Ə.S.Həsənov
M.İ.Seyidov

ALİ RİYAZİYYATIN XÜSUSİ BÖLMƏLƏRİ

Dərs vəsaiti

Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin 06 dekabr 2018-ci il taixli 01–I/37 №-li əmi ilə nəşr hüququ verilmişdir

Bakı – 2018

UOT 51(070)

***Ə.S.Həsənov, M.İ.Seyidov. Ali ryaziyyatın xüsusi bölmələri. Dərs vəsaiti. Bakı, 2018, 224 səh*.**

Dərs vəsaitində mühəndislər üçün lazım olan təqribi hesablama üsulları, tənliklərin köklərinin təqribi hesablama qaydaları, interpolyasiya düsturları, diferensialın təqribi hesablamalara tətbiqi, geniş tətbiq sahələrinə malik adi və xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həllinin təqribi tapılması və s. şərh edilmişdir.

Dərs vəsaiti magistr pilləsində təhsil alan tələbələr və bu sahədə çalışan müxtəlif peşə sahibləri üçün nəzərdə tutulmuşdur.

Redaktor: Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin ″Ümumi və tətbiqi riyaziyyat″ kafedrasının dosenti Ə.M.Musayev

Rəyçilər: Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin ″Ümumi və tətbiqi riyaziyyat″ kafedrasının dosenti Ə.M.Musayev

Azərbaycan Texniki Universitetinin ″Ümumi və tətbiqi riyaziyyat″ kafedrasının dosenti V.M.Muradov

MÜNDƏRİCAT

GİRİŞ

Müasir dövrdə Azərbaycan Respublikasının Təhsil sistemində aparılan islahatların qarşıya qoyduğu bir çox yeni tələblərin həyata keçirilməsinə kömək məqsədi ilə azərbaycan dilində yeni dərsliklər və dərs vəsaitləri tərtib edilir.

Texniki universitetlərdə və bir çox başqa ali məktəblərdə ali təhsilin bakalavr pilləsində ″Ali riyaziyyat″ fənni tədris olunur. ″Ali riyaziyyat″ kursunun bir çox bölmələrinin tədrisinin isə təhsilin magistr pilləsində öyrənilməsi nəzərdə tutulur. Bu bölmələrdə nəzərdə tutulmuş mövzuların kitab şəklində tərtib olunması zərurəti meydana çıxır.

Dərs vəsaitində aşağıdakı bölmələr şərh keçirilmişdir:

- Diferensialın təqribi hesablamalara tətbiqi
- Birdəyişənli qeyri-xətti tənliklərin təqribi həlli
- Funksiyanın yaxınlaşması
- Ədədi diferensiallama
- Ədədi inteqrallama
- Adi diferensial tənliklərin təqribi həll üsulları
- Xüsusi törəməli diferensial tənliklər
- Simin rəqs tənliyi
- İstilikkeçirmə tənliyi
- Laplas tənliyi
- Laplas çevrilməsi və onun tətbiqləri

Bu bölmələrdə mühəndislər üçün lazım olan təqribi hesablama üsulları, tənliklərin köklərinin təqribi hesablama qaydaları, interpolyasiya düsturları, diferensialın təqribi hesablamalara tətbiqi, geniş tətbiq sahələrinə malik adi və xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həllinin təqribi tapılması və s. nəzərdən keçirilmişdir.

″Ali riyaziyyatın xüsusi bölmələri″ kitabı müəlliflərin ″Ümumi və tətbiqi riyaziyyat″ kafedrasında uzun illərdən bəri işlədikləri dövrdə apardıqları mühazirə və məşğələlər əsasında yazılmışdır.

Ali texniki universitetlərin ali təhsilin magistr pilləsində təhsil alan bəzi fakültə ixtisasları üçün nəzərdə tutulmuş bu dərs vəsaitinin tələb olunan məqsədlərə nail olacağını arzulayırıq və əvvəldən kitabda buraxıla biləcək nöqsanların aradan qaldırılması üçün köməklik göstərən hər bir oxucuya müəlliflər öz təşəkkürünü bildirir.

ADNSU-nin tələbələri üçün nəzərdə tutulmasına baxmayaraq, dərs vəsaitindən bütün ali texniki məktəblərin tələbə və müəllimləri də istifadə edə bilər.

1. DİFERENSİALIN TƏQRİBİ HESABLAMALARA TƏTBİQİ

1.1. Funksiyanın diferensialı

Tutaq ki, x nöqtəsində $y = f(x)$ funksiyasının törəməsi var, yəni

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) .$$

Onda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

yazmaq olar, burada $\Delta x \to 0$ olduqda $\alpha \to 0$.
Deməli, funksiyanın artımı

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x .$$

$\alpha \cdot \Delta x$ kəmiyyəti $f'(x) \cdot \Delta x$-ə nəzərən daha yükcək tərtibli sonsuz kiçik kəmiyyətdir, yəni $f'(x) \cdot \Delta x$ Δy artımının baş hissəsidir.

$y = f(x)$ funksiyasının artımının baş hissəsi ***funksiyanın diferensialı*** adlanır və $d\,f(x)$ və yaxud dy kimi işarə olunur.

Tərifdən alınır ki,

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x .$$

Əgər $y = x$ olarsa, onda

$$\left.\begin{aligned} &dy = dx \\ &dy = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta x = dx .$$

Nəticələr:

1) asılı olmayan dəyişənin diferensialı bu dəyişənin artımına bərabərdir;

2) x nöqtəsində $y = f(x)$ funksiyasının diferensialı bu

nöqtədə funksiyanın törəməsi ilə asılı olmayan dəyişənin diferensialı hasilinə bərabərdir:

$$dy = f'(x) \cdot dx .$$

Onda funksiyanın törəməsi diferensialların nisbəti kimi müəyyən edilə bilər:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} .$$

***Qeyd*:** Funksiyanın diferensialı dy x və Δx-dən asılıdır, funksiyanın $f'(x)$ törəməsi isə yalnız x-dən asılıdır.

Diferensialın xassələri

Tutaq ki, $u = f(x)$ və $v = g(x)$ x nöqtəsində diferensiallanan funksiyalardır. Törəmənin xassələrindən və diferensialın tərifindən istifadə edərək, diferensialın aşağıdakı xassələrinin olduğunu isbat etmək olar:

1. $d(C) = 0$, $C = const$;

2. $dx = \Delta x$, əgər $x -$ asılı olmayan dəyişəndirsə;

3. $d(Cu) = (Cu)'dx = Cu'dx = Cdu$;

4. $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$;

5. $d(u \cdot v) = (u \cdot v)'dx = (u'v + uv')dx = u'vdx + uv'dx =$

$= vdu + udv \;\Rightarrow\; d(u \cdot v) = vdu + udv$;

6. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \left(\dfrac{u}{v}\right)' dx = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} dx = \dfrac{u'vdx - uv'dx}{v^2} =$

$= \dfrac{vdu - udv}{v^2} \;\Rightarrow\; d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$;

7. $d(f(u)) = f_u'(u) \cdot u'dx = f_u'(u)du$.

Diferensialın tərifindən və xassələrindən alınır ki, törəmələrin və ya diferensialların tapılması mahiyyətcə, ***diferensiallama*** adlanan, eyni məsələyə gətirilir.

Misal 1.1.

$y = \sin x - \ln x + \sqrt[3]{x^5}$ funksiyasının diferensialını tapmalı.

Həlli.

Funksiyanın diferensialı $dy = f'(x) \cdot dx$ düsturu ilə təyin edilir.

$$f'(x) = \left(\sin x - \ln x + \sqrt[5]{x^3}\right)' = (\sin x)' - (\ln x)' + \left(x^{\frac{3}{5}}\right)' =$$

$$= \cos x - \frac{1}{x} + \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}}.$$

Beləliklə,

$$dy = \left(\cos x - \frac{1}{x} + \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}}\right) dx .$$

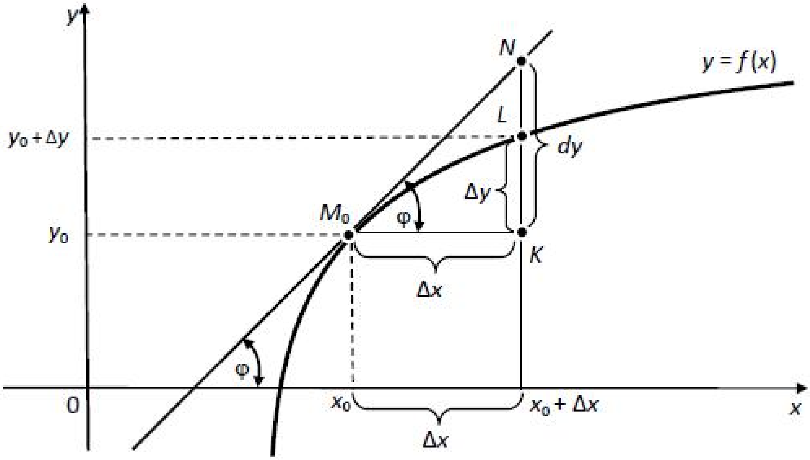
$M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində $y = f(x)$ funksiyasının diferensialının həndəsi mənasını araşdıraq (şəkil 1.1). Şəkilə əsasən, M_0KN düzbucaqlı üçbucağından

$$\frac{KN}{\Delta x} = tg\varphi \quad \Rightarrow \quad KN = tg\varphi \cdot \Delta x$$

və ya

$$\begin{cases} tg\varphi = y' \\ KN = y'dx \end{cases} \Rightarrow KN = dy ,$$

$KL = \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ olduğu alınır ki, bu da əyrinin ordinatının artımıdır.



Şəkil 1.1. Nöqtədə funksiyanın diferensialının həndəsi şərhi

Beləliklə, x_0 nöqtəsində $y = f(x)$ funksiyasının diferensialı həndəsi olaraq bu nöqtədə funksiyasının qrafikinə toxunanın ordinatının artımına bərabərdir.

Göstərilən mülahizələrdən aşağıdakı nəticəyə gəlmək olar: əgər $y = f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində törəməsi varsa, onda o bu nöqtədə diferensiallanandır, həm də nəzərə almaq lazımdır ki, $f'(x_0) = const$.

Bu təklifin əksi də doğrudur: əgər $y = f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində diferensiallanandırsa, onda bu nöqtədə onun törəməsi var.

Tutaq ki, $y = f(x)$ və $x = \varphi(t)$ funksiyaları verilmişdir, onda $y = f(\varphi(t))$ funksiyası t dəyişəninin mürəkkəb funksiyası, x dəyişəni isə aralıq arqument olur.

Tutaq ki, $\varphi(t)$ funksiyasının t nöqtəsində törəməsi var, $y = f(x)$ funksiyası isə t nöqtəsinə uyğun olan x nöqtəsində diferensiallanandır. Onda $y = f(\varphi(t))$ mürəkkəb funksiyası t nöqtəsində diferensiallanandır, bu halda mürəkkəb funksiyanın diferensialı

$$dy = (y')_t \cdot dt$$

şəklində olur.

$$(y')_t = f'(x) \cdot \varphi'(t),$$

onda

$$\left.\begin{aligned} dy &= f'(x) \cdot \varphi'(t) \cdot dt \\ dx &= \varphi'(t) \cdot dt \end{aligned}\right\} \Rightarrow dy = f'(x)dx. \qquad (1.1)$$

Nəticə: diferensialın yazılış forması x-in asılı dəyişən və ya başqa bir dəyişənin funksiyası olub-olmamasından asılı deyil, bununla əlaqədar olaraq (1.1) yazılış forması ***diferensialın invariant yazılış forması*** adlanır.

