12}$.

*“Kiçiklə edilməsi mümkün olanı böyükə etmək
istəyi əbəsdir ”
Uilyam Okkam*

IV FƏSİL.

RIYAZİ ANALİZ ELEMENTLƏRİNİN ÜMUMİ TƏHSİL MƏKTƏBLƏRİNDƏ ÖYRƏNİLMƏSİNİN METODİK PROBLEMLƏRİ

Limit, törəmə, inteqral, diferensial tənlik... Bu anlayışlar məktəb riyaziyyat kursunun proqramına daxil edilməlidir və ya edilməməlidir, əgər hə, onda onların məktəblilər üçün tərbiyəvi və inkişafetdirici əhəmiyyəti nədən ibarətdir? Onları məktəb dərsliklərində hansı həcmdə və hansı ciddilik səviyyəsində şərh etmək lazımdır? Riyaziyyat müəllimləri həm də riyazi təhsil fəalları üçün özünə məxsus vahimə yaradan “limit” anlayışı ilə əlaqədar nə etməli? Məktəbdə riyazi analiz elementlərinin öyrənilməsi ilə əlaqədar metodik çətinlikləri necə aradan qaldırmalı? Bu dörd sual dama pedaqoji ictimayətin diqqətini cəlb edir. Bu bölmənin quruluşunu da onlar müəyyən edir. Bölmə üç hissədən ibarətdir. Bu hissələrdən hər birində sualların birinə cavab verməyə çalışmışıq.

4.1. Riyaziyyatın tədrisi metodikasında üç əsas məsələ vardır: nəyi öyrətməli, necə öyrətməli, nə üçün öyrətməli?

Bunlardan başlıcası sonuncudur, lakin məhz bu sual uzun müddət ən aktual olmamışdır. Lakin bugünkü məktəblər üçün birinci yerdə durdan nə üçün sualıdır.

Bu və ya digər məktəb fənnində nəyinsə nə üçün öyrənilməsi ilk növbədə cəmiyyətin təlimə sosial sifarişidir. Yaxın illərdə təhsildə sosial sifariş əsasən öyrətmək, informasiyaların verilməsi idi, hazırda isə təhsildə başlıca məqsəd insanın ümumi mədəniyyətini, qabiliyyətini, xüsusən informasiyalara müstəqil nail olmaq və işlətmək qabiliyyətini inkişaf etdirməkdir. Odur ki, əvvəllər riyaziyyat öyrədilirdisə, bu gün riyaziyyat öyrənilir və onunla öyrədilir.

Riyazi təhsilin əsas məqsədlərindən biri real aləm hadisələrini riyazi tədqiq etmək bacarığı tərbiyə etməkdən ibarətdir.

Deməli, məktəblilərə real vəziyyətlərin riyazi modellərini qurmağı öyrətmək lazımdır. Bunun üçün isə onlar göstərilən modeli təsvir edən

riyazi dili mənimsəməlidirlər. Real aləm hadisələrinin riyazi tədqiqi üçün xüsusən limit və törəmə anlayışları mühümdür, axı bu “təbiətin danışdığı” dilin əsas anlayışlarıdır. Sözsüz ki, orta məktəbin məzunları törəmə və onun real proseslərə tətbiqi haqqında bilməlidirlər, lakin ibtidai funksiya və integral haqqında bunu o qədər də inamla deməyə çətinlik çəkirəm. Birincisi, məktəbdə törəməyə verilən tərif, riyaziyyatda verilən formal təriflərə tam uyğundur, lakin integrala məktəbdə formal tərif vermək mümkün deyil (Darbu cəmləri ilə). İkincisi, şagirdlərin ümumi inkişafında törəmənin əhəmiyyəti aşkardır (sürət, toxunan, monotonluq, ekstremumlar, optimallaşdırma məsələləri) lakin sahələri və həcmələri integralın tətbiqi olmadan da hesablamaq mümkündür. Həndəsə kursunda şagirdlərin çoxbucaqlıların, dairə və onun hissələrinin sahəsini hesablamağı öyrənmələri kifayətdir. Məktəbdə, fəza fiqurlarının həcmi düsturlarını ciddi isbat olmadan əvvəlki kimi şagirdlərə bildirmək kifayətdir. Integralın köməyi ilə paralel kəsiklərə görə həcmi hesablanmasında hətta tələbələr çətinlik çəkir. Belə olan halda integralın tətbiqlə həcmələri hesablanmasında şagirdlərin daha çox çətinlik çəkmələri təbiidir. Odur ki, ibtidai funksiya və integral, bunların tətbiqləri haqqında verilən məlumat şagirdlərin anlama səviyyəsinə uyğunlaşdırılmalıdır. Hazırkı dərsliklərdə bunlar şagirdlərə ali riyaziyyatda olduğu kimi verilir. Ümumtəhsil məktəblərində riyazi analiz elementlərinin hansı səviyyədə öyrənilməsinə müzakirə edək.

Hazırda demək olar ki, heç kəs belə bir tezisi inkar etmir ki, məktəb riyaziyyatı elm deyil, buradan alınan bütün nəticələrə görə tədris fənnidir. Tədris fənnində riyaziyyat elminin bütün qanunlarına (məsələn, belələrinə: həmişə aksiomlarla başlamaq, əsas anlayışlara ciddi tərif vermədən nəzəriyyənin öyrənilməsinə başlamaq olmaz, bütün hökmləri isbat etmək lazımdır və s.) Əməl etmək məcburi deyil, burada didaktik prinsiplərə, meyarlara və psixologiyanın qanunlarına əsaslanmaq mühümdür. Tədris fənnində bu və ya digər xassənin, hökmün, faktın əsaslandırılmasının dörd səviyyəsi mümkündür.

1) İnamlı qəbul etmə (məsələn, şagirdlərə deyilir ki, ifadə edilən teorem riyaziyyatda isbat edilmişdir, lakin şagirdlərin qüvvəsinə uyğun olmadığından onu isbatsız qəbul edirik);

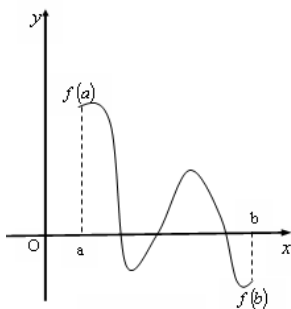
2) Əyani-intuitiv səviyyə-isbat əvəzində həndəsi nümayiş və ya “barmaqlar” üzrə mühakimə;

3) Həqiqətə yaxın mühakimə (məsələn, isbat əvəzində faktik olaraq formal isbatın və çıxarılışın ideyasını açan konkret misaldan istifadə, deyək ki, Nyuton – Leybnis düsturu fiziki təsəvvürlər əsasında verilir).

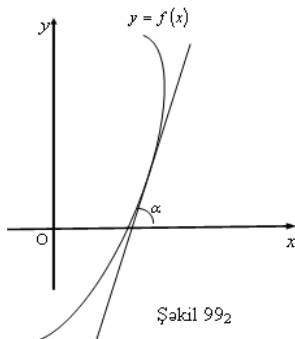
4) Formal ciddi isbat.

Analizin başlanğıcının şərh zamanı riyaziyyat müəlliminin əsas çətinliyi, zənnimcə, təqdim olunan materialın tədrisində ciddilik səviyyəsinin seçilməsilə əlaqədardır. Müəllim bu və ya digər məktəb dərsliliyi ilə işləyərkən çox vaxt təəccüblənir: nə üçün bu və ya digər teorem isbat edilib, analoji vəziyyətdə digərləri isbatsız qəbul edilibdir; nə üçün bir teoremin isbatında həndəsi nümayişlə kifayətlənilir, bir neçə səhifədən sonra oxşar vəziyyətdə özünün və şagirdlərin belə etməsi lazım bilinmir?

Nümunə üçün, funksiyanın törəmənin tətbiqlə araşdırılmasına baxaq. Bu mövzu müəllimin, habelə dərslük müəlliflərinin metodik mədəniyyətini yoxlamaq üçün özünə məxsus lakmus kağızıdır. Axı burada öyrənilməsi zəruri və məktəb riyaziyyat kursuna riyazi analiz elementlərinin daxil edilməsinin əsas səbəbi olan teoremlər haqqında söhbət gedir. Eyni zamanda bu teoremlərin ciddi isbatı riyazi analizin məktəbdə baxılmayan bir çox faktlarını bilməyi tələb edir. Müəllim hansı yolu seçməlidir: teoremi isbatsız və şərhərsiz verməli, əyani-intuitiv təsəvvürlərlə və ya həqiqətə yaxın mühakimələrlə kifayətlənməli, ciddi isbatın verilməsinə cəhd etməli? Ümumtəhsil məktəbləri üçün dərsləklərdə və dərs vəsaitlərində müxtəlif variantlara təsadüf olunur. Məsələn belə variantlar vardır. Bəzən verilən teoremin həndəsi izahının isbat olmadığı aydın şəkildə deyilir. Məsələn, [3]-də parçada kəsilməz funksiyanın xassələrindən birini ifadə edən Koşi teoremi ilə əlaqədar (əgər $y = f(x)$ funksiyası $[a; b]$ parçasında kəsilməz və onun uc nöqtələrində müxtəlif işarəli qiymətlər alırsa, $[a; b]$ parçasının daxilində heç olmasa bir nöqtə var ki, funksiya həmin nöqtədə sıfıra çevrilir) deyilir ki, teoremin həndəsi izahı olduqca sadədir. Doğrudan da 99%-şəkildən göründüyü kimi, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ olduğu üçün qrafikin uc nöqtələri Ox oxundan müxtəlif tərəflərdə yerləşir. Ona görə də funksiya $[a; b]$ parçasında kəsilməz olduğundan bu qrafik Ox oxunu heç olmasa bir nöqtədə kəsməlidir (əks halda $f(x)$ kəsilən olardı).