Qeyd. Əgər x asılı olmayan dəyişəndirsə, onda $dx = \Delta x$, amma əgər x başqa bir dəyişəndən asılıdırsa, onda $dx \neq \Delta x$.

Misal 1.2.

$$y = \sin^4 x, \; x = tg(t^3 - 2^t).$$

Funksiyanın diferensialını tapmalı.

Həlli.

Funksiyanın diferensialı $dy = f'(x) \cdot dx$ düsturu ilə təyin edilir.

$f'(x)$ törəməsini tapaq:

$$f'(x) = \left(\sin^4 x\right)' = 4\sin^3 x \cdot (\sin x)' = 4\sin^3 x \cdot \cos x.$$

dx-i tapaq:

$$dx = x'(t)dt, \quad x' = \frac{\left(t^3 - 2^t\right)'}{\cos^2(t^3 - 2^t)} = \frac{3t^2 - 2^t \ln 2}{\cos^2(t^3 - 2^t)}.$$

$$dy = f'(x)\cdot dx = f'(x)\cdot x'(t)dt$$

düsturunu tətbiq edək, onda alırıq ki,

$$dy = 4\sin^3 x\cdot\cos x\cdot\frac{3t^2-2^t\ln 2}{\cos^2(t^3-2^t)}dt\,.$$

Alınmış ifadədə $x = tg(t^3-2^t)$ olduğunu nəzər alsaq,

$$dy = 4\sin^3\left(tg(t^3-2^t)\right)\cdot\cos\left(tg(t^3-2^t)\right)\cdot\frac{3t^2-2^t\ln 2}{\cos^2(t^3-2^t)}dt$$

olar.

Bir çox məsələlərdə nöqtədə funksiyanın artımının yerinə bu nöqtədə funksiyanın diferensialına baxırlar, yəni $\Delta x = dx$. Funksiyanın diferensialı dx ilə müqayisədə artımdan sonsuz kiçik kəmiyyətlə fərqlənir. Əgər Δx artımı mütləq qiymətcə kiçik olarsa, onda funksiyanın artımı təqribi olaraq onun diferensialına bərabərdir:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) = f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x,\\ f'(x)\neq 0,\\ \alpha\Delta x\to 0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x+\Delta x)-f(x) = f'(x)\Delta x\,.$$

Nəzərə alsaq ki, $\Delta x = dx$, onda $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)dx$ alarıq.

Beləliklə, x_0 nöqtəsində funksiyanın təqribi qiymətini kiçik Δx üçün

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \qquad (1.2)$$

düsturu ilə hesablamaq olar.

Δx nə qədər kiçik olarsa, bu bərabərlik bir o qədər dəqiq olar.

Misal 1.3.

Diferensialın köməyi ilə $\cos 91^o$-ni təqribi hesablamalı.

Həlli.

$f(x) = \cos x$ funksiyasına baxaq, $f'(x) = -\sin x$.

(1.2) bərabərliyinə əsasən

$$\cos(x_0 + \Delta x) \approx \cos x_0 + (-\sin x_0) \cdot \Delta x .$$

$$\cos 91^o = \cos(90^o + 1^o) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{180}\right).$$

$x_0 = \frac{\pi}{2}$ və $\Delta x = \frac{\pi}{180}$ qiymətlərini nəzərə alsaq,

$$\cos 91^o = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{180}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + \left(-\sin\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{180} =$$

$$= 0 + (-1) \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180} \approx -0{,}017$$

olar.

Misal 1.4.

Diferensialın köməyi ilə $\ln(e - 0{,}1)$-i təqribi hesablamalı.

Həlli.

$f(x) = \ln x$ funksiyasına baxaq, $f'(x) = \frac{1}{x}$.

(1.2) bərabərliyinə əsasən

$$\ln(x_0 + \Delta x) \approx \ln x_0 + \frac{1}{x_0} \cdot \Delta x .$$

$x_0 = e$ və $\Delta x = -0{,}1$ qəbul edərək

$$\ln(e - 0{,}1) \approx \ln e + \frac{1}{e} \cdot (-0{,}1) = 1 - \frac{0{,}1}{e} \approx 0{,}963$$

olduğunu alarıq.

Misal 1.5.

Diferensialın köməyi ilə $\sqrt[3]{7,64}$ -ü təqribi hesablamalı.

Həlli.

$f(x)=\sqrt[3]{x}$ funksiyasına üçün $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Onda (1.2) bərabərliyinə əsasən alarıq:

$$\sqrt[3]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x_0}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}\cdot\Delta x.$$

$$x_0=8,\ \Delta x=x-x_0=7,64-8=-0,36.$$

Onda

$$\sqrt[3]{7,64}\approx\sqrt[3]{8}+\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}\cdot(-0,36)=2-\frac{1}{12}\cdot 0,36=1,97$$

olar.

1.2. Çoxdəyişənli funksiyanın tam diferensialı və onun köməyi ilə təqribi hesablamalar

$$\Delta u=f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,\ldots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

fərqi çoxdəyişənli $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiyasının arqumentlərin $\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_n$ artımlarına uyğun olan ***tam artımı*** adlanır.

Tutaq ki, $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiyası $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ nöqtəsinin hər hansı ətrafında təyin olunmuşdur. Əgər elə $A_i,\ i=\overline{1,n}$ varsa ki, bu nöqtədə funksiyanın tam artımını

$$\Delta u=A_1\cdot\Delta x_1+A_2\cdot\Delta x_2+\ldots+A_n\cdot\Delta x_n+o(\rho)$$

şəklində göstərmək olar, onda funksiya bu nöqtədə ***diferensiallanan*** adlanır, burada

$$\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\ldots+\Delta x_n^2},$$

$o(\rho)$ – hər bir $\Delta x_i \to 0$, $i=\overline{1,n}$ artımına nisbətən daha yüksək tərtibli sonsuz kiçik kəmiyyətdir.

İsbatsız aşağıdakı teoremləri verək.

Teorem (Funksiyanın nöqtədə diferensiallanan olmasını zəruri şərti). Əgər $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiyası $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ nöqtəsində təyin olunmuşdursa və diferensiallanandırsa, onda o bu nöqtədə kəsilməzdir, sonlu xüsusi törəmələri var və

$$A_i=\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_P, \quad i=\overline{1,n}.$$

Teorem (Funksiyanın nöqtədə diferensiallanan olmasını kafi şərti). Əgər $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiyası $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ nöqtəsinin hər hansı ətrafında təyin olunmuşdursa və bütün dəyişənlərə görə xüsusi törəmələri varsa və bu törəmələr həmin nöqtədə kəsilməzdirlərsə, onda funksiya bu nöqtədə diferensiallanandır.

$u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiyasının tam artımının, arqumentlərin artımlarına görə xətti olan, baş hissəsi bu ***funksiyanın birinci tərtib diferensialı*** adlanır və

$$du=A_1\cdot\Delta x_1+A_2\cdot\Delta x_2+\ldots+A_n\cdot\Delta x_n$$

kimi işarə edilir.

Birdəyişənli funksiyalarda olduğu kimi, asılı olmayan dəyişənlərin diferensialları onların artımları ilə üst-üstə düşür, yəni

$$dx_1=\Delta x_1,\ dx_2=\Delta x_2,\ \ldots,\ dx_n=\Delta x_n.$$

Əgər funksiya P nöqtəsində diferensiallanandırsa,

$$A_1=\frac{\partial u}{\partial x_1}(P),\ A_2=\frac{\partial u}{\partial x_2}(P),\ \ldots,\ A_n=\frac{\partial u}{\partial x_n}(P).$$

Onda çoxdəyişənli funksiyanın diferensialı

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n . \qquad (1.3)$$

Xüsusi halda, $z = f(x, y)$ üçün

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy . \qquad (1.4)$$

$u = f(x, y, z)$ üçün isə

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz . \qquad (1.5)$$

Nöqtədə diferensiallanan çoxdəyişənli f funksiyası üçün onun tam artımı $\Delta f = df + o(\rho)$. Onda $\Delta f \approx df$. Çoxdəyişənli funksiyaların qiymətlərini təqribi hesablamaq üçün bu düsturdan istifadə etmək olar.

Misal 1.6.

İkidəyişənli funksiyanın diferensialından istifadə etməklə $1{,}06^{2{,}98}$ ədədini təqribi hesablamalı.

Həlli.

Aydındır ki, axtarılan ədəd $z = x^y$ funksiyasının $M(1{,}06;\ 2{,}98)$ nöqtəsində qiymətidir. Qonşu $M_0(1;\ 3)$ nöqtəsində funksiyanın qiymətinə əsasən $f(x_0, y_0) = f(1;\ 3) = 1^3 = 1$ olar.

$$x = 1{,}06 = x_0 + \Delta x = 1 + 0{,}06 ;$$

$$y = 2{,}98 = y_0 + \Delta y = 3 - 0{,}02$$

ayrılışına əsasən M_0 nöqtəsindən M nöqtəsinə keçdikdə koordinatların $\Delta x = 0{,}06$, $\Delta y = -0{,}02$ artımlarını aldığını nəzərə alaraq,

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = dz(x_0, y_0) + o(\rho)\,,$$

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\ .$$

Buradan

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + dz(x_0, y_0)$$

qiymətini nəzərə alaraq $dz(x_0, y_0)$ -i hesablayaq.

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy\,,$$

$$dx = \Delta x\,,\ dy = \Delta y\ .$$

$$dz(1,3) = 0{,}18\ .$$

$$1{,}06^{2{,}98} \approx 1 + 0{,}18 = 1{,}18\ .$$

2. BİRDƏYİŞƏNLİ QEYRİ-XƏTTİ TƏNLİKLƏRİN TƏQRİBİ HƏLLİ

2.1. Köklərin təklənməsi üsulları

Bir çox cəbri və transendent tənliklərin dəqiq kökünü tapmaq olmur. Bu halda köklərin təqribi tapılması zərurəti yaranır. Bu məqsədlə, fərz edək ki,

$$f(x) = 0 \qquad (2.1)$$

qeyri-xətti tənliyi verilmişdir, $f(x)$ $a < x < b$ intervalında təyin olunmuş funksiyadır. Burada (a, b) sonlu və ya sonsuz intervaldır.

(2.1) tənliyinin həlli elə x^* ədədinə deyilir ki, o (2.1)-i eyniliklə ödəsin: $f(x^*) \equiv 0$

Tutaq ki, (2.1) tənliyinin izolə edilmiş kökləri var, yəni (2.1) üçün onun başqa köklərini saxlamayan interval var.

(2.1) tənliyinin təqribi həllinin tapılması iki hissədən ibarətdir:

1. köklərin təklənməsi, bu köklərin aid olduğu parçalarının tapılması;
2. təqribi köklərin dəqiqləşdirilməsi.

(2.1) tənliyinin həqiqi köklərini müxtəlif üsullarla təkləmək olar.

a) Əgər $[\alpha, \beta]$ parçasının uc nöqtələrində kəsilməz $f(x)$ funksiyasının qiymətləri müxtəlif işarəlidirsə, onda bu parçanın daxilində heç olmasa bir nöqtədə sıfıra bərabər qiymət alır ki, bu da kökün təklənməsini göstərir.

Misal 2.1. $f(x) = x^3 - 5x + 3 = 0$,

$f(0) = 3 > 0$, $f(1) = 1 - 5 + 3 = -1 < 0$.

$f(0)\cdot f(1)<0$ olması $[0,1]$ parçasında verilmiş tənliyin kökünün olduğunu göstərir.

b) Diferensial hesabının tətbiqi ilə köklərin təklənməsi.

Misal 2.2. $f(x)=x^4-4x-1=0$

$f(x)$ funksiyası üçün $f'(x)=4x^3-4=0 \Rightarrow x=1$ olduğundan, $(-\infty,1)$ və $(1,\infty)$ intervallarında tənliyin 2 həqiqi kökü var. Çünki

$$f(-\infty)>0,\ f(1)<0,\ f(+\infty)>0 .$$

Misal 2.3. $f(x)=2x+e^x=0$.

Bu tənlik üçün $f'(x)=2+e^x>0$ olduğundan $f(x)$ funksiyası artandır. Böhran nöqtəsi yoxdur. $f(-\infty)=-\infty,\ f(+\infty)=+\infty$ olduğundan $(-\infty,\infty)$ intervalında tənliyin yeganə kökü var.

c) Qrafik üsulla köklərin təklənməsi. Köklərin təklənməsi üçün (2.1) tənliyini $f_1(x)=f_2(x$ ekvivalent şəklində göstərmək, $f_1(x)$ və $f_2(x)$ funksiyalarının qrafiklərini qurub onların kəsişmə nöqtələrini tapmaqla, bu nöqtələrin absislərini (kökləri) müəyyən etmək olur.

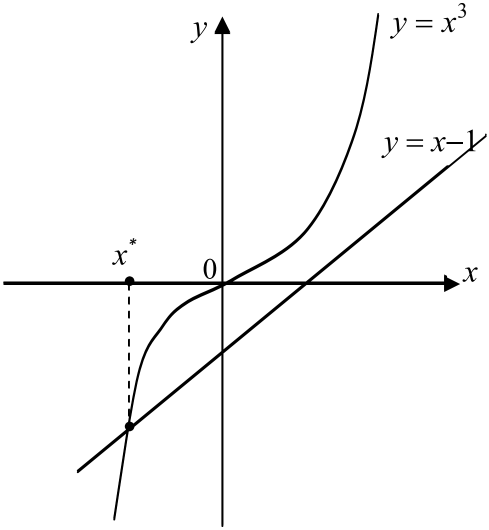
Misal 2.4. $f(x)=x^3-x+1=0 \Rightarrow x^3=x-1$.

$y=x^3$, $y=x-1$ funksiyalarının qrafiklərini quraq. Qrafiklər yalnız bir nöqtədə kəsişir. Deməli, tənliyin yeganə həqiqi kökü var (şəkil 2.1).

Bəzi hallarda aşağıdakı teoremdən də istifadə etmək əlverişli olur.

Teorem 2.1. Əgər $f(x)=0$ tənliyini təyin edən $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasının uclarındakı qiymətləri üçün $f(a)\cdot f(b)<0$ olarsa, yəni bu qiymətlər müxtəlif işarəlidirsə, onda bu tənliyin $[a,b]$ parçasında heç olmazsa bir həqiqi kökü var. Əgər $f(x)$ funksiyası kəsilməz və diferensiallanandırsa və $[a,b]$ parçası daxilində $f'(x)$ işarəsini sabit saxlayırsa, onda bu $[a,b]$ parçasında (2.1) tənliyinin yeganə x^* həlli var.

İntervalın uclarında $f(x)$ eyni işarəli qiymətlər alırsa, onda bu intervalda (2.1) tənliyinin ya kökləri yoxdur, ya da həqiqi köklər cüt saydadır.



Şəkil 2.1. Köklərin qrafik üsulla təklənməsi

Məlumdur ki, n dərəcəli $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ çoxhədlisinin x_p köklərinin (həmçinin kompleks) yerləşdiyi interval

$$|x_p| \le 1 + \frac{1}{|a_n|} \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|)$$

münasibəti ilə təyin olunur.

Köklərin təklənməsi üçün aşağıdakı Qyua teoremindən də istifadə etmək olar.

Teorem 2.2. Əgər $P_n(x) = 0$ tənliyinn bütün kökləri həqiqi ədədlərdirsə, onda $a_0, a_1, ..., a_n$ əmsalları üçün

$$a_k^2 > a_{k-1}a_{k+1}, k = \overline{1, n-1}$$

olur.

Teorem 2.3. Əgər hər hansı k $\left(k = \overline{1, n-1}\right)$ üçün $a_k^2 < a_{k-1}a_{k+1}$ münasibəti ödənirsə, onda $P_n(x) = 0$ tənliyinn ən azı bir cüt kompleks kökü var.

Köklərin tapılmasının 2-ci mərhələsində iki növ üsuldan istifadə olunur: 1) birbaşa və 2) iterasiya üsulları.

Birbaşa üsullarda həll əvvəlcədən məlum olan sonlu sayda addımda tapılır. Bu üsullarla sadə cəbri və transendent tənliklərin bəzilərini həll etmək olur.

Verilmiş tənliyin iterasiya üsulları ilə həllində onun x^* kökü müəyyən bir $x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(k)}$ ardıcıllığının limitinin tapılmasına gətirilir və axtarılan həll əvvəlcədən məlum olan sonlu sayda addıma tapıla bilmir.

Qeyri-xətti tənliklərin əsas təqribi həll üsulları iterasiya üsullarıdır: parçanı yarıya bölmə (dixotomiya) üsulu, sadə iterasiya üsulu, toxunanlar (Nyuton) üsulu, kəsənlər (vətərlər) üsulu, parabola (Müller) üsulu, qarışıq üsul.

Prosesin yığılma sürəti iterasiya üsullarının əsas xarakteristikasıdır.

Əgər

$$\left|x^{(k+1)} - x^*\right| = c\left|x^{(k)} - x^*\right|^n$$

olarsa, onda üsul n-ci tərtib yığılmaya malikdir deyirlər (burada $c - n$-dən asılı olmayan sabitdir). $n = 1$ olduqda birinci tərtib yığılma, $n = 2$ olduqda isə ikinci tərtib yığılma alınır. Bu yığılmalara, uyğun olaraq, xətti və kvadratik yığılma da deyirlər.

İterasiya ardıcıllığını qurarkən funksiyanı bir, iki və s. nöqtədə hesablamaq lazım gəlir. Bu halda iterasiya üsullarına, uyğun olaraq, ***biraddimlı***, ***ikiaddımlı*** və s. üsullar deyilir.

2.2. Dixotomiya (parçanı yarıya bölmə) üsulu

Dixotomiya üsulu $f(x)=0$ şəklində qeyri-xətti tənliklərin həlli üçün ən sadə üsullardan biridir. Onun əsas üstünlüyü ondadır ki, həmişə yığılandır. Bu üsulun çatışmazlığı onun yavaş sürətlə yığılmasıdır.

Tutaq ki, araşdırmalara görə məlumdur ki, $f(x)=0$ tənliyinin kökü $[a_0,b_0]$ parçasındadır, yəni $x^*\in[a_0,b_0]$, belə ki, $f(x^*)=0$.

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a_0,b_0]$ parçasında kəsilməzdir və parçanın uclarında onun qiymətlərinin işarələri müxtəlifdir, yəni

$$f(a_0)\cdot f(b_0)<0. \qquad (2.2)$$

$[a_0,b_0]$ parçasını yarıya bölsək. $x_0=\dfrac{a_0+b_0}{2}$ nöqtəsini alarıq. Bu nöqtədə funksiyanın $f(x_0)$ qiymətini hesablayaq. Əgər $f(x_0)=0$ olarsa, onda x_0 – tənliyin axtarılan (tələb olunan) kökdür, bununla da məsələ həll olunmuşdur və hesablamaları dayandırırıq. Əks halda, yəni $f(x_0)\neq 0$ olarsa, onda $f(x_0)$ üçün ya $f(x_0)>0$, ya da $f(x_0)<0$ olur. Onda ya $[a_0,x_0]$ parçasının, ya da $[x_0,b_0]$ parçasının uclarında $f(x)$ funksiyasının qiymətlərinin işarələri müxtəlif olur. Belə parçanı $[a_1,b_1]$ ilə işarə edək. Aydındır ki, $x^*\in[a_1,b_1]$ və $[a_1,b_1]$ parçasının uzunluğu $[a_0,b_0]$ parçasının uzunluğundan iki dəfə kiçikdir. Eyni qayda ilə uyğun əməliyyatları $[a_1,b_1]$ parçası üçün aparaq. Nəticədə ya x^*

kökünü, yaxud da yeni $[a_2,b_2]$ parçasını alırıq. Prosesi bu qayda ilə davam etdirik.

n-ci parçanın ortası $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Aydındır ki, $[a_n,b_n]$ parçasının uzunluğu $\dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$-ə bəabər olacaq.

$x^* \in [a_n,b_n]$, onda

$$|x_n - x^*| \le \frac{b_n - a_n}{2} \le \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}. \qquad (2.3)$$

(2.3) münasibəti parçanı yarıya bölmə üsulunun xətasını xarakterizə edir və yığılmanın sürətini göstərir: üsul həndəsi silsilə sürəti ilə yığılır və $q = 1/2$.

(2.3) münasibətindən alınır ki,

$$\frac{b_n - a_n}{2} \le \varepsilon \qquad (2.4)$$

bərabərsizliyi ödənildikdə və ya

$$n \ge \log_2 \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} - 1 \qquad (2.5)$$

olduqda iterasiya prosesi dayandırılır (ε verilmiş dəqiqlikdir). Beləliklə, iterasiyaların sayını qabaqcadan müəyyən etmək olar. Kökün təqribi qiyməti kimi x_n götürülür.

Misal 2.5. $\varepsilon = 0{,}01$ dəqiqliyi ilə $x = \sqrt[5]{2}$-ni tapaq. Bu məsələ $f(x) = x^5 - 2 = 0$ tənliyinin kökünün tapılması ilə ekvivalentdir. İlkin $[a_0,b_0]$ parçası kimi $[1,2]$ parçasını götürək. Bu parçanın uclarında funksiya müxtəlif işarəli qiymətlər alır: $f(1) < 0$, $f(2) > 0$.

Lazım olan dəqiqliyə nail olmaq üçün $[1,2]$ parçasının bölünmələrinin n sayını tapaq.

$$|x_n - x^*| \le \frac{2-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \le 10^{-2} \Rightarrow n \ge 6 .$$

Beləliklə, 6-cı bölünmədən gec olmayaraq lazım olan dəqiqliklə $\sqrt[5]{2}$ tapılır, yəni $\sqrt[5]{2} \approx 1{,}1484$. Hesablamaların nəticələri cədvəl 2.1-də verilmişdir.