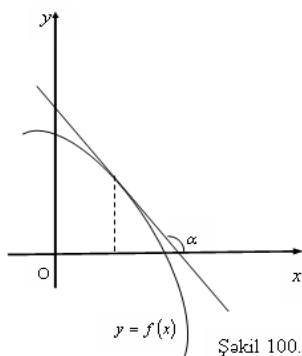


Şəkil 991



Şəkil 992

Ox oxunu kəsdiyi nöqtədə isə funksiyanın qiyməti sıfıra bərabərdir. Bundan sonra ciddi isbat verilir. Həndəsi şərh isbatdan sonra vermək yaxşı olardı. Parçada kəsilməz funksiyanın digər bir xassəsini ifadə edən Veyerştras teoremi (parçada kəsilməz funksiya bu parçada ən kiçik və ən böyük qiymətlərini alır) isə isbatsız verilir və qeyd edilir ki, “teoremin isbatı riyazi analiz kursunda verilir [3, səh 25]”. Zənnimcə şagirdlər üçün belə mənbəy göstərməyin əhəmiyyəti yoxdur. Bu müəllimə aid ola bilər. Funksiyanın monotonluğunun kafi şərtləri haqqında teoremlərin isbatında istifadə edilən Laqranj teoremi ($y = f(x)$ funksiyası $[a; b]$ parçasında kəsilməz və $(a; b)$ aralığında



Şəkil 100.

diferensiallandırsa, elə $c \in (a, b)$ var ki, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ bərabərliyi doğrudur) isbatsız, lakin qrafik nümayişə əsaslanaraq ifadə edilir, sonra isə onun köməyiylə törəmənin işarəsinin aralıqda funksiyanın monotonluğunun xassələrinə təsiri haqqında teorem ciddi isbat edilir (son illərin dərsliklərinin əksəriyyətində habelə [3] – də belə edilir). Bu yol məntiqi nöqsanlıdır. Törəmənin işarəsilə funksiyanın monotonluğu xarakteri arasındakı əlaqəni həndəsi

olaraq dərhal vermək mümkünsə Laqranj teoremini belə şərh etmək nəyə lazımdır. Həm də bu kifayət qədər çətindir və sünidir. Bu teorem özlüyündə mühümdür. Axı əbəs yerə deyil ki o, diferensial hesabının əsası hesab edilir. Bu doğrudur, lakin fəal işləmək şərtilə (riyazi analizin ali məktəb kursundakı kimi). Məktəbdə isə ondan yalnız bir dəfə, yuxarıda göstərilən halda istifadə olunur.

Tədris vəsaitlərində istifadə olunan ikinci variant - ciddi isbatın törəmənin fiziki və ya həndəsi mənalara əsaslanan həqiqətə yaxın mühakimə ilə əvəz edilməsidir. Zənnimcə, bu tamamilə qəbul edilə bilən variantdır, yalnız, o şərtlə ki, həqiqətə yaxın mühakimənin isbat metodu olmadığı nəzərdə tutulmalıdır – anlayışların belə dəyişdirilməsi məktəblilərin riyazi mədəniyyətinin formalaşdırılmasına xeyli ziyan vurur.

Məhz ikinci variant göstərilən əlavə şərtlə ümumtəhsil məktəblərində törəmənin tətbiqi ilə funksiyanın monotonluğunu və ekstremumunu araşdırmaq üçün daha münasibdir. Müəllim şagirdlərin diqqətini 99₂ və 100 şəkillərinə cəlb edir.

99₂-ci şəkildə artan funksiyanın qrafiki göstərilmiş və ixtiyari nöqtədə ona toxunan çəkilmişdir. Göründüyü kimi toxunan absis oxunun müsbət istiqamətilə iti bucaq əmələ gətirir. Deməli seçilmiş nöqtədə törəmə müsbətdir. 100-cü şəkildə isə toxunan absis oxunun müsbət istiqamətilə kor bucaq əmələ gətirir, deməli bu nöqtədə törəmə mənfidir. Buradan görünür ki, törəmənin işarəsi ilə funksiyanın monotonluğunun xarakteri arasında əlaqə vardır. Riyazi analiz kursunda ciddi isbat edilir ki, bu həqiqətdən belədir. (Eyni zamanda uyğun teoremlər ifadə olunur). Belə mühakimə riyazi ciddiliyi müdafiə edənlərin çətin ki, xoşuna gələ, onlar belə şərh edilən materialı səthi hesab edirlər. Bir çox dərslük müəlliflərini narahat edən bu deyil. Əsas o, hesab edilir ki, şərh: a) faktik olaraq elm kimi riyaziyyata zidd olmasın; b) məktəblilər üçün münasib olsun. Unutmaq lazım deyil ki, məktəbdə şagirdləri ali məktəbdə öyrənilən riyaziyyatın riyazi analiz adlanan sahəsinin, ümumi insan mədəniyyətinin mühüm hissəsi olan elementləri ilə tanış edirik. Şagirdlərə anlatmaq lazımdır ki, dünyanın quruluşunu başa düşmək üçün bəşəriyyətin ən yüksək zehini nəəliyyəti olan riyazi analiz yaradılmışdır. Ümumiyyətlə riyazi analiz elementlərinin ciddilik səviyyəsinin seçilməsi konsepsiyası zənnimcə bir sıra müddəalardan ibarət olmalıdır:

1) Fəndə istifadə olunan bəzi hökmlər prinsip etibarı ilə məktəbdə isbat edilə bilməzsə, o düzgün olaraq isbatsız qəbul olunur (məsələn, hökm edilir ki, bütün elementar funksiyalar təyin olduqları oblasta kəsilməyəndir) və ya həndəsi təsvirləri ilə əvəz edilir (məsələn, kəsilməz funksiyanın parçada ən böyük və ən kiçik qiymətlərini alması haqqında teorem).

2) Hər hansı hökm prinsip etibarı ilə məktəbdə isbat edilə bilərsə, lakin bu isbat sünidirsə, texniki olaraq çətindirsə və əsaslı inkişafetdirici əhəmiyyəti yoxdursa, onda o aparılmır (məsələn, analizə aid olmayan triqonometrik funksiyalar üçün toplama teoremləri).

3) Hər hansı hökm prinsip etibarı ilə məktəbdə isbat edilə bilərsə və onun inkişaf etdirici əhəmiyyəti varsa, onda onu aparmaq lazımdır (məsələn, toxunanın tənliyinin, funksiyanın cəmi və hasilinin diferensiallanması qaydalarının çıxarılışı - burada dəqiq alqoritm, isbatın mərhələlərə ayrılması, öz fəaliyyətini planlaşdırmaq vardır; eyni zamanda qismətin diferensiallanması qaydasını isbatsız vermək olar – burada yeni fikir yoxdur, texniki çətinlik isə çoxdur).

Görkəmli rus riyaziyyatçısı V.J.Arnold “Bərk və yumşaq riyazi modellər” (rus dilində) [19₂] kitabşasında yazır: “Bizim beynimiz iki yarım kürədən ibarətdir. Sol çoxhədlilərin vurulması, dillər, şahmat, intriqaalar və sillogizmlər ardıcılığı, sağ isə fəza istiqamətləri, intuisiyalar və bütövlükdə real həyatda lazım olanlar üçündür”. “Riyaziyyatçılarda - hesablayıcılarda” sol yarım kürə adətən lazımcına inkişaf etməmiş sağın hesabına həddindən artıq böyükdür. Bu tipin riyaziyyatçılarda üstünlüyü təbii olaraq cəmiyyətin sərt mənfi münasibət göstərdiyi aksiomatik-sxolastik (həyatdan uzaq) riyaziyyatın, xüsusən tədrisdə (o cümlədən orta məktəbdə) nüfuzundan istifadəyə gətirdi. Nəticədə hər yanda riyaziyyatdan üz döndərmək və bütün dövlətlərdən məktəbi hörmətdən salaraq məhv etdiklərinə görə intiqam almaq cəhdləri müşahidə olundu. Yumşaq modelləşdirmə beynin hər iki yarım kürəsində harmonik iş aparmağı tələb edir”. Daha sonra o, yazır: “Riyaziyyatın bütün məzmunuz və formallaşdırılmış tədrisi bütün səviyyələrdə sistemi bədbəxt etdi. Peşəkar riyaziyyatçılar və riyaziyyat müəllimlərinin bir çox nəsiləri yalnız bunlarla böyüyərək riyaziyyatın hər hansı başqa tədrisini təsəvvür etmədilər”. Bu mülahizələri tamamilə müdafiə edərək məktəb riyaziyyat kursu və ilk növbədə yuxarı siniflərdə riyazi analiz kursunun tədrisi ilə əlaqədar görkəmli rus riyaziyyatçısı-metodisti A.Q.Mordkoviçin aşağıdakı iki şüarını da yadda saxlamağı lazım bilirik: “Sxolastika, formalizm, bərk model, beynin sol yarım kürəsinə əsaslanma az, əyanilik, həqiqətə yaxın mühakimə, yumşaq model, beynin sağ yarım kürəsinə əsaslanma çox” olmalıdır. Daima bərk modelləşdirmədə tədris etmək asandır – motivləşdirmə, propedevtika, təlimin psixoloji-pedaqoji qanunları və inkişaf haqqında düşünmək lazım gəlmir. Sənət məktəbi şagirdləri ilə pedaqqogika bu rejimdə işləyir. Tədrisdə yumşaq modelləşdirmə rejimindən istifadə etmək isə çətinidir – bu müəlimdən yaradıcı yanaşma tələb edir. Ümumi təhsil məktəblərində yumşaq modelləşdirmə rejimi üstün olmalıdır. Lakin onu da bilmək lazımdır ki, nəticə etibarı ilə şagirdlərə ümumiləşdirilmiş mücərrəd aləmi dərk etdirmək lazımdır.

4.2. Məktəbdə limit anlayışı ilə nə etmək lazımdır məsələsinin izahına keçək.

Müxtəlif variantlar olmuşdur: Məktəbdə limitin formal tərifindən istifadədən “limit” anlayışının özünün ümumiyyətlə xatırladılmasını qadağan etmək cəhdinə qədər. Həmişə olduğu kimi kənar mövqeləri atmaq və problemi elmi-metodik və psixoloji-pedaqoji nöqteyi nəzərdən müzakirə etmək lazımdır.