Cədvəl 2.1

n	a_n	b_n	x_n	$f(a_n)$ işarəsi	$f(b_n)$ işarəsi	$f(x_n)$	$a_n - b_n$
0	1,0000	2,0000	1,5000	–	+	5,5938	1,0000
1	1,0000	1,5000	1,2500	–	+	0,7585	0,5000
2	1,0000	1,2500	1,1250	–	+	–0,2959	0, 2500
3	1,1250	1,2500	1,1875	–	+	0,1812	0,1250
4	1,1250	1,1875	1,1406	–	+	–0,0691	0,0625
5	1,1406	1,1875	1,1562	–	+	0,0532	0,0312
6	1,1406	1,1562	1,1484	–	+	–0,0078	0,0156

2.3. Sadə iterasiya üsulu və onun xətası

$f(x) = 0$ tənliyinin təqribi kökünü dəqiqləşdirmək üçün sadə iterasiya üsulu adlanan üsuldan istifadə edək. Bu zaman $f(x) = 0$ tənliyi

$$x = \varphi(x) \tag{2.6}$$

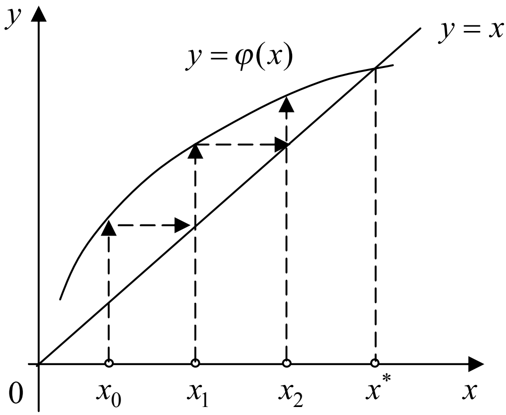
şəklinə gətirilir. Bu onu göstərir ki, $f(x^*) = 0$-dan $x^* = \varphi(x^*)$ alınır və tərsinə.

Köklərin təkləndiyi intervalda həndəsi olaraq (2.6) tənliyi iki kəsişən $y = x$ və $y = \varphi(x)$ qrafikləri şəklində göstərilir (şəkil 2.2). x^* kökü üçün x_0 başlanğıc yaxınlaşmasının verildiyini fərz edək.

Onda iterasiya prosesinin

$$x_k = \varphi(x_k) \ , \ k = 0,1,2,\dots \qquad (2.7)$$

şəklində olduğunu alarıq.



Şəkil 2.2. $x = \varphi(x)$ tənliyinin kökünün dəqiqləşdirilməsi

Teorem 2.4. Tutaq ki, $\varphi(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunmuşdur, diferensiallanandır və $\varphi(x) \in [a,b]$. Əgər elə bir q ədədi varsa ki, $|\varphi'(x)| \le q < 1$, $a < x < b$, onda: 1) (2.7) iterasiya prosesi başlanğıc x_0 yaxınlaşmasının seçilməsindən asılı olmayaraq yığılır; 2) $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ qiyməti (2.6) tənliyinin yeganə həllidir.

İsbatı. $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ və $x_n = \varphi(x_{n-1})$ yaxınlaşmalarına baxaq. Buradan alırıq ki,

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}) \, .$$

Laqranj teoreminə görə

$$x_{n+1} - x_n = (x_n - x_{n-1})\varphi'(\bar{x}_n) \, , \quad \bar{x}_n \in (x_{n-1}, x_n) \, .$$

Onda

$$|x_{n+1} - x_n| \le q\,|x_n - x_{n-1}| \qquad (2.8)$$

və

$$\begin{aligned} &|x_2 - x_1| \le q|x_1 - x_0|, \\ &|x_3 - x_2| \le q|x_2 - x_1| \le q^2|x_1 - x_0|, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &|x_{n+1} - x_n| \le q^n|x_1 - x_0| \end{aligned} \qquad (2.9)$$

olar. Aşağıdakı sıraya baxaq:

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots \qquad (2.10)$$

x_n ardıcıl yaxınlaşmaları (2.10) sırasının $(n+1)$-ci xüsusi cəmləridir, yəni

$$x_n = S_{n+1} \ .$$

(2.9) münasibətlərinə əsasən (2.10) sırasının hədləri mütləq qiymətcə vuruğu $q<1$ olan həndəsi silsilənin uyğun hədlərindən modulca kiçikdir, ona görə də (2.10) sırası mütləq yığılır. Deməli,

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = x^* \quad \text{və} \quad x^* \in [a,b] .$$

$x_n = \varphi(x_{n-1})$ bərabərliyində limitə keçək, $\varphi(x)$ funksiyasınınn kəsilməzliyinə əsasən alarıq:

$$x^* = \varphi(x^*) .$$

Həllin yeganəliyini göstərək. Doğrudan da, əgər başqa bir ξ ədədi də bu tənliyin həllidirsə, yəni $\xi = \varphi(\xi)$ olarsa, onda

$$x^* - \xi = \varphi(x^*) - \varphi(\xi) = \varphi'(c)(x^* - \xi) ,$$

$$(x^* - \xi)[1 - \varphi'(c)] = 0 \ , \ c \in [x^*, \ \xi]$$

olar. Buradan

$$x^* - \xi = 0 \;\Rightarrow\; x^* = \xi$$

alırıq (çünki $1 - \varphi'(c) \neq 0$). Teorem isbat olundu.

Beləliklə,

$$|\varphi'(x)| < 1 \qquad (2.11)$$

olması yığılma üçün kafi şərtdir.

Əgər $|\varphi'(x)| > 1$ olarsa, onda iterasiyalar yığılmaya da bilər. Əgər $|\varphi'(x)| < 1$ -dirsə, lakin kökdən uzaqda $|\varphi'(x)| > 1$ olarsa, onda iterasiyalar yığılır. Başlanğıc yaxınlaşma ixtiyari qaydada seçildikdə yığılma olmaya da bilər. Beləliklə, başlanğıc yaxınlaşmanın seçilməsi sadə iterasiya üsulunda çox vacibdir (bax, şəkil 2.3).

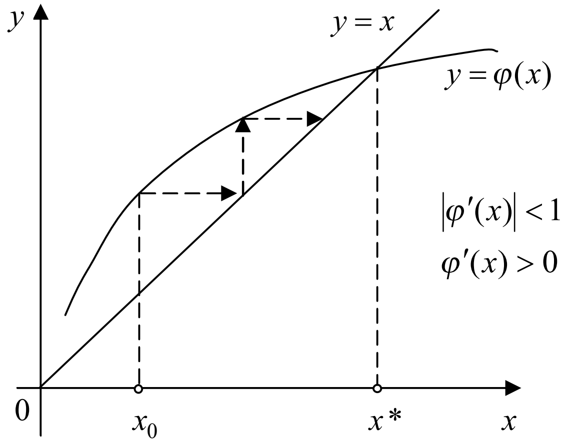
Şəkil 2.3-də $y = x$ və $y = \varphi(x)$ funksiyalarının qrafiklərinin qarşılıqlı vəziyyətinin 4 halı və onlara uyğun iterasiya prosesləri təsvir edilmişdir. a) və b) halları $|\varphi'(x)| < 1$ halına uyğundur – iterasiya prosesləri yığılır. Bu zaman: a) halında $\varphi'(x) > 0$, yığılma birtərəfli xarakter daşıyır; b) halında isə $\varphi'(x) < 0$, yığılma ikitərəfli xarakter daşıyır; c) və d) halları $|\varphi'(x)| > 1$ halına uyğundur və bu hallarda iterasiya prosesi dağılır (c)-də birtərəfli, d)-də ikitərəfli dağılma).

Qeyd edək ki, (2.11) yığılma üçün kafi şərtdir. Bu zaman yaxınlaşmaların hər biri kökün təkləndiyi parçaya düşür. (2.11) şərtinin ödənməsi (2.7) prosesinin yığılmasını təmin edir, lakin bu şərtin ödənməməsi iterasiya prosesinin dağılan olduğunu göstərmir.

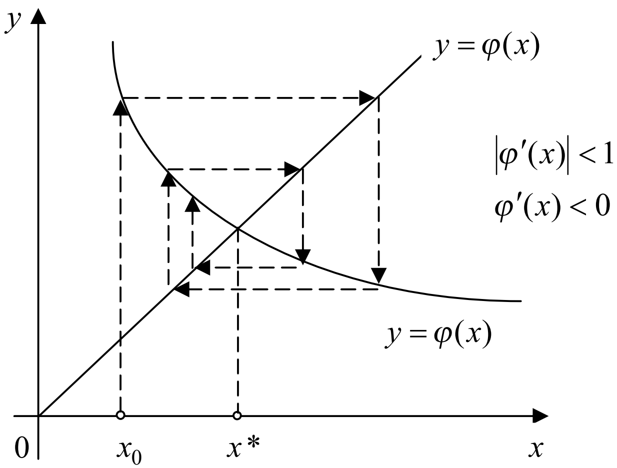
(2.8) və (2.9)-dan alırıq ki,

$$|x^* - x_{k+1}| = \varepsilon_{k+1} \leq q\varepsilon_k = q|x^* - x_k|,$$

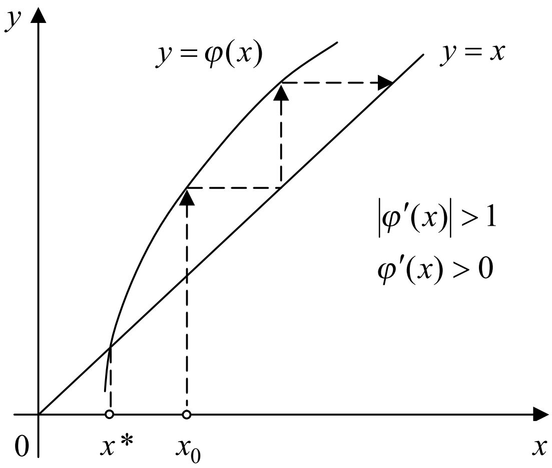
burada $q = \max|\varphi'(x)|$, $x \in [a,b]$. Aydındır ki, iterasiya prosesinin yığılma sürəti q-dən asılıdır. Belə ki, q nə qədər kiçik olarsa, yığılma bir o qədər sürətli olar.



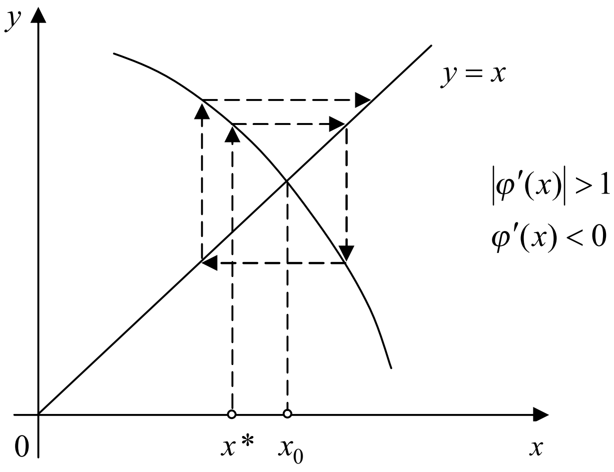
a)



b)



c)



d)

Şəkil 2.3. $y = x$ və $y = \varphi(x)$ funksiyalarının qrafiklərinin qarşılıqlı vəziyyətləri

Qeyd edək ki, sadə iterasiya üsulunu daha ümumi $f(x)=0$ şəklində tənliyə tətbiq etmək olar.

$$f(x)=0 \Rightarrow x = x - \tau f(x) \qquad (2.12)$$

Burada $\tau \neq 0$ – müəyyən ədəddir. Alınan tənlik $\varphi(x)=x-\tau f(x)$ funksiyası ilə (2.3) tənliyinə ekvivalentdir. τ parametrinin qiymətini elə seçmək olar ki, sadə iterasiya üsulunun yığılmasına və yığılma sürətinin artırılmasına nail olunsun. Məsələn, təklənmə parçasında $f'(x)$ törəməsi m və M sabitləri ilə məhduddursa

$$0 < m < f'(x) < M,$$

onda $\varphi'(x)$ törəməsi üçün

$$1-\tau M < \varphi'(x) < 1-\tau m$$

olar.

$\tau = \dfrac{2}{M+m}$ götürsək, alarıq:

$$-\frac{M-m}{M+m} < \varphi'(x) < \frac{M-m}{M+m}$$

yəni $|\varphi'(x)| < 1$. Deməli, sadə iterasiya üsulunun yığılması şərti ödənilir.

τ parametrini iterasiyanın nömrəsindən asılı olan dəyişən kimi də götürmək olar. Belə ki, əgər

$$\tau_k = \frac{1}{f'(c_{k-1})}$$

götürsək, onda (2.12) tənliyi üçün sadə iterasiya üsulu

$$c_k = c_{k-1} - \frac{f(c_{k-1})}{f'(c_{k-1})}$$

şəklinə gəlir. Bu düstur toxunanlar üsulu ilə üst-üstə düşür.

Beləliklə, toxunanlar üsulunu sadə iterasiya üsulunun τ dəyişənli xüsusi halı kimi vermək olar.

Qeyd 1. Əgər $\varphi(x)$ funksiyası $-\infty < x < \infty$ aralığında təyin olunmuşdursa, diferensiallanandırsa və $x \in (-\infty, \infty)$ olduqda $|\varphi'(x)| \le q < 1$ şərti ödənilirsə, onda qeyd edilmiş teorem yenə də doğrudur.

Qeyd 2. Teoremin şərtləri ödənildikdə iterasiya prosesi istənilən $x_0 \in [a,b]$ başlanğıc yaxınlaşması üçün yığılır.

Misal 2.6. $x = \sqrt{a}$ -nın hesablanmasına baxaq.

$$f(x) = x^2 - a = 0 .$$

Bu tənliyi $x = \varphi(x)$ şəklinə 3 üsulla gətirmək olar.

1) $x = \sqrt{a} \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow x = \dfrac{a}{x} \Rightarrow \varphi(x) = \dfrac{a}{x}$;

$\varphi'(x) = -\dfrac{a}{x^2}$ və $|\varphi'(x)| \to 1,\ x \to \pm\sqrt{a}$ olduqda iterasiya prosesi yığılmır.

2) $x^2 = a \Rightarrow x^2 - a = 0 \Rightarrow x = x^2 + x - a \Rightarrow \varphi(x) = x^2 + x - a$;

$\varphi'(x) = 2x + 1 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ olduqda $\varphi'(x) = 0$ olur.

$x \in (-1{,}0)$ olduqda $|\varphi'(x)| < 1$, $x \notin (-1{,}0)$ olduqda isə $|\varphi'(x)| \ge 1$ olur.

Bu halda iterasiya prosesi kökün mənfi qiymətlərində sonlu intervalda yığılır

3) $x^2 = a \Rightarrow x = \dfrac{a}{x} \Rightarrow x = \dfrac{x + \dfrac{a}{x}}{2} \Rightarrow \varphi'(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{x^2}\right)=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{a} \text{ və } \qquad x=\pm\sqrt{a} \text{ olduqda}$$

$|\varphi'(x)| \to 0$ olur.

Bu halda iterasiya prosesi çox tez yığılır.

Qeyd edək ki, $x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$ tənliyi $\sqrt{a}$-nın qiymətinin kompüterdə hesablamması üçün istifadə olunur.

Beləliklə, sadə iterasiya üsulunda $\varphi(x)$ funksiyasını seçilməsi əsasdır.

2.4. Toxunanlar (Nyuton) üsulu

Tutaq ki, ξ (2.1) tənliyinin həllidir və $f(x)$ funksiyası 2-ci tərtib kəsilməz törəməyə malikdir. Hər hansı $x_n \approx \xi$ n-ci yaxınlaşmasını tapmaqla, bu yaxınlaşmanı toxunanlar üsulu ilə aşağıdakı kimi dəqiqləşdirə bilərik:

$$\xi = x_n + h \ , \tag{2.13}$$

burada h mütləq qiymətcə kiçik kəmiyyətdir. $f(\xi)$ funksiyasını Teylor sırasına ayıraq. Bu ayrılışın ilk iki həddi ilə kifayətlənək:

$$0=f(\xi)=f(x_n+h)\approx f(x_n)+hf'(x_n) \Rightarrow h=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ .$$

Onda (2.13) ifadəsinə əsasən

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,2,... \tag{2.14}$$

alırıq. Toxunanlar üsulu $f(x_0)f''(x_0)>0$ şərtini ödəyən ucdan tətbiq olunur.

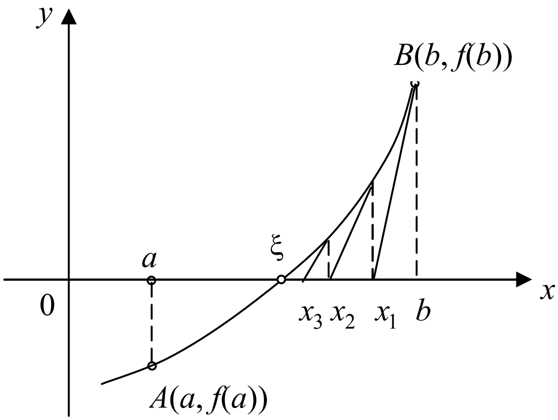
Bu üsulu həndəsi izah edək (şəkil 2.4).

$B(b, f(b))$ nöqtəsində əyriyə çəkilmiş toxunanın tənliyi

$$y - f(b) = f'(b)(x - b)$$

şəklindədir. Bu tənlikdə $y = 0$, $x = x_{n+1}$, $b = x_n$ götürsək alırıq:

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Şəkil 2.4.Toxunanlar üsulu ilə tənliyin kökünün dəqiqləşdirilməsi

Qeyd 3. Əgər $f'(x)$ törəməsi $[a,b]$ parçasında az dəyişirsə, $f'(x_n) \approx f'(x_0)$ götürmək olar. Onda

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0,1,2,... \qquad (2.15)$$

alarıq. (2.15) düsturu modifikasiya olunmuş toxunanlar üsulu adlanır. Sadə iterasiya üsulu üçün yığılmanın kafi şərtindən bu üsul üçün uyğun şərti almaq olar.

$x = \varphi(x)$ və (2.14) münasibətlərindən, toxunanlar üsulunun

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

olduqda, sadə iterasiya üsulundan alınan xüsusi halı olduğu görünür. Bu halda sadə iterasiya üsulu üçün $|\varphi'(x)| < 1$ yığılma şərtindən və

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

ifadəsindən toxunanlar üsulunun yığılması üçün

$$|f(x)f''(x)| < [f'(x)]^2$$

kafi şərtini alırıq.

$$f(x^*) = 0 \Rightarrow \varphi'(x^*) = 0$$

olduğundan (2.14) iterasiya prosesi ixtiyari başlanğıc yaxınlaşma üçün kökün dəqiq qiymətinə yığılır.

Bu üsulunun yığılma sürətini qiymətləndirək. Aydındır ki,

$$x_{k+1} - x^* = \varphi(x_k) - \varphi(x^*) \tag{2.16}$$

olduğu aydındır. $\varphi(x_k)$ funksiyasını

$$\varphi(x_k - x^* + x^*) =$$

$$= \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)(x_k - x^*) + \frac{1}{2}\varphi''(x^*)(x_k - x^*)^2 + \dots$$

Teylor sırasına ayıraq. Bu ayrılışı (2.16)-da yazıb və $\varphi'(x^*) = 0$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\varepsilon_{k+1} \approx \frac{1}{2}\varphi''(x)(\varepsilon_k)^2$$

alarıq. Bu onu göstərir ki, kökün yaxınlığında üsul II tərtib yığılmaya malikdir.

Nyuton üsulu biraddımlı üsuldur. Bu üsul sistem halına genişləndirilə bilir. Lakin $f'(x) \approx 0$ olan oblastlarda toxunanlar üsulu dağılır. Bundan başqa, əgər $f(x)$ funksiyası cədvəl şəklində verilmişdirsə, onda $f'(x)$ törəməsinin hesablanması çətinləşir. Göstərilən çətinlik başqa bir üsulda (vətərlər üsulunda) aradan qaldırılır.

(2.14) ifadəsindən görünür ki, toxunanlar üsulunda hesablamaların sayı çox, onun yığılma sürəti yüksəkdir.

Teorem 2.2. Tutaq ki, $x = c$ ədədi $f(x) = 0$ tənliyinin həllidir, $f'(c) \neq 0$ və $f''(c)$ kəsilməzdir. Onda c kökünün elə D ətrafı var ki, $c \in D$. Əgər c_0 başlanğıc yaxınlaşması bu ətrafa daxildirsə, toxunanlar üsulu üçün $\{c_n\}$ ardıcıllığı $n \to \infty$ olduqda c ədədinə yığılır. Bu zaman $\varepsilon_n = c_n - c$ xətası üçün aşağıdakı münasibət doğrudur:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2} = \frac{f''(x)}{2f'(x)}$$

2.5. Vətərlər üsulu

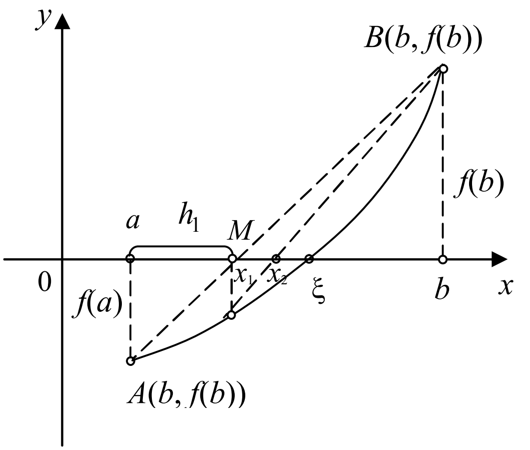
Tutaq ki, $f(x) = 0$ tənliyinin $\xi \in [a,b]$ həllini tapmaq tələb olunur və $f(a)\cdot f(b) < 0$.

Müəyyənlik üçün, $f(a) < 0,\ f(b) > 0$ olduğunu fərz edək (şəkil 2.5).

$[a,b]$ parçasını yarıya bölmək əvəzinə onu $f(a) : f(b)$ nisbətində iki hissəyə bölək. Bu bizə kökün təqribi

$$x_1 = a + h_1 \tag{2.17}$$

qiymətini verir. Buradan $\Delta AaM \sim \Delta BbM$ olduğuna görə belə yaza bilərik:



Şəkil 2.5. Vətərlər üsulu ilə tənliyin kökünün dəqiqləşdirilməsi

$$\frac{-f(a)}{f(b)} = \frac{h_1}{b-\left(a+h_1\right)},$$

$$h_1 = \frac{-f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a) \qquad (2.18)$$

Deməli,

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a) = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} \qquad (2.19)$$

Vətərlər üsulu

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0,1,2,...$$

toxunanlar üsulundan $f'(x)$ törəməsini iki ardıcıl $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$ və $[x_k, f(x_k)]$ yaxınlaşmalarına görə aşağıdakı kimi hesabladıqda alınır.

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_k)}{x_k - x_k} \quad .$$

$A(a, f(a))$ və $B(b, f(b))$ nöqtələrindən keçən düz xəttin

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}$$

tənliyində $x = x_1$, $y = 0$ götürsək (2.19) ifadəsini alarıq.