Nə üçün məktəbdə limitin ciddi tərifinin verilməsi müvəffəqiyyətə uğradı? Birincisi, nəzərə almaq lazımdır ki, riyaziyyatın tarixində limit anlayışının formalaşması uzun çəkmiş və əziyyətli olmuşdur. Oqyust Koşinin XIX əsrin əvvəlində təklif etdiyi formal tərifin daxil edilməsinə qədər bir çox əsrlərdə limitdən əyani – intuitiv səviyyədə istifadə olunmuşdur. Bu təsadüfi deyildir, axı adətən “ $\varepsilon - \delta$ tərifində” $x \rightarrow a$ -da b ədədinin $y = f(x)$ funksiyasının limiti olmasında daxili ziddiyyət vardır: bərabərsizliyin statik (sabit) dilində dinamik vəziyyət – limit qiymətinə yaxınlaşma şərh olunmuşdur. Bunu uzun müddət riyaziyyatçılar başa düşməkdə çətinlik çəkmişlərsə onda adi məktəblidən n-ə tələb etmək olar?

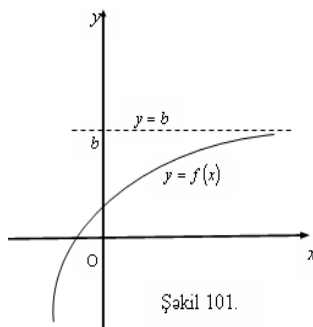
İkincisi, riyazi anlayışların təriflərinin çətinlik səviyyəsinin ölçülməsini xatırlatmaq lazımdır. Üsullardan birisi tərifdəki kvantorların sayı ilə əlaqədardır. Məsələn, funksiyanın cütlüyü anlayışı – “birkvantorludur”: ixtiyari $x \in D(f)$ üçün $f(-x) = f(x)$ bərabərliyi ödənilir. Funksiyanın yuxarıdan məhdudluğu anlayışı – “iki kvantorludur”: elə M ədədi vardır ki, ixtiyari $x \in D(f)$ üçün $f(x) < M$ bərabərsizliyi ödənilir; bu tərifdə iki kvantor vardır: $\exists$ varlıq və $\forall$ ümumilik kvantorları. Bir kvantorlu təriflər orta məktəb şagirdlərinin bilik səviyyəsinə uyğundur, iki kvantorlu (məhdudluq, ekstremum, funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətləri, funksiyanın dövrüliyi) təriflər isə məktəblilərdən gərgin aqli qüvvə və müəllimdən düşünölmüş və təmkinli iş təklif edir. Bu elə səddir ki, ümumtəhsil məktəbi ondan yuxarı qalxa bilmir. Limitin formal “ $\varepsilon - \delta$ tərfi” isə üç kvantorludur. $(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$, başqa sözlə bizim şərtləşməmizə görə üç çətinlik səviyyəli tərifdir, hələ buradakı modul və bərabərsizlik işarələri ilə ağırlaşmanı demirəm. Beləliklə, tamamilə aşkardır ki, yaş xüsusiyyətlərinə və riyazi mədəniyyətlərinin kifayət qədər olmamasına görə limitin “üç kvantorlu” tərfi məktəblilərin gücünə uyğun

deyildir. Hətta bu tərif I kurs tələbələri tərəfindən də çətin mənimsənilir, onlar ancaq II kursun axırlarında həmin tərif müəyyən qədər öyrənə bilirlər. Deməli, məktəbdə bəzi hallarda bərk modeldən formal tərifdən əl çəkib onu yumşaq modelə-limitin intuitiv göstərilmədən istifadə ilə əvəz etmək lazımdır. Riyazi analizin başlanğıcında üç növ limit vardır: ədədi ardıcılığın limiti, argument sonsuzluğa yaxınlaşdıqda başqa sözlə sonsuzluqda funksiyanın limiti və nöqtədə funksiyanın limiti. Son illərdə bizim ümumtəhsil məktəblərində demək olar ki, sonsuzluqda funksiyanın limitinə baxılmaz yalnız, nöqtədə limit xatırlamır (bir qayda olaraq olduqca anlaşılmaz). Zənnimcə, ardıcılığın limiti haqqında danışdıqdan sonra, məhz sonsuzluqda limitdən başlamaq lazımdır. Bu didaktik mühakiməyə əsasən deyilir: didaktikanın həyatla, təcrübə ilə əlaqə prinsipinə əsaslanaraq, onda razılaşmaq lazımdır ki, nöqtədə limit anlayışında işin əsl didaktik iç üzü yoxdur, eyni zamanda sonsuzluqda limitdə bu mənada hər şey qaydasındadır. Məsələn, qaynar çaydanın otaq temperaturuna qədər soyudulması prosesi sonsuzluqda limitin köməyi ilə modelləşdirilir. Şagirdlər üfüqi asimptot anlayışı ilə tanışdırlar, funksiyanın qrafikinin üfüqi asimptotunun olması isə bu funksiyanın sonsuzluqda limitinin həndəsi mahiyyətidir.

Məktəbdə “sonsuzluqda funksiyanın limiti” mövzusunun şərhinin müxtəsər bir variantını göstərək.

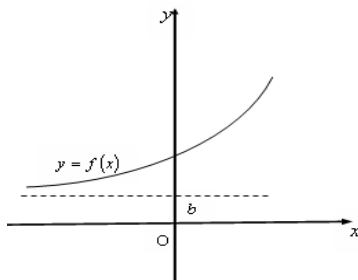
Funksiyanın 101-cü şəkildə göstərilən qrafikinə baxaq. Bu həndəsi modelin sözlərlə təsviri vardır (Verbal – sifahi model):

$y = f(x)$ funksiyanının qrafikinin üfüqi $y=b$ asimptotu vardır. Lakin riyaziyyatda bu və ya digər vəziyyəti təsvir etməkdə işləmək üçün münasib olan analitik modelə üstünlük verilir. Yeni vəziyyət üçün analitik model qurmaqdan ötrə yeni istilah və yeni işarələr tələb olunur. 101-ci şəkildə göstərilən həndəsi modeli şərh etmək üçün $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ işarəsi və

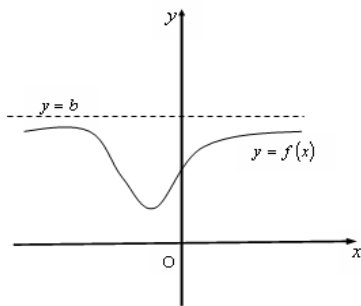


Şəkil 101.

“ $x \rightarrow +\infty$ -da funksiyanın limiti” istilahı düşünülmüşdür. Analogi olaraq 102-ci şəkildə göstərilən həndəsi modeli şərh etmək üçün $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ işarəsini və “ $x \rightarrow -\infty$ da funksiyanın limiti” istilahını fikirləşmişlər. 103-cü şəkildə təsvir olunan həndəsi modeli şərh etmək



Şəkil 102.



Şəkil 103.

üçün isə $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ işarəsini və

“ $x \rightarrow -\infty$ da funksiyanın limiti” istilahını daxil etmişlər.

Müəllim öz qüvvəsini hər şeydən əvvəl ona yönəltməlidir ki, şagirdlər $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ yazılışını $y = f(x)$ funksiyanının qrafikinin

üfiqi $y = b$ asimptotunun olmasından ibarət həndəsi şərh edə və tərsinə funksiyanın üfiqi asimptotu olan qrafikinə nəzər salmaqla analitik modelə keçə bilsinlər (limit işarəsindən istifadə etməklə).

Məsələn, absis oxu $y = \frac{1}{x}$ hiperbolası üçün asimptotdur, deməli,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Daha sonra şagirdlər XI sinifdə asimptotik olaraq absis

oxunun mənfi şüasına yaxınlaşan

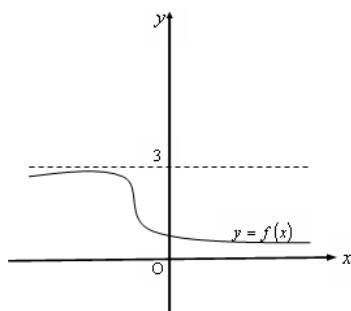
$y = e^x$ eksponentini görürlər, deməli

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Məktəblilərə xassələri ilə

verilən funksiyanın qrafikinin eskizimi qurmağı öyrətmək lazımdır. Məsələn:

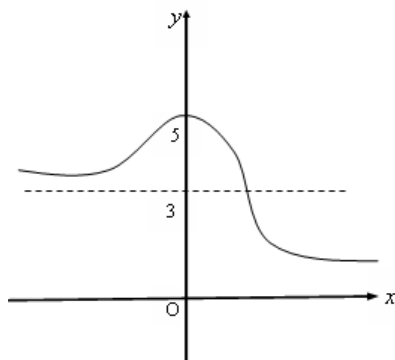
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ olan,

bütün ədəd oxunda kəsilməyən və azalan $y = f(x)$ funksiyanının qrafikini qurun (Şəkil 104).



Şəkil 104.

Bu bünövrə səviyyəli tapşırıqdır. Daha mürəkkəb tapşırıq isə belə ola bilər: Əvvəlki misalda göstərilən üç şərti ödəyən, funksiyanın azalması əvəzində isə $f(0) = 5$ şərti təklif olunan funksiyanın qrafikini qurun (Şəkil 105). Uyğun sual dəfələrlə riyaziyyat müəllimlərinə də təklif olunmuşdur, onlarında bununla əlaqədar müəyyən çətinlik çəkdiqlərinə təsadüf etmişik. $E(f) = [-2; 7]$ şərti əlavə olunduqda iş bir qədər də şətinləşir (Şəkil 106).

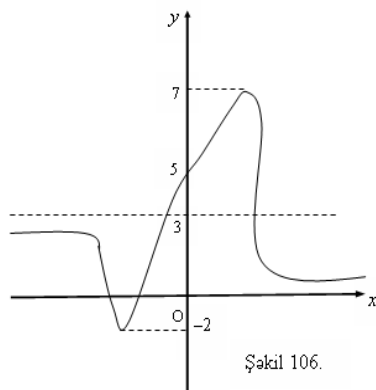


Şəkil 105.

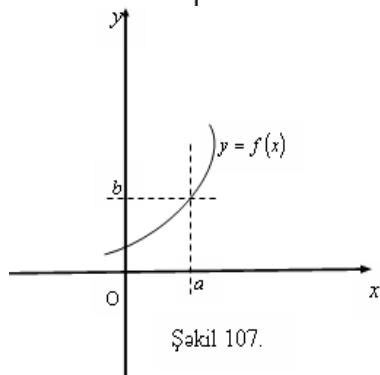
Sonsuzluqda limitin hesablanmasına gəldikdə isə, şagirdlərə üç faktı bildirmək kifayətdir: 1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0; \quad 2) \text{ sabit funksiyanın}$$

limiti konstantın qiymətinə bərabərdir; 3) limitlər üzərində hesab əməlləri haqqında teoremlər (təbii olaraq isbatsız). Onda limitlərin hesablanması texnikasını iki çoxhəddlinin nisbətinin limitinin hesablanmasına qədər çatdırmaq çətin deyil ($x \rightarrow \infty$ da). İndi məktəbdə “funksiyanın nöqtədə limiti” mövzusunun şərhinin bir variantını (yenə yığcam şəkildə) göstərək. Şagirdlərə $(a; b)$ nöqtəsindən keçən hər hansı funksiyanın üç nüsxə qrafikini çəkmək təklif olunur (Şəkil 107).

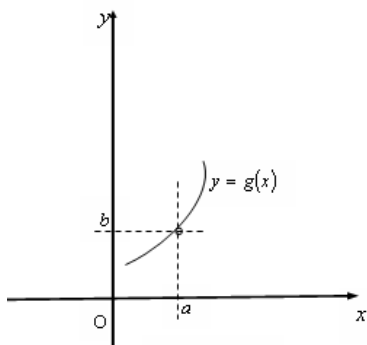


Şəkil 106.

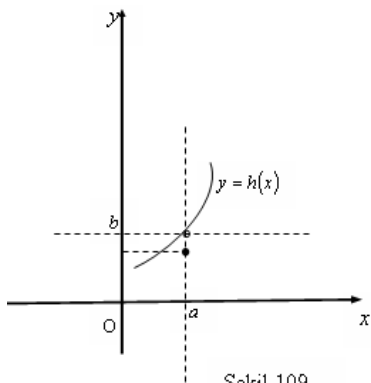


Şəkil 107.

Sonra ikinci və üçüncü şəklə düzəliş edilir: ikincidə $(a; b)$ nöqtəsi



Şəkil 108.



Şəkil 109.

“çıxarılır” (Şəkil 108); üçüncüdə “çıxarılan” nöqtə başqa vəziyyətdə olur (Şəkil 109). Sonra şagirdlərə aşağıdakı suallara cavab vermək təklif olunur: 107-109-cu şəkillərdə eyni bir funksiya və ya müxtəlif funksiyalar göstərilibdir və müxtəlifdirsə nə üçün? Cavab (müəllim üçün aşkardır, lakin təəssüf ki, şagirdlər üçün o qədər də aşkar deyil, çünki cəbr kursunda funksiya anlayışı ilə iş qətiyyəən yaxşı deyil, lakin bu ayrıca söhbətin mövzudur): müxtəlifdir, çünki bir-birindən a nöqtəsindəki xüsusiyyətləri ilə fərqlənirlər. Konkret olaraq: birinci funksiya bu nöqtədə kəsilməyəndir, ikinci və üçüncü kəsiləndir, habelə ikinci bu nöqtədə təyin olmamışdır, üçüncü isə təyin olunmuşdur, lakin “düzgün olmayaraq” (o, birinci halda “düzgün” təyin olmuşdur). İndi aydındır ki, nə üçün 107-109 şəklində funksiya müxtəlif hərflərlə işarə olunmuşdur. Lakin $x = a$

nöqtəsi baxılmada istisna edilərsə, onda hər üç şəkildə eyni bir riyazi model göstərilmiş olar ki, bunu da təsvir etmək üçün işarə və istilah düşünülmüşdür: işarə $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ (uyğun olaraq $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$), istilah isə - “ $x \rightarrow a$ -da funksiyanın limiti”.

Qeyd etmək lazımdır ki, tərifin özündə $x \neq a$ tələbi qoyulmuşdur. Nəzərə alınmayan konkret nöqtənin olmaması heç də qorxulu deyil, çünki funksiyanın ayrıca nöqtədə özünü aparmasını həmişə ayrılıqda araşdırmaq olar. Yeri gəlmişkən qeyd edək ki, praktik olaraq “müfdə” funksiyanın kəsilməzliyinin tərifin aldığı (107-ci şəkildə göstərilmiş modeldən istifadə etməklə): $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ isə $y = f(x)$

funksiyasına a nöqtəsində kəsilməyəndir deyilir.

Ümumiyyətlə ixtiyari hər hansı dərəcədə mürəkkəb riyazi anlayış tədris prosesində tədricən öyrənilməlidir: əvvəlcə əyani – intuitiv səviyyədə, sonra təsviri (şərh) səviyyədə və yalnız bunlardan sonra formal səviyyəyə keçmək olar [26₃]. Cəbr dərslində funksiya anlayışı və onun xassələri belə verilir (xüsusən iki kvantorlu anlayışlar göstərilən kimi tədricən öyrənilir). Burada məktəb üçün limit anlayışı formal səviyyəyə çatdırılmır. Sonsuzluqda və nöqtədə funksiyanın limiti əyani – intuitiv səviyyədə qalır. Artıq “Cəbr-7” dərslində funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyi anlayışı əyani – intuitiv səviyyədə verilir. IX sinfin cəbr kursunda isə formal səviyyədə daxil edilir (hazırlıq üçün).

Bir daha qeyd edək ki, limitin varlığı daxil olmaqla əvvəlcədən xassələri verilən funksiyanı misallar üzərində həndəsi modelinin qurulması faydalıdır. Belə təklif olunan tapşırıqda aid bir nümunə göstərək: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$, $f(3)$ təyin olunmayıb, $f(0) = 4$ olan $y = f(x)$ funksiyanın qrafikini qurun (mümkün qrafik modellərdən biri 110-ci şəkildə göstərilir).

Məktəbdə $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ hesablamaq

üçün üç vəziyyəti bilmək kifayətdir:

1) Məktəb riyaziyyat kursunda təsadüf edilən analitik verilən bütün funksiyalar (rasional, irrasional, üstlü, loqarifmik, triqonometrik) təyin olduqları ixtiyari nöqtədə kəsilməyəndir, yəni $f(a)$ varsa, onda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Məsələn,

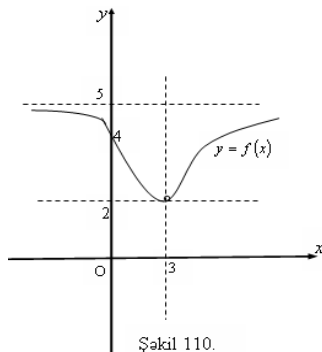
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x + \sqrt{x}}{x + 2} = \frac{\sin \pi + \sqrt{1}}{1 + 2} = \frac{1}{3},$$

çünki limit işarəsi altında olan funksiya təyin olunmuşdur və deməli $x = 1$ nöqtəsində kəsilməyəndir.

2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ -i hesablamaq lazımdırsa və $g(a) = 0$ isə, onda $f(a) \neq 0$

olan halda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ yazılır və bu halda $x = a$ düz xətti $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

funksiyası qrafikinin şaquli asimptotudur.



Şəkil 110.

3) $f(a)=0$ və $g(a)=0$ isə (riyazi analizdə bu hala adətən belə deyilir: “ $\frac{0}{0}$ ” şəkildə qeyri müəyyənlik) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ hesablamaq üçün

kəsri eyni çevirmək lazımdır. Ən sadə halda kəsri $(x-a)$ ya ixtisar etmək anında qeyri-müəyyənlik yox olur (bu da limiti hesablamaq üçün tamamilə qanunidir, çünki, xatırlayaq ki, tərifi görə $x \neq a$). Məsələn,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Funksiyanın nöqtədə limiti haqqında söhbəti yekunlaşdıraraq qeyd edək ki, təklif edilən quruluş (variantlı çertyoj metodu, şəkil 107-109) yalnız şagirdlərdə hissəli funksiyalarla işləmək təcrübəsi olduqda tam fayda verə bilər.

4.3. Məktəbdə törəmənin öyrənilməsilə əlaqədar bəzi metodik məsələləri müzakirə edək (integralın öyrənilməsi metodikası haqqında burada danışmayacağıq. Onu da qeyd edək ki, bir sıra müəlliflər integralı ümumtəhsil məktəbinin proqramından çıxarmağı təklif edirlər. Lakin biz belə hesab edirik ki, integralı da yuxarıda göstərilən səviyyədə ümumtəhsil məktəblərində öyrənmək lazımdır. Bu haqda ayrıca söhbət açmaq zəruridir. Funksiya verildikdə törəməni tapırıqsa, törəməyə görə funksiyanı tapmağı da şagirdlərin bilməsi lazımdır.

Törəməni öyrənərkən əsas diqqət $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ modelinə, onun həndəsi və

fiziki mənasına verilməlidir. Törəməni hesablamaq qabiliyyəti aşılamağa xüsusi diqqət yetirməyin o qədər də əhəmiyyəti yoxdur – bu kifayət qədər darıxdırıcı eyni formalı, hazır qaydalarla yerinə yetirilən, şagirdlərin inkişafı üçün heç nə verməyən məşğələdir. Məktəblilərə törəmənin tətbiqlərini həndəsi nümayişlərə əsasən “görməyi” öyrətmək, isbata cəhd etməkdən daha yaxşıdır. Məktəbdə deyək ki, $y' > 0$ isə onda funksiya artır və ya ekstremum üçün zəruri şərt haqqında teoremi ciddi isbat etmək cəhdi müvəffəqiyyətsizliyə uğramışdır. Bunun üçün Ferma və Laqranj teoremləri lazımdır ki, onların ümumtəhsil məktəblərində ciddi isbatını vermək çətindir. Həndəsi şərhə əsaslanaraq onları yalnız göstərilən teoremlərin isbatında istifadə etmək üçün isbatsız vermək məqsədəuyğun deyil – lazımı teoremlər üçün intuisiya və əyanilikdən istifadə etmək daha yaxşıdır (bu haqda işin birinci hissəsində artıq danışmışıq).