Vətərlər üsulunda hər bir iterasiyada $f'(x)$ törəməsini hesablamaq tələb olunmur. Bu da hesablamaların sayının xeyli azalmasına səbəb olur. Bu üsul ikiaddımlı üsuldur, çünki, hesablamaların 1-ci iterasiyasında həm x_0, həm də x_1 məlum olmalıdır.

Vətərlər üsulunun tətbiqi zamanı iki hal mümkündür: $f''(x)$ sabit işarəlidir və $f''(x) > 0$.

Tutaq ki, $f(a) < 0$. Bu halda $[a,b]$ parçasının b ucu tərpənməzdir və

$$x_0 = a, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n f(b) - bf(x_n)}{f(b) - f(x_n)}, \quad n = 0,1,2,...$$

ardıcıl yaxınlaşmaları monoton artan ardıcıllıq olmaqla, bu ardıcıllıq məhduddur:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1} < ... < \xi < b \, .$$

Tutaq ki, $f(a) > 0$. Bu halda $[a,b]$ parçasının a ucu tərpənməzdir və

$$x_0 = b, \qquad x_{n+1} = \frac{af(x_n) - x_n f(a)}{f(x_n) - f(a)}, \quad n = 0,1,2,...$$

ardıcıl yaxınlaşmaları məhdud monoton azalan ardıcıllıq əmələ gətirirlər:

$$a < \xi < ... < x_{n+1} < x_n < ... < x_1 < x_0 = b \, .$$

Deməli, parçanın tərpənməz uc nöqtəsi $f(c)f''(c) > 0$ şərtindən seçilir, bu zaman ya $c = a$ və yaxud da $c = b$ olur.

Vətərlər üsulunun yığılma şərti toxunanlar üsulunun yığılma şərtinə uyğundur. Vətərlər üsulunun yığılma tərtibi

$$\varepsilon_{n+1} = \alpha\varepsilon_n\varepsilon_{n-1} = \alpha^{1/p}[\varepsilon_n]^p$$

münasibəti ilə təyin olunur. Burada

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}, \ p = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618 .$$

x_n yaxınlaşmasının xətasını

$$\left|x^* - x_n\right| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1}$$

kimi qiymətləndirmək olar, burada $m_1 = \min\limits_{[a,b]}\left|f'(x)\right|$.

2.6. Parabola üsulu

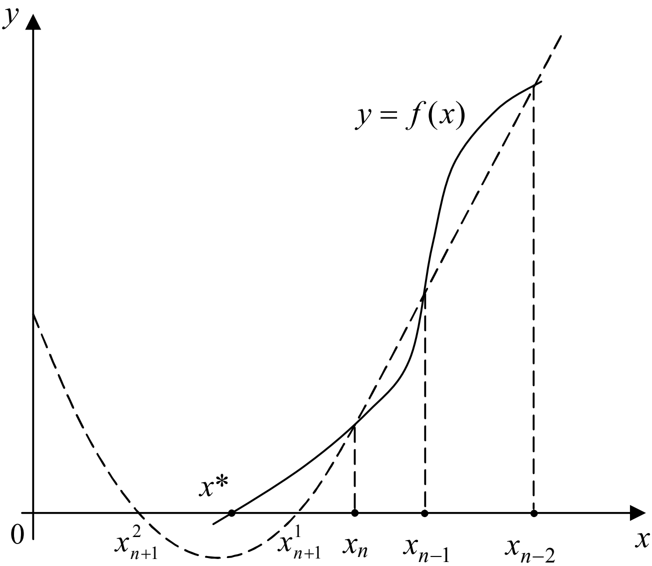
Parabola üsulunun mahiyyəti aşağıdakı kimidir. Bu üsulda aşağıdakı üç ardıcıl

$$[x_{n-2}, f(x_{n-2})], \ [x_{n-1}, f(x_{n-1})], \ [x_n, f(x_n)]$$

yaxınlaşmalarına əsasən ilkin funksiyanı yaxınlaşdıran iki dərəcəli çoxhədli (parabola) qurulur. Bu üsula kvadratik interpolyasiya və ya Müller üsulu deyilir. Şəkil 2.6 parabola üsulunun mahiyyətini göstərir.

Parabola üsulu 3-addımlı üsuldur. Bu üsul çoxhədlilərin köklərinin tapılması üçün tətbiq olunur (kompleks köklərin).

x_{n-2}, x_{n-1}, x_n yaxınlaşmalarına nəzərən Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisini yazaq:



Şəkil 2.6. Parabola üsulu ilə kökün dəqiqləşdirilməsi

$$P_2(x) = f(x_n) + (x - x_n) f(x_n, x_{n-1}) +$$
$$+ (x - x_n)(x - x_{n-1}) f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$$

$P_2(x) = 0$ qəbul etsək,

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (2.20)$$

kvadrat tənliyini alarıq, burada

$$a = f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}), \qquad z = x - x_n,$$
$$b = a(x_n - x_{n-1}) + f(x_n, x_{n-1}), \quad c = f(x_n).$$

(2.20) tənliyinin köklərindən mütləq qiymətcə kiçiyi yeni $x_{n+1} = x_n + z$ yaxınlaşmasını təyin edir.

Aydındır ki, hesablamalar aparmaq üçün ilk üç x_0, x_1, x_2

yaxınlaşmaları məlum olmalıdır. Odur ki, üsul 3-addımlı olur.

Parabola üsulu çox yavaş yığılır. Onun yığılma sürətinin

$$|x_{n+1} - \overline{x}| \approx \left|\frac{f'''()}{6f'(\overline{x})}\right|^{0,42} \cdot |x_n - \overline{x}|^{1,84}$$

kimi olmasını göstərmək olar.

Vətərlər üsulunda isə

$$|x_{n+1} - \overline{x}| = a^{1/\beta} |x_n - \overline{x}|^{\beta},$$

$$a = \frac{f''(\overline{x})}{2f'(\overline{x})}; \quad \beta = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) \approx 1,62; \quad \frac{1}{\beta} \approx 0,62.$$

Üsulun xətası

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} \varepsilon_{n-2} = (\varepsilon_n)^p$$

kimidir, burada $p = 1,839$.

2.7. Qarışıq üsul

Qarışıq üsul, vətərlər və toxunanlar üsullarının birgə tətbiq edilməsinə əsaslanır.

Tutaq ki, $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f'(x)$ və $f''(x)$ törəmələri isə $[a,b]$ parçasında sabit işarəlidir. Vətərlər və toxunanlar üsulunu birgə tətbiq etməklə hər addımda $f(x) = 0$ tənliyinin x^* dəqiq həllinin əksiyi və artığı ilə qiymətini tapmağa imkan verən üsul alınır.

Nəzəri cəhətdən burada dörd hal mümkündür:

- $f'(x) > 0$; $f''(x) > 0$;
- $f'(x) > 0$; $f''(x) < 0$;
- $f'(x) < 0$; $f''(x) > 0$;
- $f'(x) < 0$; $f''(x) < 0$.

Yalnız birinci hala baxaq, çünki qalan üç hal birinci hala analoji aparılır və birinci hala gətirilir.

Qarışıq üsulun tətbiqi nəticəsində iki monoton ardıcıllıq alırıq: $\{x_n\}-$ kökün əksiyi ilə təqribi qiymətləri; $\{\bar{x}_n\}-$ kökün artığı ilə təqribi qiymətləri. Verilmiş ε dəqiqliyi ilə x^* kökünü tapmaq üçün $\{x_n\},\{\bar{x}_n\}$ ardıcıllığının $|x_n-\bar{x}_n|<2\cdot\varepsilon$ şərtini ödəyən qiymətləri kifayətdir. $x^*\in[x_n,\bar{x}_n]$ olduğuna görə kökün qiyməti kimi $x_n,\bar{x}_n$ ədədlərinin ədədi ortasını götürmək lazımdır, yəni $x^*=\dfrac{x_n+\bar{x}_n}{2}$. Aydındır ki, $\left|x^*-\dfrac{x_n+\bar{x}_n}{2}\right|<\varepsilon$.

Kökün qiymətlərinin hesablama düsturları aşağıdakı kimidir.

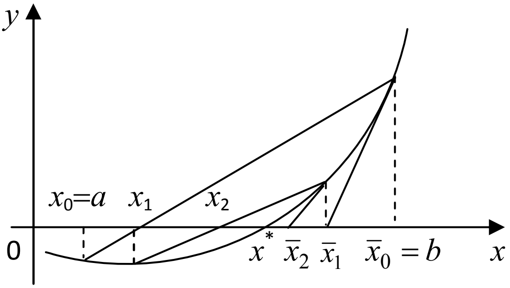
a) əgər $[a,b]$ parçasında $f(a)\cdot f''(a)>0$ olarsa, onda:

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n)-f(x_n)}\cdot(\bar{x}_n-x_n),\ n=0,1,2,... \\ \bar{x}_{n+1}=\bar{x}_n-\dfrac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)},\ n=0,1,2,... \\ x_0=b,\ \bar{x}_0=a \end{cases} \tag{2.21}$$

b) əgər $[a,b]$ parçasında $f(b)\cdot f''(b)>0$ olarsa, onda:

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n)-f(x_n)}\cdot(\bar{x}_n-x_n),\ n=0,1,2,... \\ \bar{x}_{n+1}=\bar{x}_n-\dfrac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)},\ n=0,1,2,... \\ x_0=a,\ \bar{x}_0=b \end{cases} \tag{2.22}$$

Şəkil 2.7-də qarışıq üsulun mahiyyəti göstərilmişdir.



Şəkil 2.7. Qarışıq üsulla kökün dəqiqləşdirilməsi

Misal 2.7. $f(x) = x^5 - x - 0{,}2 = 0$ tənliyinin 0,0005 dəqiqliyinə qədər müsbət kökünün hesablanmasına baxaq.

Köklərin təklənməsinin birinci mərhələsində, uclarında funksiyanın qiymətlərinin işarələri müxtılif olan, $[1{,}0; 1{,}1]$ parçasını seçirik. Doğrudan da, $f(1) = -0{,}2$; $f(1{,}1) = -0{,}31051 > 0$. Seçdiyimiz parçada $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, yəni sabit işarəlidir. $x_0 = 1{,}0$ və $\bar{x}_0 = 1{,}1$ götürməklə, qarışıq üsulu tətbiq edək.

(2.22) düsturları ilə tapırıq ki,

$$x_1 = 1{,}03917651; \qquad \bar{x}_1 = 1{,}050872558.$$

$|x_1 - \bar{x}_1| < 2 \cdot \varepsilon$ şərtini yoxlayaq.

$$|x_1 - \bar{x}_1| = |1{,}03917651 - 1{,}050872558| = 0{,}01169605 > 0{,}001.$$

$$f((x_1 + \bar{x}_1)/2) = 0{,}0013037.$$

Dəqiqlik kifayət olmadığından (xəta böyükdür), aşağıdakı qiymətləri hesablayaq:

$$x_2 = 1{,}044683244; \qquad \bar{x}_2 = 1{,}044846218.$$

$$|x_2 - \bar{x}_2| = 0{,}000163 < 0{,}001.$$

$$f((x_2 + \bar{x}_2)/2) = 0{,}0000150248.$$

Beləliklə, iki addımda lazım olan dəqiqlik təmin edilir.