Adətən olduğu kimi törəmə anlayışının daxil edilməsinə iki klassik-həlləri prosesi yeni riyazi modelə - funksiya artımının argument artımına nisbətinin argumentin artımı sıfıra yaxınlaşdıqda limitinə gətirən sürət və toxunan haqqında məsələlərə baxmaqla başlanılır. Başqa sahələrdən olan bir sıra məsələlərin həlli prosesi də belə modelə gətirilir. Mümkün olduqda sonuncu tezi konkret məzmunla tamamlamaq lazımdır. İki fiziki misal göstərək.

1) Elektrik miqdarının dəyişməsi qanunu $Q=Q(t)$ düsturu ilə ifadə olunursa, burada t -zamandır, naqilin en kəsiyindən Δt zamanda ΔQ

elektrik miqdarı keçirsə, onda $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ cərəyanın orta şiddətidir və t

zamanı anında ani şiddət isə $J = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ düsturu ilə ifadə olunur.

2) Bircinsli olmayan xətti məftildə kütlənin paylanması $m = m(l)$ düsturu ilə ifadə olursa, burada l -məftilin başlanğıcdan cari nöqtəyə qədər uzunluğudur və uzunluğun Δl hissəsinə Δm kütləsi düşürsə,

onda $\frac{\Delta m}{\Delta l}$ kütlənin paylanmasının orta sıxlığıdır, xətti sıxlıq isə

$\rho = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta l}$ düsturu ilə ifadə olunur.

Müəllimin baxılan konkret məsələ əsasında çıxardığı nəticənin mühüm metodik əhəmiyyəti vardır. Müxtəlif bilik sahələrindən gətirilən müxtəlif məsələlər eyni bir riyazi modelə gətirilir. Həyat gündəliyə yeni riyazi model irəli sürürsə, riyaziyyatçının işi konkret məzmunundan asılı olmayaraq bu modelin xüsusi öyrənilməsindən ibarət olur. Yeni modelin öyrənilməsilə məşğul olmaq – bu o deməkdir ki: 1) ona xüsusi istilah verilsin; 2) onun üçün xüsusi işarə düşünülsün; 3) yeni modelə əməliyyat aparmaq qaydalarını və onun tətbiqi sahələrini öyrənmək. Baxılan model üçün törəmə istilahından istifadə olunur və y' ilə işarə edilir. $y = f(x)$ funksiyasının törəməsini axtarmağın beş addımlıq (bəzi kitablarda olduğu kimi üç-dörd addım yox) alqoritmi təklif edilir:

1) x qeyd etməli və $f(x)$ -i hesablamalı;

2) Argumentə Δx artımı verib $f(x + \Delta x)$ -i hesablamalı;

3) Δy -i tapmalı;

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ -i tapmalı;

5) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ tapmalı.

Bu alqortimə iki mühüm şərh verək.

a) Alqoritmin birinci addımı belə görünür: “ x -in qiymətini qeyd etmək və $f(x)$ -i hesablamalı”. Bəzilərinə belə görünür ki, bu addım lazım deyil (bir qayda olaraq məktəb dərsliklərində bu olmur), çünki tapşırığın özündə $f(x)$ vardır və burada da $f(x)$ -dən istifadə olunur. Əslində bu addım metodik nöqteyi nəzərdən olduqca zəruridir, belə ki, $f(x)$ yazılışı əsas məsələdə və birinci addımda forma etibarı ilə eynidir, lakin məzmunca eyni deyil: başlanğıc məsələdə x dəyişəndir, birinci addımda isə sabitdir, psizoloji – pedaqoji nöqteyi nəzərdən də - bu mərhələ həll prosesinə daxil olmaqla məsələyə diqqəti cəlb edir.

b) Arqumentin və funksiyanın artımları anlayışlarının ilk dəfə törəmənin daxil edilməsi ilə meydana gəlməsinə yol vermək olmaz, çünki burada göstərilən anlayışlar məqsəd olmayıb törəməni (yeni anlayışı) daxil etmək üçün vasitələrdir. Göstərilən istilahları və dəyişənlərin solunda yazılan “qəribə” üçbucaq işarəsini və “qəribə”

oxunmasını əvvəlcə ayrıca daxil etmək lazımdır ki, Δx , Δy , $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ -i

tapmaq üçün, hətta son nisbətlə əlaqədar şagirdlər müəyyən təcrübə qazanmış olsunlar. Yuxarıda artıq qeyd etdik ki, qrafikinə görə funksiyanın xassələrini şərh etməyi, verilmiş həndəsi modeldən (qrafiklərdən) sözlərlə izaha keçməyi öyrətmək olduqca mühümdür. Cəbr və analizin başlanğıcı kursunda funksiyanın çoxlu sayda xassələrinin olması qrafiklərin oxunması prosesinin maraqlı, müxtəlif, çoxplanlı olmasına imkan verir. Şagirdlər qrafikinə görə funksiyanın kifayət qədər aydın “sözlərlə portretini” qurmağı bacarmalıdırlar: Qrafikinə görə funksiyanın təyin oblastını, onun tək və ya cütlüyünü, monotonluğunu ekstremumunu, məhdudluğunu, ən böyük və ən kiçik qiymətini, kəsilməzliyini, qiymətlər çoxluğunu, qabarıqlığını və ya çöküklüyünü görməlidirlər. Məktəblilərə qrafikinə görə funksiyanı və onun diferensiallanan olması haqqında informasiyanı almağı öyrətmək

yaxşı olardı. Qrafiki konkret şəkildə göstərilmiş funksiyanın diferensiallanan olmasını “gözəyari” necə müəyyən etməli?

Funksiyanın qrafikinin hər hansı nöqtəsində ona ordinat oxuna paralel olmayan toxunan çəkmək mümkündürsə, onda funksiya həmin nöqtədə diferensiallandı. Funksiyanın qrafiki üzərində “calaq”, “itilənmiş” və ya ordinat oxuna paralel olan toxunan çəkmək mümkün olan nöqtə varsa, onda bu nöqtədə funksiya diferensiallanan deyil (bu nöqtələrdə funksiyanın törəməsi yoxdur). Bununla əlaqədar bir daha qeyd edək ki, məktəbdə parça (кусочных) funksiyaların öyrənilməsi lazımdır: məhz parça funksiyaların qrafikləri üzərində süni olmayan calaq və itilənmiş nöqtələri görmək olar (məsələn, şəkil 111-ə baxmalı). Hazırkı məzunların əksəriyyəti $y = |x|$ funksiyasından başqa belə parçalar funksiyası tanımır.

Yeni modellə əməliyyat aparmaq üçün texniki aparat hazırlamaq haqqında da bir neçə söz-söhbət törəməni hesablamaq üçün düsturlar və qaydalardan gedir. Törəmə hazırkı dərslərlərin əksəriyyətində XI sinifdə öyrənilir. Adətən bu sinifdə

$y = c, x, kx + m, x^2, \frac{1}{x}, \sqrt{x}, \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, x^n \ (n \in \mathbb{N})$ funksiyalarının törəmələri öyrənilir.

Törəməni XI sinifdə daxil etdikdə isə qüvvət, üstlü və loqarifmik funksiyaların törəmələri daxil olmaqla bütün düsturları şagirdlərin özləri öyrənməli olurlar. Zənnimcə bu arzu edilən hal deyil. Çünki düsturların həddindən çox olması ilə şagirdlər başlıca olanı əsas riyazi modeli görməyə bilərlər. Son illərdə yazılmış dərslərlərdə qüvvət, üstlü və loqarifmik funksiyalar yalnız XI sinifdə verilir və onların diferensiallanmasına da burada baxılır. Bu XI sinfin cəbr və analizin başlanğıc kursunun müvafiq yerində düsturları və diferensiallama qaydalarını təkrar etməyə imkan verir ki, bu da törəmənin müxtəlif tətbiqlərini göstərmək üçün xüsusilə mühümdür. Bəzi dərslərlərdə $y = \sqrt{x}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiyaların diferensiallanması uyğun paraqrafın əvvəlində, isbatları isə axırda verilir. Bu elementar pedaqoji fənddir. Şagirdləri tədris ədəbiyyatını oxumağa, öyrənməyə alışdırmaq bizə çox lazımdır. Bunun üçün həm materialı kifayət qədər yumşaq tərzdə verməklə həm də çətin məsələləri paraqrafın əvvəlində göstərməklə gərgin vəziyyət yaratmamaqla materialı mənimsətmək lazımdır. Odur ki, dərslərin bəzi yerlərində belə yanaşma yaxşı olardı: hər

hansı fakt haqqında məlumat vermək, ondan istifadəyə aid misallar göstərmək (oxucunun yeni fakta alışması və ondan istifadəyə aid hər hansı müsbət təcrübə qazana bilməsi üçün) və yalnız bundan sonra uyğun isbatı vermək. Şagirdlərin diqqətini ona yönəltmək məsləhətdir ki, diferensiallama düsturları (konkret funksiyalar üçün) və diferensiallama qaydaları (cəmin, hasilin, nisbətin və qüvvətin törəməsi əməllərini diferensiallanması) vardır, həm də fikir vermək lazımdır ki, şagirdlər “ $y = x^2$ funksiyasının diferensiallanması qaydası” və ya “cəmin diferensiallanması düsturu” deməsinlər və bilsinlər ki, törəməni hesablayarkən biz faktik olaraq iki addımlı alqoritmədən istifadə edirik: əvvəlcə bu və ya digər diferensiallama qaydasını tətbiq edirik. Sonra isə lazımı düsturdan istifadə edirik.

Funksiyanın qrafikinə toxunana aid misallar həllinə toxunanın ümumi tənliyinin çıxarılmasına qədər başlamaq faydalıdır (eləcə də, VII-IX siniflərin cəbr kursunda funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətlərini törəmədən istifadə etmədən tapıldığı kimi). Bu şagirdlərin, birincisi, törəmənin həndəsi mənasını kifayət qədər yaxşı “hiss etmələrinə” və ikincisi toxunanın ümumi tənliyinin çıxarılmasına hazırlıqlarına imkan yaradır.

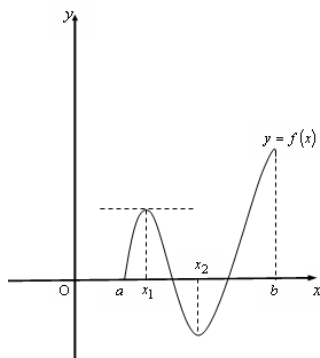
Törəmənin funksiyanın monotonluğunun araşdırılmasına tətbiqi haqda artıq yuxarıda danışmışıq.

Dərsdə funksiyanın ekstremumunun araşdırılmasının bir nümunəsini göstərək (konspektiv).

Funksiyanın 111-ci şəkildə göstərilən qrafikinə baxaq. Qrafikin iki nöqtəsi diqqəti daha çox cəlb edir: x_1 nöqtəsində funksiya yaxındakı nöqtələrə nəzərən böyük, x_2 nöqtəsində isə kiçik qiymətlər alır.

Deyilir ki, x_1 funksiyanın maksimum, x_2 isə minimum nöqtəsidir.

Funksiyanın bu nöqtələrdəki qiymətləri uyğun olaraq $y_{\max}$, $y_{\min}$ ilə işarə olunur. Maksimum və minimum nöqtələri ümumi adla birləşdirilir – ekstremum nöqtəsi. Müəllim şagirdlərə müraciət etməklə deyir ki, x_1 nöqtəsində funksiyanın qrafikinə toxunan çəkmək olar,



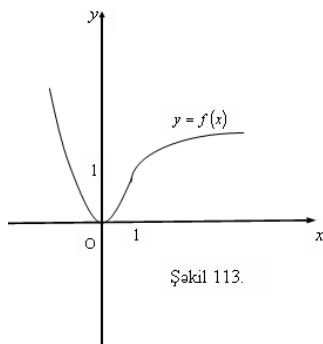
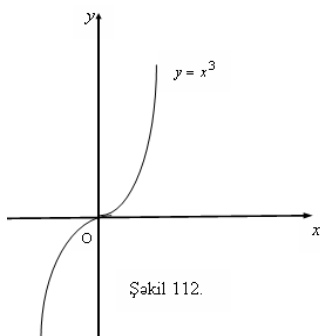
Şəkil 111.

həm də bu toxunan absis oxuna paraleldir; deməli bu nöqtədə törəmə sıfıra bərabərdir. x_2 nöqtəsində isə törəmə yoxdur.

Törəmənin sıfıra bərabər olduğu nöqtlərə, stasionar, törəmənin olmadığı nöqtlərə isə böhran nöqtləri deyilir. Funksiya ekstremum qiymətlərini yalnız stasionar və böhran nöqtlərdə ala bilər. Nə üçün? Fərz edək ki, hər hansı nöqtədə törəmə müsbətdir (və ya mənfidir), funksiyanın qrafikinə uyğun toxunan çəkin. O, qrafiki aşağıdan yuxarı (və ya yuxarıdan aşağı) özünə “dartır”, deməli həmin nöqtədə nə maksimum nə də minimum vardır. Həmişəmi stasionar və ya böhran nöqtlərdə funksiyanın ekstremumu olar? Yox, baxın: 112-ci şəkildə $y = x^3$ funksiyanın qrafiki təsvir olunmuşdur, onun $x=0$ stasionar nöqtəsi vardır. Lakin bu nöqtədə nə maksimum, nə də minimum vardır? 113-cü şəkildə isə $y = f(x)$ parçalı funksiyanın qrafiki təsvir

olunmuşdur, burada $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \text{ isə} \\ \sqrt{x}, & x > 1 \text{ isə} \end{cases}$

Bu funksiyanın $x=1$ böhran nöqtəsi vardır ki, burada nə maksimum nə də minimumu vardır. Müəllim davam edir ki, funksiya ekstremumunu monotonluğun xarakteri dəyişdiyi nöqtlərdə alır (çəkilmış şəkillərə baxmalı), başqa sözlə bu nöqtlərdə törəmə işarəsini dəyişir. Bundan sonra tərif verilir, uyğun



teoremlər ifadə olunur (Əlbəttə, isbat edilmir) və funksiyanın ekstremumunun araşdırılması alqoritmi hazırlanır.

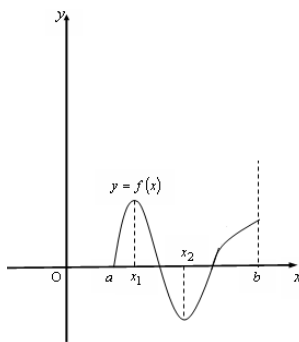
Yuxarıda deyilənlərə istilah və işarə barədə azacıq şərhə də əlavə edək.

Hazırda istifadə olunan dərsliklərin bəzilərində törəmənin sıfıra bərabər olduğu və ya olmadığı bütün nöqtlərə böhran, digərlərində isə

stasionar nöqtələr deyilir. Azərbaycan dilinə və istilahlara işlədilməsinə ehtiyatla yanaşmaq lazımdır. İstilahlar təbii olmalıdır, məktəblilər bilməlidirlər ki, riyazi dildə istilahlara mühüm yer tutur. Bir daha 111-ci şəkilə şagirdlərin diqqətini cəlb etməli: x_1 nöqtəsində funksiya “səlistləşir”, “stasionarda (hərəkətsizlikdə) rahatlanır”. Burada böhran hardadır, nə üçün bu nöqtə böhranlı adlanır? Budur x_2 nöqtəsində funksiya aşkar şəkildə təbii olmayan böhran vəziyyətindədir, bu böhran nöqtəsidir, heç cür stasionar deyil.

İndi işarə haqqında. Məktəbdə çox vaxt funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətləri maxy və miny ilə işarə edilir, belə yazılış məktəbliləri məhəlli (ekstremumu) ilə global (aralıqda funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətlərini) eyniləşdirməyə təhrik edir. Mənasib olmayan işarə məktəblilərin işin mahiyyətini başa düşmələrinə mane olur. Yaxşı olar ki, VII sinifdən başlayaraq parçada funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətləri $y_{\text{ənk}}$, $y_{\text{ənb}}$ ilə, X sinifdən başlayaraq isə funksiyanın maksimumu və minimumu üçün y_{max} , y_{min} ilə işarə edilsin. Şagirdlər üçün belə mənasibdir. Birinci növbədə isə onlar haqqında fikirləşmək lazımdır.

Nəhayət funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətlərinin axtarılmasından danışaq. Əsas məktəbin cəbr kursunda bu məzmunun olmaması böyük metodik səhvdir, yaxınlara qədər belə olmuşdur. Bu anlayışlar təcrübə olaraq ekstremumla eyni vaxtda diferensial hesabı kursunda daxil edildisə, onda ləbə olaraq birincisi, şagirdlərin həm mahiyyət, həm də istilahlardan istifadə də səhvə yol verəcəklər, ikincisi isə şagirdlərin bir qisminə belə təsəvvür yaranır ki, funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətlərini yalnız törəmənin tətbiqi ilə tapmaq olar. Əsas siniflərdə cəbr kursunun öyrənilməsi illərində şagirdlər əsasən funksiyanın qrafikinə köməyi ilə və bəzi hallarda qrafikin köməyi olmadan funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətlərinin tapılmasına aid kifayət qədər təcrübə əldə etməlidirlər. Nisbətən çətin hallarda funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətinin tapılması üçün törəmədən istifadə olunur. Bu fikri şagirdlərə çat-

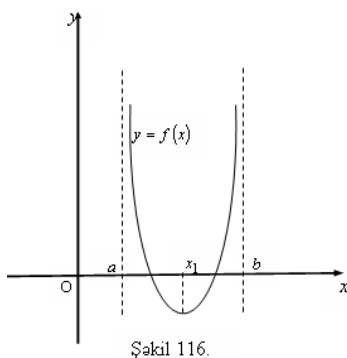
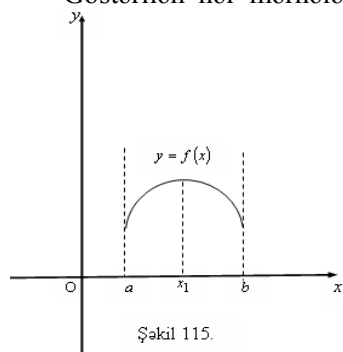


Şəkil 114.

dırmaq lazımdır, onlar başa düşməlidirlər ki, baxılan halda törəmə panaseya (yalançı kimyaqərlərdə: Guya bütün xəstəlikləri sağalan dərman) olmayıb məqsədə çatmaq üçün mümkün olan vasitələrdən biridir. Parçada kəsilməyən funksiyanın ən kiçik və ən böyük qiymətlərinin axtarılması algoritmini hazırlamaq üçün isə onun qrafikinə baxmaq və yuxarıda xatırlatdığımız variantın çertyoj metodunu tətbiq etmək kifayətdir. Məsələn, qrafiki 111-ci şəkildə göstərilən funksiya $y_{\text{ənk}}=f(x_2)$, $y_{\text{ənb}}=f(b)$, qrafiki 114-ci şəkildə göstərilən funksiya isə (111-ci şəklin bir qədər dəyişdirilmiş forması) $y_{\text{ənk}}=f(x_2)$, $y_{\text{ənb}}=f(x_1)$. Kəmiyyətlərin ən kiçik və ən böyük qiymətlərinin axtarılmasına aid məsələlərdə (məktəbdə bunlar optimallaşdırmaya aid məsələlər adlanır) çox vaxt açıq aralıqda verilmiş funksiya alınır. Bəzən uclara əlavə etməklə belə aralıqlar süni olaraq “qapanır”. Bu yaxşı variant deyil, ona görə ki artıq bu prinsipə başqa funksiya olur. Zənnimizcə, funksiyanın qapalı olmayan aralıqda ən kiçik və ən böyük qiymətlərinin tapılmasına diqqət vermək lazımdır. Şagirdləri, əyani əsasda belə bir teoremlə tanış etmək lazımdır ki, kəsilməz funksiyanın intervalda yalnız bir ekstremum nöqtəsi varsa, onda bu nöqtə maksimumdur (minimumdur), bu nöqtədə funksiya ən böyük (ən kiçik) qiymətini alır (Şəkil 115, 116).