3. FUNKSİYANIN YAXINLAŞMASI

3.1. Funksiyanın aproksimasiyası məsələsinin qoyuluşu

Bir çox hallarda y -in x -dən asılılığını müəyyən bir $y = f(x)$ funksiyası şəklində göstərmək olmur. Elə hallar da ola bilir ki, bu asılılıq çox mürəkkəb olur. Ən çox yayılmış və vacib olan hal bu asılılığın cədvəl şəklində, $\{x_i, y_i\}$ verilməsidir. Bu o deməkdir ki, $\{x_i\}$ qiymətlərinə funksiyanın $\{y_i\}$ $(i = 0,1,...,n)$ qiymətləri qarşı qoyulur. x və y -in bu qiymətləri müəyyən hesablamaların nəticələri, ya da eksperimental verilənlər ola bilərlər.

Praktikada funksiyanın cədvəldə göstərilən qiymətlərindən başqa onun digər nöqtələrdə də qiymətləri lazım ola bilər. Lakin, bu qiymətlər yalnız mürəkkəb hesablamalar vasitəsilə və ya eksperimentlər aparmaqla əldə edilə bilər.

Beləliklə, vaxta və vəsaitə qənaət nöqteyi-nəzərindən mövcud cədvəl məlumatları əsasında arqumentin istənilən x qiyməti üçün funksiyanın təqribi y qiymətlərini hesablamaq zərurəti yaranır.

Bu məsələ $f(x)$ funksiyasının, ona müəyyən mənada təqribən yaxın olan, daha sadə $\varphi(x)$ funksiyasına əvəz edilməsi (aproksimasiyası) ilə həll edilir ki, verilmiş dəyişmə intervalında x arqumentinin istənilən qiymətində $\varphi(x)$ funksiyasının hesablanması çətin olmur.

$f(x)$ funksiyasına müəyyən mənada təqribən yaxın olan φ(x) funksiyasının tapılmasına ***aproksimasiya*** deyilir (latın dilindən approximo – yaxınlaşıram). Burada $f(x)$ *verilən*, $\varphi(x)$ isə ***aproksimasiyaedici*** funksiya adlandırılır.

Funksiyanın yaxınlaşması məsələsi belə qoyulur: verilən $f(x)$ funksiyasını elə $\varphi(x)$ funksiyası ilə aproksimasiya etmək tələb olunur ki, verilmiş oblastda $\varphi(x)$ funksiyasının $f(x)$ funksiyasından meyletməsi (sapması) ən kiçik olsun.

Praktikada funksiyanın

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \qquad (3.1)$$

çoxhədlisi ilə aproksimasiyası daha əhəmiyyətlidir. Bu zaman a_j $(j = 0,1,...,n)$ əmsalları elə seçilir ki, çoxhədlinin funksiyadan meyletməsi ən kiçik olsun.

Əgər yaxınlaşma verilmiş $\{x_i\}$ diskret nöqtələr çoxluğunda qurularsa, onda aproksimasiya ***nöqtəvi*** adlanır.

Yaxınlaşmalar kəsilməz nöqtələr çoxluğunda (məsələn, $[a,b]$ parçasında) qurularsa, onda o ***kəsilməz*** (və ya inteqral) adlanır.

Nöqtəvi aproksimasiyanın müxtəlif növləri var. Bunlardan biri interpolyasiyadır. Bu halda verilmiş $y = f(x)$ funksiyası üçün elə (3.1) çoxhədlisi qurulur ki,

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,...,n \qquad (3.2)$$

olsun. x_i nöqtələrinə interpolyasiyanın ***düyün nöqtələri***, $\varphi(x)$ çoxhədlisinə isə ***interpolyasiya çoxhədlisi*** deyilir.

Tutaq ki, interpolyasiya çoxhədlisinin maksimal dərəcəsi $m = n$. Bu halda qlobal interpolyasiyadan danışılır, belə ki, bir

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \qquad (3.3)$$

çoxhədlisi x-in bütün dəyişmə intervalında $f(x)$ funksiyasını interpolyasiya etmək üçün istifadə olunur. (3.3) çoxhədlisinin a_i əmsalları (3.2) tənliklər sistemindən tapılır. İsbat etmək olar ki, $x_i \neq x_k$ $(i \neq k)$ olduqda (3.2) sisteminin yeganə həlli var.

İnterpolyasiya çoxhədlisi x-in dəyişmə intervalının müəyyən hissəsində də qurula bilər. Bu halda hissə-hissə (lokal) interpolyasiya alınır.

İnterpolyasiya çoxhədliləri $x_0 < x < x_n$ aralığında funksiyanı hesablamaq üçün istifadə olunur. Lakin bəzən o funksiyanı $x < x_0$, $x > x_n$ aralıqlarında da hesablamaq üçün istifadə oluna bilər. Bu yaxınlaşmaya ***ekstrapolyasiya*** deyilir.

İnterpolyasiya məsələsində əsas şərt $\varphi(x)$ interpolyasiya çoxhədlisinin qrafikinin $f(x)$ funksiyasının interpolyasiya düyün nöqtələrindəki qiymətlərindən keçməsi şərtidir. Lakin bəzi hallarda bu şərtin ödənməsi çətindir və məqsədəuyğun olmur. Ona görə orta kvadratik yaxınlaşma istifadə olunur. Bu zaman $m \le n$ olur; $m = n$ halı interpolyasiyaya uyğundur. Praktikada adətən interpolyasiyaedici funksiyanı $m = 1, 2, 3$ dərəcəli seçirlər.

Aşağıdakı

$$S = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2 \tag{3.4}$$

kəmiyyəti (x_i, y_i) $(i = 0, 1, ..., n)$ nöqtələr çoxluğunda $\varphi(x)$ -in $f(x)$ -dən meyletməsinin ölçüsü adlanır.

Müntəzəm yaxınlaşma. Bəzən yaxınlaşmanı quran zaman daha ciddi şərt qoyulur: $[a, b]$ parçasının bütün nöqtələrində

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad a \le x \le b$$

olsun ($\varepsilon > 0 -$ verilmiş ədəddir). Bu halda $\varphi(x)$ çoxhədlisi $[a, b]$ parçasında $f(x)$ funksiyasını ε dəqiqliklə aproksimasiya edir deyirlər.

$\varphi(x)$ çoxhədlisinin $[a, b]$ parçasında $f(x)$ funksiyasından mütləq meyletməsi

$$\Delta = \max_{a \le x \le b} |f(x) - \varphi(x)| \qquad (3.5)$$

kimi təyin olunur.

Teorem 3.1. (*Veyerştrass teoremi*). Əgər $f(x) \in C_{[a,b]}$ olarsa, onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $m = m(\varepsilon)$ dərəcəli $\varphi(x)$ çoxhədlisi var ki, onun $[a,b]$ parçasında $f(x)$ funksiyasından mütləq meyletməsi ε -dan kiçikdir.

Əgər (3.3) çoxhədlisinin a_i əmsallarını elə seçmək olarsa ki, verilmiş $[a,b]$ parçasında (3.5) mütləq meyletməsi minimal olsun, onda bu yaxınlaşmaya funksiyanın ***ən yaxşı yaxınlaşması*** deyilir.

Praktiki tətbiqlərdə aşağıdakı məsələlər çox mühüm əhəmiyyət kəsb edir:

- analitik və ya cədvəl şəklində verilmiş funksiyanın, ona daha yaxın, daha sadə və hesablama üçün daha əlverişli olan funksiya ilə əvəz edilməsi;
- verilmiş hər hansı bir parçanın diskret sayda nöqtələr çoxluğunda funksiyanın verilmiş qiymətlərinə görə onun qurulması.

Ümumi halda yaxınlaşma məsələsinin qoyuluşunda aşağıdakı mərhələlərə riayət etmək əlverişlidir:

- hansı funksiyalar sinfini seçməyin lazım olmasını təyin etməli (məsələn, çoxhədlilər, triqonometrik funksiyalar, üstlü funksiyalar və s.);
- ilkin və axtarılan funksiyaların yaxınlıq meyarını seçməli (məsələn, onların qiymətləri düyün nöqtələrində üst-üstə düşməlidir – Laqranj interpolyasiyası və s.);
- yaxınlaşdırıcı funksiyanın (interpolyasiya çoxhədlisinin) qurulması üçün hansı nöqtələrdən istifadə olunmalı və onları necə yerləşdirməli.

3.2. İnterpolyasiya

Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında üst-üstə düşməyən x_i nöqtələr çoxluğu verilmişdir. Bu nöqtələrdə $f_i = f(x_i), \quad i = \overline{0,n}$ qiymətləri məlumdur. $\varphi(x,a)$ yaxınlaşdırıcı funksiya ilə $f(x)$ funksiyası $(n+1)$ sayda düyün nöqtələrində üst-üstə düşməsi tələb olunur. Başqa sözlə,

$$\varphi(x_i,\, a_0, ...,\, a_m) = f(x_i) = f_i, \quad i = \overline{0,n} \tag{3.6}$$

bərabərlikləri ödənilsin. Bu üsul ***interpolyasiya*** (***Laqranj interpolyasiyası***) adlanır.

Ən çox xətti interpolyasiya üsulundan istifadə edilir. Burada yaxınlaşdırıcı funksiya $\varphi_i(x)$ $-$ bazis funksiyalarının xətti kombinasiyası

$$\varphi(x,\, a_0, ...,\, a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) \tag{3.7}$$

şəklində axtarılır. $\varphi_i(x)$ funksiyalar sistemi xətti asılı deyillər. Bu funksiyalar üçün

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & ... & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & ... & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & ... & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0 \; .$$

(3.7) funksiyalarını (3.6)-da yerinə yazsaq a_i əmsallarını tapmaq üçün

$$f_k = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x_k), \quad k = 0, ..., n$$

xətti tənliklər sistemi alarıq.

$1, x, x^2, ..., x^n$ qüvvət funksiyaları sistemini xətti asılı olmayan funksiyalar kimi ğötürmək olar (cəbri interpolyasiya).

Çoxhədlilərlə yaxınlaşmada yaxınlaşdırıcı funksiya

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

n dərəcəli çoxhədli şəklində axtarılır.

$P_n(x_k) = f_k$ şərtindən istifadə etməklə a_i əmsallarına nəzərən

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_k^i = f_k, \quad k = \overline{0,n} \tag{3.8}$$

xətti cəbri tənliklər sistemi alınır.

İnterpolyasiya nöqtələri üst-üstə düşmədikdə (3.8) sisteminin determinantı Vandermond determinantıdır:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{k>i\geq 0} (x_k - x_i) \neq 0$$

Beləliklə, (3.8) sisteminin həlli var və bu həll yeganədir. Deməli, yeganə n dərəcəli $P_n(x)$ interpolyasiya çoxhədlisi var.

3.3. Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisi

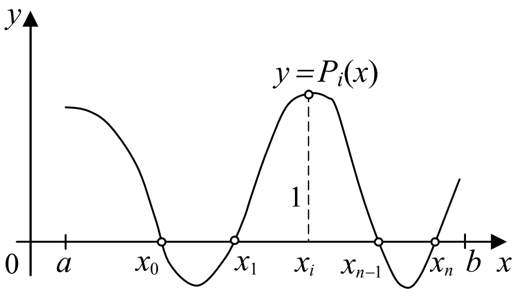
Teorem 3.2. Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında x arqumentinin $n+1$ sayda müxtəlif $x_0, x_1, ..., x_n$ qiymətləri verilir, bu nöqtələrdə $y_i = f(x_i)$ $(i = \overline{0,n})$ qiymətləri məlumdur. Onda dərəcəsi n-dən böyük olmayan elə yeganə $L_n(x)$ çoxhədlisi var ki,

$$L_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0,n}.$$

İsbatı. Əvvəlcə xüsusi məsələyə baxaq. Elə $P_i(x)$ çoxhədlisi quraq ki, $P_i(x_j)=0,\ i\neq j$ olduqda və $P_i(x_i)=1$ olsun (şəkil 3.1). Yəni

$$P_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{3.9}$$

burada δ_{ij} – Kroneker simvollarıdır.