Optimallaşdırma məsələləri şagirdlər üçün daha çox çətinliyə səbəb olur. Onları adi sxemlə həll etmək məqsədəuyğundur. Riyazi modelləşdirmənin üç mərhələsi şəklində: riyazi model qurmaq, modellə işləmək, məsələnin sualına cavab vermək, VII-IX sinfin cəbrini hazırda yazılmış dərsliklərlə öyrənən şagirdlərdə belə vərdiş qismən də olsa vardır.

Göstərilən hər mərhələ üçün



bəzi metodik tövsiyələr verək.

I mərhələ. Riyazi modelin qurulması

1) Məsələnin şərtini təhlil etməklə, optimallaşdırıcı kəmiyyəti, başqa sözlə söhbət gedən ən böyük və ya ən kiçik kəmiyyəti ayırmalı (onu, məsələn y hərfi ilə işarə etməli).

2) Məsələdə iştirak edən, optimallaşdırılan kəmiyyət nisbətən asanlıqla ifadə etmək mümkün olan, məchul kəmiyyəti asılı olmayan dəyişən qəbul etməli (məsələn, onu x hərflə işarə etməli). Məsələnin şərtinə uyğun olaraq asılı olmayan dəyişənin dəyişməsinin real sərhədlərini müəyyən etməli.

3) Məsələnin şərtinə əsasən y -i x -lə ifadə etməli. $y = f(x)$ funksiyasının analitik ifadəsini aldıqda və onun ikinci addımda tapılan x təyin oblastını göstərdikdə, məsələnin riyazi modeli tərtib edilmiş olacaqdır.

II mərhələ. Qurulmuş modellə iş.

4) $y = f(x)$, $x \in X$ funksiyası üçün y_{ank} və ya $y_{\text{ənb}}$ tapılır (məsələnin şərtində nəyin tələb olunmasından asılı olaraq)

III mərhələ. Məsələnin sualına cavab.

5) Burada məsələnin sualına model ilə işləmənin nəticəsinə əsaslanaraq konkret cavab alınmalıdır.

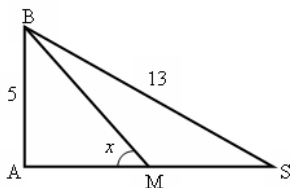
İlk baxışdan göründüyü kimi bu beş addımlıq planın birinci addımı həmişə aşkar olmur. Məsələ elə ifadə edilə bilər ki, hansı optimallaşdırılan kəmiyyətdən söhbət getdiyi o qədər də aydın olmaz. Aşağıda iki məsələni araşdıraraq.

465. Baza yoldan 5 km məsafədəki meşədə yerləşir, bu yolda abzadan 13 km məsafədə dəmir yolu dayanacağı vardır. Piyada yolla 5 km/s, meşə ilə isə 3 km/s sürətlə gedir. Piyada bazadan dayanacağı hansı ən az vaxta çatır?

Burada optimallaşdırılan kəmiyyət (vaxt) aşkar göstərilir.

Məsələnin sualını başqa cür ifadə edə bilərikmi? Piyada dayanacağı ən az müddətdə çatmaq üçün necə getməlidir? Burada şagirdlər düşünməlidir. Məsələdə, söhbət gedişatın seçilməsindən, ehtimallaşdırılan kəmiyyətdən – vaxtdan gedir. Planın dördüncü addımı – bu əsas məsələnin daxilində real məzmunlu təmiz riyazi müstəqil məsələdir. Bu addımda başlanğıc real vəziyyət bizi maraqlandırmır (bu riyazi modelləşdirmənin ikinci mərhələsi üçün səciyyəvidir), bizi yalnız ikinci addımda tapılmış asılı olmayan dəyişənin real sərhədləri arasında,

üçüncü addımda tərtib olunmuş funksiya üçün $y_{\text{ənb}}$ və ya $y_{\text{ənk}}$ -in axtarılması haqqında düşünürük. Təbiidir ki, $y_{\text{ənb}}$ və ya $y_{\text{ənk}}$ hər şeydən əvvəl törəmənin tətbiqilə tapılır. Lakin şagird belə hesab etməməlidir ki, bu qanundur. Yaranmış təfəkkürü pozmaq üçün funksiyanın ən böyük və ya ən kiçik qiymətlərini cəbri olaraq elementar və ya həndəsi mühakimə ilə səmərəli tapmağa aid nümunələr göstərmək yaxşı olardı. Bu məqsədlə 466-cı məsələnin həllini vermək olar. Əvvəlcə 465-ci məsələnin həllini göstərək. 117-ci şəkildə vəziyyətin həndəsi modeli göstərilir – BMS piyadanın marşrutudur.



Şəkil 117.

I mərhələ. Riyazi modelin tərtibi.

1) Optimallaşdırılan kəmiyyət – piyadanın B bazasından S dayanacağına qədər hərəkət vaxtı t ;

2) Asılı olmayan kəmiyyət olan BMA bucağını x ilə işarə edək. M nöqtəsi AS parçası üzərində ixtiyari vəziyyətdə ola bilər, bu parçadan kənarda M nöqtəsini göstərmək mənasızdır. M nöqtəsi S-in üzərinə düşərsə, onda $x = \arctg \frac{5}{12}$. M nöqtəsi A-ın üzərinə düşdükdə isə

$$x = \frac{\pi}{2}. \text{ Odu ki, } x\text{-in real dəyişmə sərhəddi belədir. } \arctg \frac{5}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

3) Piyadanın hərəkət vaxtının hesablanması. $BM = \frac{5}{\sin x}$; yolun bu hissəsində piyada 3 km/s sürətlə hərəkət edir, deməli bu yola sərf edilən t_1 vaxtı $t_1 = \frac{5}{3 \sin x}$ düsturu ilə ifadə olunur. Sonra, $MS = AS - AM = 12 - 5 \operatorname{ctg} x$; yolun bu hissəsində piyada 5 km/s sürətlə hərəkət edir, deməli bu yola sərf edilən t_2 vaxtı $t_2 = \frac{12 - 5 \operatorname{ctg} x}{5}$ düsturu ilə ifadə olunur. Nəticədə $t = \frac{5}{3 \sin x} + \frac{12 - 5 \operatorname{ctg} x}{5}$ alırıq, burada

$\arctg \frac{5}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Riyazi model quruldu: söhbət alınmış funksiyanın

$\left[\arctg \frac{5}{12}; \frac{\pi}{2} \right]$ parçasında ən kiçik qiymətinin axtarılmasından gedir.

II mərhələ. Qurulmuş model ilə iş.

4) funksiyanı diferensiallayıb $t' = \frac{3-5\cos x}{\sin^2 x}$ alırıq. Verilmiş

parçaya aid olan yeganə stasionar nöqtə $x = \arccos \frac{3}{5}$ -dür, $y = \cos x$

funksiyası azaldığından bu nöqtədən solda $\cos x > \frac{3}{5}$, sağda isə

$\cos x < \frac{3}{5}$ bərabərsizlikləri ödənilir. Bu o deməkdir ki, göstərilən

nöqtədən solda $t' < 0$, sağda isə $t' > 0$; beləliklə, $x = \arccos \frac{3}{5}$

funksiyanın verilmiş aralıqda yeganə ekstremum nöqtəsidir ki, bu da minimum nöqtəsidir, odur ki, məhz bu nöqtədə funksiya ən kiçik qiymətini alır.

III mərhələ. Məsələnin sualına cavab

5) $\cos x = \frac{3}{5}$ isə onda $\sin x = \frac{4}{5}$, $\operatorname{ctgx} = \frac{3}{4}$ və beləliklə

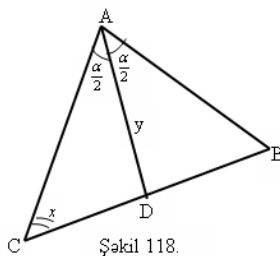
$$t = \frac{5}{3\sin x} + \frac{12-5\operatorname{ctgx}}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{5} \left(12 - 5 \cdot \frac{3}{4} \right) = 3\frac{11}{15}. \text{ Cavab 3 saat 44 dəq.}$$

466. Oturacağı a və tərpdəki bucağı α olan bütün üçbucaqlardan oturacağı çəkilmiş medianı ən böyük olanı tapın.

Həlli. I üsul (analitik).

1) Optimallaşdırılan kəmiyyət – tənbölənin uzunluğu AD (Şəkil 118); onu y ilə işarə edək.

2) C bucağını asılı olmayan dəyişən hesab edərək onu x hərfi ilə işarə edək; x -in real dəyişmə sərhəddi belədir: $0 < x < \pi - \alpha$.



3) ABC üçbucağı üçün sinuslar teoreminə görə $\frac{AB}{\sin x} = \frac{BC}{\sin \alpha}$ və

buradan

$$AB = \frac{a \sin x}{\sin \alpha}. \text{ İndi sinuslar teoremini ABD üçbucağına tətbiq}$$

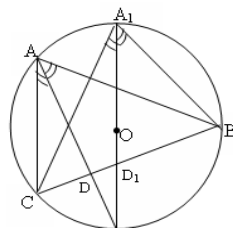
edək:

$$\frac{AD}{\sin \angle B} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}, \text{ buradan alırıq ki, } y = \frac{a \sin x \sin(x + \alpha)}{\sin \alpha \sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

$$4) y = \frac{a \sin x \sin(x + \alpha)}{\sin \alpha \sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)} \text{ funksiyasının } (0, \pi - \alpha) \text{ intervalında}$$

$y_{\text{ənb}}$ -i tapmaq lazımdır. Bu funksiyanın diferensiaslanması, uyğun triqonometrik tənliyin həlli ilə əlaqədar olaraq müəyyən texniki çətinliklə müşayiət olunur (Həllin sonrasını göstərmirik).

II üsul (həndəsi). Fərz edək ki, ABC oturacağı və təpə bucağı verilmiş üçbucaqlardan biridir (Şəkil 119). Bu üçbucağın xaricinə çevrə çəkək, onda oturacağı a və təpə bucağı α olan bütün üçbucaqların təpələri BAC qövsünün üzərində yerləşər. Belə üçbucaqlardan biri bərabəryanlıdır, onu BA_1C ilə işarə edək. ABC üçbucağının AD tən bölməni və BA_1C üçbucağının A_1D_1 tən bölməni çəkək. İsbat edək ki, $A_1D_1 > AD$.



Şəkil 119.

Hər iki tən bölməni xaricə çəkilmiş çevrəni kəsənə qədər uzadaq – kəsişmə nöqtəsi BC qövsünün M orta nöqtəsidir (bərabər daxilə çəkilmiş BAM və MAC bucaqları bərabər BM və MC qövsələrinə söykənir). A_1M – çevrənin diametridir, odur ki, $A_1M > AM$. Eyni zamanda $MD > MD_1$ (mail perpendikulyardan böyükdür), onda isə $A_1M - MD_1 > AM - MD$, yəni $A_1D_1 > AD$. Beləliklə, bərabəryanlı üçbucağın tən bölməni ən böyükdür.

Qeyd edək ki, yuxarıda deyilənlərin hamısı demək olar ki, [26₂]-da reallaşdırılmışdır.

ƏDƏBİYYAT

1. Ümumtəhsil məktəblərinin V-XI sinifləri üçün riyaziyyat proqramı, B-2010

2. Mərdanov M.C və b., Cəbr və analizin başlanğıcı-10, Ümumtəhsil məktəblərinin 10-cı sinfi üçün dərslik, “Çaşıoğlu”, Bakı – 2003, 303 s.

3. Mərdanov M.C və b., Cəbr və analizin başlanğıcı-11, Ümumtəhsil məktəblərinin 11-ci sinfi üçün dərslik, “Çaşıoğlu”, Bakı – 2003, 300 s.

4. Mirzəyev S.S. və b., Cəbr və analizin başlanğıcı -10, Məsələ və misallar, həlli ilə. “Ocaq”, poliqrafiya müəssisəsi, Bakı 2005, 358 s.

5₁. İlyas Həsənov, “Cəbr və analizin başlanğıcı-11”. Çalışmaların həlli, “Kür”

nəşriyyatı, 2005, 529 s

5₂. Əhmədov Q və b., Adi diferensial tənliklər, Bakı, 1978.

6. Quliyev Ə.A., Riyaziyyatın tədrisində ümumiləşdirmə, Bakı, “Elm” – 2009, 452 s.

7. Quliyev Ə.A., Cəbrin məsələ vasitəsilə yekun təkrarı, Bakı-2012, Elm, 232s.

8. Quliyev Ə.A., Törəmənin tətbiqlə istehsalat məzmunlu məsələlər həlli, “FRT” jurnalı, 1978, N2.

9. Quliyev Ə.A., Rzayeva F.Ə., Fizika məsələləri və diferensial tənlik anlayışı, ADPU-nun xəbərləri, B., 1999, N6

10. Quliyev Ə.A., Quliyev Y.A., Riyaziyyat abituriyentlər üçün, “Təbib”, B., 2000, 472 s.

11. Quliyev Ə.A., Bərabərsizliklərin həllində intervallar metodunun tətbiqinin öyrənilməsi metodikası, “ADPU-nun professor müəllim heyətinin 62-ci elmi konfransının materialları”, III buraxılış, B., 2002.

12. Quliyev Ə.A., Rzayeva F.Ə., Riyaziyyat dərslərində fizika məzmunlu məsələlər həlli, “ADPU-nun xəbərləri”, Bakı – 2002, N4

13. Quliyev Ə.A., Funksional tənlik, “ADPU-nun xəbərləri”, Bakı – 2006, N2

14. Quliyev Ə.A. Çalışmaların standart olmayan üsulla həlli, “Pux”, 2007, N2

15. Koçetkov İ.S., Koçetkova İ.S., Cəbr və elementar funksiyalar, II h, B., 1967, 293 s.

16. Колмогоров А.Н., и др., Алгебра и начала анализ, учебное пособие 9-20 класса средней школы., М., 1977
17. Вейц Б.Е., Демидов И.Т., Алгебра и начала анализ., М., 1973, 303s.
18. Новаоселов С.И., Специальный курс тригонометрии, М., 1967, "Высшая школа, 535 s.
- 19₁. Сивашинский И.Х. Элементарные функции и графики, "Наука", М., 1968. с.278
- 19₂. Арнольд В.И., Жесткие и мягкие математические модели, М., 1968, 200s.
20. Сборника задач по математике для конкурсных экзаменов во втязы, под ред. М.И.Сканави, издадельство «Высшая школа», М., 1973.
21. Гутер Р.С., и др., программирование и вычислительная математика, М., «Наука», 1965
22. Mərdanov M.C. və b., Riyaziyyat – 6, Ümumtəhsil məktəblərinin 6-cı sinfi üçün dərslik, "Çaşıoğlu", Bakı – 2003.
23. Гельфонд А.О., Исчисление конечных разностей, М., «Наука», 1967.
24. Новоселов С.И., Специвльный курс элементарной алгебры, «Высшая школа» М., 1962. 563с.
25. Виленкин Н.Я., Шварнбурд С.И. Математический анализ. Учебное пособие для :IX-X классов средних школ с математической специализацией М., «Просвещение», 1973..
26. Мордкович А.Г., 1) Методические проблемы изучения элементов Математического анализа, МВШ, 2002, №9, 2) Алгебра и начала анализа, 10-11, Из-во Мнемозина, М., 2000, 3) Алгебра 7-11, М., 2002.
27. Кордемский Б.А., От частного решения к общему, МВШ, 1973, №1.
28. Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления Т I-III, «Наука» М., 1970
29. Сатинский П.И., О решении Логарифмических и показательных неравенств, МВШ, 2002, № 8.
30. Кущенко В.С., Сборник конкурсных задач по математике с решением «Судостроение», Ленинград, 1964.
31. Ляпин С.Е. и др., Сборник задач по элементарной алгебре. М., «Просвещение», 1973. 350 с.

32. Задачи и упражнения по математическому анализу, для визов, под редакцией, Б.П. Демидовича физматчиз 1959, 471 с.

33. Соминский И.С., Элементарная алгебра, дополнительный курс, М., 1962, 200 с.

34. Koçetkov İ.C., Koçetkova İ.C. Cəbr və elementar funksiyalar, II hissə, Maarif, Bakı, 1967, 297 s.

35. Şahbazov Ə., Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika, Maarif, B., 1973, 578 s.

MÜNDƏRİCAT

GİRİŞ	3
I FƏSİL. X-XI siniflərdə cəbr və analizin başlanğıcı.....	6
1.1a. Riyaziyyat və onun tədrisi metodikasına dair.....	6
1.1b. Cəbr və analizin başlanğıcının məktəbdə öyrənilməsinin məqsədi	11
1.2. Toplama düsturları.....	12
1.3. Qüvvət və üstlü funksiyalar.....	15
1.4. İnformatikada kəmiyyət anlayışı.....	23
1.5. Fermanın kiçik teoremi.....	24
1.6. İnteqral.....	24
1.7. Eyniçevirmələr.....	30
1.8. Funksiyalar arasında məsafə.....	38
1.9. Bezu teoremi.....	48
1.10. Kompleks ədədlər.....	50
1.11. Ən sadə sıralar.....	53
1.12. Ədədlərin toplananlarına ayrılması.....	56
1.13. Funksional tənliklər.....	58
1.14. Triqonometrik bərabərsizliklər və tənliklər.....	64
1.15. İki ekvivalent bərabərsizlik.....	67
1.16. Limit və kəsilməzlik.....	68
1.17. Törəmə anlayışının daxil edilməsi metodikası.....	80
1.18. İnteqral anlayışının daxil edilməsi metodikası.....	95
1.19. Məktəb riyaziyyat kursunda ən sadə diferensial tənliklər...104	
1.20. Fərqlər tənliyi.....	113
 II FƏSİL. Cəbr və analizin başlanğıcının yekun təkrarı üçün məsələ və misallar.....	126
 III FƏSİL. II fəslə aid həllər, şərhlər və cavablar.....	173
 IV FƏSİL. Riyazi analiz elementlərinin məktəbdə öyrənilməsinin metodik problemləri.....	385
Ədəbiyyat.....	409

Əsab Aslan oğlu Quliyev

**X-XI SİNİFLƏRDƏ CƏBR VƏ ANALİZİN
BAŞLANGICI**

Bakı – «Elm» – 2014

«Elm» Redaksiya-Nəşriyyat və Poliqrafiya Mərkəzi

Direktor: H.Abiyev
Kompyuter tərtibi: R.Əzizov

Formatı 60x84 $\frac{1}{16}$. Həcmi 26 ç.v.
Sayı 300. Sifariş № 63
Qiyməti müqavilə ilə.

Tel: (012) 539 78 90
(012) 539 78 91

«Elm» RNPM-nin mətbəəsində çap edilmişdir.
(*Bakı, İstiqlaliyyət, 28*).

Əsab Aslan oğlu Quliyevin çap olunmuş əsərlərinin siyahısı:

1. Riyaziyyatın təlimi üsulları (1989).
2. XI sinifdə çoxüzlülərin öyrənilməsi metodikası (1990).
3. XI sinifdə yuvarlaq cismlər (1993).
4. Həndəsi cismlərin həcmnin və səthi sahəsinin öyrənilməsi metodikası (1992).
5. Riyaziyyat (abituriyentlər üçün) (2000).
6. Geometriyanın məsələ vasitəsilə təkrarı (2008).
7. Riyaziyyatın tədrisində ümumiləşdirmə (2009).
8. Həndəsə məsələləri (2010).
9. Riyaziyyatın məsələ vasitəsilə təkrarı (2011).
10. Cəbrin məsələ vasitəsilə yekun təkrarı (2012).

Kitabın arxasında

Əsab Aslan oğlu Quliyevin çap olunmuş əsərlərindən Riyaziyyatın təlimi üsulları (1989), XI sinifdə çoxüzlülərin öyrənilməsi metodikası (1990), XI sinifdə yuvarlaq cismlər (1993), Həndəsi cismlərin həcmnin və səthi sahəsinin öyrənilməsi metodikası (1992), Riyaziyyat (abituriyentlər üçün) (2000), Qeometriyanın məsələ vasitəsilə təkrarı (2008), riyaziyyatın tədrisində ümumiləşdirmə (2009), Həndəsə məsələləri (2010), Riyaziyyatın məsələ vasitəsilə təkrarı (2011), Cəbrin məsələ vasitəsilə yekun təkrarı (2012).