Şəkil 3.1. $P_i(x)$ çoxhədlisinin həndəsi təcviri

Tutaq ki, axtarılan polinom n sayda $x_0, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ nöqtələrində sıfıra çevrilir. Onda onu

$$P_i(x)=c_i(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n) \tag{3.10}$$

şəklində axtarmaq olar. Burada c_i – sabit əmsallardır.

(3.10) ifadəsində $x=x_i$ götürsək və $P_i(x_i)=1$ olmasını nəzərə alsaq,

$$c_i(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)=1$$

və

$$c_i=\frac{1}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$$

alarıq. c_i əmsallarının bu qiymətlərini (3.10)-da yazsaq,

$$P_i(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} \qquad (3.11)$$

alarıq.

Elə $L_n(x)$ çoxhədlisi tapaq ki, $L_n(x_i) = y_i$ olsun. Bu çoxhədli

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} P_i(x) y_i \qquad (3.12)$$

şəklindədir. Doğrudan da:

1) $L_n(x)$ çoxhədlisinin dərəcəsi n-i aşmır;

2) $L_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} P_i(x_j) y_i = P_j(x_j) y_j = y_j \qquad (j = \overline{0,n})$

(3.11) və (3.12) ifadələrindən

$$\begin{aligned} L_n(x) = y_0 & \frac{(x-x_1)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)...(x_0-x_n)} + \\ & + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)...(x_1-x_n)} + \\ & + ... + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})} \end{aligned} \qquad (3.13)$$

alırıq. Bu axtarılan çoxhədlidir və *Laqranj çoxhədlisi* adlanır.

$$\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n) = \prod_{i=0}^{n} (x-x_i)$$

işarə edək. Onda Laqranj çoxhədlisini

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega_n'(x_i)}$$

və ya

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

şəklində yazmaq olar.

İsbat edək ki, Laqranj çoxhədlisi yeganədir. Fərz edək ki, elə $\widetilde{L}_n(x) \neq L_n(x)$ çoxhədlisi var ki,

$$\widetilde{L}_n(x_i) = y_i \qquad (i = \overline{0,\ n}) .$$

Onda dərəcəsi n-dən böyük olmayan $Q_n(x) = \widetilde{L}_n(x) - L_n(x)$ çoxhədlisi $(n+1)$ sayda $x_0, x_1, ..., x_n$ nöqtələrində sıfra çevrilir, yəni

$$Q_n(x) \equiv 0 \Rightarrow \widetilde{L}_n(x) \equiv L_n(x) \ .$$

Bu isə çoxhədlinin yeganəliyini göstərir.

Xətti və kvadratik interpolyasiya düsturlarını Laqranj düsturuna görə

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \\ + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

kimi yazmaq olar.

3.4. Laqranjın bərabər addımlar üçün interpolyasiya çoxhədlisi

Tutaq ki, düyün nöqtələri üçün

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h$$

ödənilir.

$\frac{x-x_0}{h}=t$ əvəz edək. Onda

$$P_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}=$$

$$=\frac{th\cdot(th-h)...[th-(i-1)h][th-(i+1)h]...(th-nh)}{ih\cdot(i-1)h...h\cdot(-h)...[-(n-i)h]}=$$

$$=\frac{t(t-1)...(t-n)}{t-i}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}=(-1)^{n-i}c_n^i\frac{1}{t-i}\frac{t(t-1)...(t-n)}{n!}$$

olduğunu alarıq.

Beləliklə,

$$L_n(x)=L_n(x_0+th)=(-1)^n\frac{t(t-1)...(t-n)}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{c_n^i y_i}{t-i}$$

Axırıncı ifadədə y_i - lər qarşısındakı

$$(-1)^{n-i}c_n^i\frac{t(t-1)...(t-n)}{(t-i)n!}$$

əmsalları $f(x)$ funksiyasından və h addımından asılı deyillər. Onları cədvəl şəklində göstərməklə istifadə etmək olar. Belə cədvəl mövcuddur. Bu ***Laqranj əmsalları cədvəli*** adlanır.

3.5. Bölünən fərqlər və onların xassələri

Laqranj çoxhədlisinin başqa şəkli Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisidir və onun bəzi üstünlükləri var.

Nyuton çoxhədlisini qurmaq üçün bölünən fərqlər anlayışını verək.

$f(x)\in R$ funksiyasını və $[a,b]$ parçasına daxil olan

$x_0, x_1, ..., x_n$ $(x_i \neq x_j,\ i \neq j)$ nöqtələrini götürək.

Sıfırıncı tərtib bölünən fərqlər – funksiyanın düyün nöqtələrindəki qiymətləri ilə üst-üstə düşür.

Birinci tərtib bölünən fərqlər $f(x_i, x_j)$ sıfırıncı tərtib bölünən fərqlərlə

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} = \frac{f_i - f_j}{x_i - x_j}$$

kimi təyin olunurlar. Məsələn,

$$f(x_0, x_1) = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1}, ..., f(x_{n-1}, x_n) = \frac{f_{n-1} - f_n}{x_{n-1} - x_n}$$

İkinci tərtib bölünən fərqlər birinci tərtib bölünən fərqlərlə

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_i, x_j) - f(x_j, x_k)}{x_i - x_k}$$

kimi təyin olunurlar. Məsələn,

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)}{x_0 - x_2}, ...$$

n-ci tərtib bölünən fərqlər

$$f(x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+n}) = \frac{f(x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+n-1}) - f(x_{i+1}, ..., x_{i+n})}{x_i - x_{i+n}}$$

kimi təyin olunurlar.

Beləliklə, $(n+1)$-ci nöqtə üçün n-ci tərtibə qədər bölünən fərqlər qurulur. Böyük tərtib bölünən fərqlər isə sıfır olur. Tərtib edilmiş aşağıdakı cədvələ əsasən deyilənləri daha aydın başa düşmək olar.

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & f(x_0,x_1) & & & \\
x_1 & f_1 & & f(x_0,x_1,x_2) & & \\
 & & f(x_1,x_2) & & f(x_0,x_1,x_2,x_3) & \\
x_2 & f_2 & & f(x_1,x_2,x_3) & & f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) \\
 & & f(x_2,x_3) & & f(x_1,x_2,x_3,x_4) & \\
x_3 & f_3 & & f(x_2,x_3,x_4) & & \\
 & & f(x_3,x_4) & & & \\
x_4 & f_4 & & & &
\end{array}
$$

Bölünən fərqlərin aşağıdakı xassələrini var.

1) $$f(x_i,x_j)=\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}=\frac{f(x_i)}{x_i-x_j}+\frac{f(x_j)}{x_j-x_i},...,$$

$$f(x_i,x_j,x_k)=\frac{f(x_i,x_j)-f(x_j,x_k)}{x_i-x_k}=\frac{f(x_i)}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)}+$$

$$+\frac{f(x_j)}{(x_j-x_i)(x_j-x_k)}+\frac{f(x_k)}{(x_k-x_i)(x_k-x_j)} \text{ və s.}$$

2) Cəmin (fərqin) bölünən fərqi toplananların (azalan və çıxılanın) bölünən fərqlərinin cəminə (fərqinə) bərabərdir.
3) Sabit vuruğu bölünən fərq işarəsi xaricinə çıxarmaq olar.
4) Bölünən fərq öz arqumentlərinə nəzərən simmetrikdir:

$$f(x_0,x_1)=f(x_1,x_0),$$

$$f(x_i,x_j,...,x_n)=f(x_j,x_i,...,x_n)=...=f(x_n,x_{n-1},...,x_j,x_i).$$

5) n dərəcəli çoxhədlidən n-ci tərtib bölünən fərq sabit, n-dən yüksək tərtib bölünən fərq isə sıfırdır.

Bölünən fərqlərin şəklindən görünür ki, onlar uyğun tərtib törəmələrin analoqlarıdır.

Bölünən fərqlərlə uyğun tərtib törəmələr arasında

$$f^{(n)}(x) = n!\, f(x_0, x_1, ..., x_n)$$

münasibəti mövcuddur. Məsələn,

$$f'(x) = f(x_0, x_1), \quad f''(x) = 2f(x_0, x_1, x_2), ...$$

3.6. Bərabər olmayan addımlar üçün Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisi

Nyutonun birinci interpolyasiya düsturunu çıxarmaq üçün fərz edək ki, $x_0, x_1, ..., x_n$ düyün nöqtələridir. x nöqtəsini də düyün nöqtəsi olaraq götürək. Məlum

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x, x_0) \tag{3.14}$$

münasibətini yazaq. Eyni qayda ilə

$$f(x, x_0) = f(x_0, x_1) + (x - x_1) f(x, x_0, x_1)\ . \tag{3.15}$$

(3.15)-i (3.14)-də nəzərə alsaq,

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + \\ + (x - x_0)(x - x_1) f(x, x_0, x_1) \end{aligned} \tag{3.16}$$

alarıq.

Bölünən fərqin tərifinə görə

$$f(x, x_0, x_1) = f(x_0, x_1, x_2) + (x - x_2) f(x, x_0, x_1, x_2)\ . \tag{3.17}$$

Bunu (3.16)-da nəzərə alsaq

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \\ + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f(x, x_0, x_1, x_2) \end{aligned}$$

olar. Prosesi bu qayda ilə davam etdirsək

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + \\
&+ (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \ldots + \\
&+ (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

alarıq. (3.18) düsturuna ***Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisi*** deyilir. (3.18) sırasında növbəti hədd sıfıra bərabər olacaq.

Qeyd 1. Hesablama dəqiqliyi olaraq (3.18) sırasının hədlərinin azalmasına nəzarət etmək lazımdır. Cəmə yeni düyün nöqtələri əlavə edildikcə dəqiqlik daha da artır.

Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisindən ədədi diferensiallama düsturlarının çıxarılmasında da istifadə olunur.

Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisi üçün

$$P_1(x) = f_0 + (x - x_0)\frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1}$$

xətti və

$$P_2(x) = f_0 + (x - x_0)\frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\dfrac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} + \dfrac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2}}{x_0 - x_2}$$

kvadratik interpolyasiya düsturlarını yazaq. Bu düsturların çevirmələr vasitəsi ilə Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisi düsturları ilə üst-üstə düşməsini göstərmək olar. Bu interpolyasiya çoxhədlisinin yeganəliyi şərtindən alınır:

$$P_1(x) = L_1(x); \quad P_2(x) = L_2(x).$$

Doğrudan da,

$$P_1(x) = f_0 + \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} f_0 - \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} f_1 = f_0 + \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f_1 =$$

$$= \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0 - x_1}\right) f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f_1 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f_1 = L_1(x) \quad .$$

3.7. Sonlu fərqlər və onların xassələri

Tutaq ki, x-in $x_0, x_0+h, ..., x_0+nh$ qiymətləri üçün $f(x)$-in $y_0, y_1, ..., y_n$ qiymətləri məlumdur.

$y_{i+1} - y_i \; (i = \overline{0,n})$ fərqlərinə ***1-ci tərtib sonlu fərqlər*** deyilir və

$$y_{i+1} - y_i = \Delta y_i \quad \text{və ya} \quad y_{i+1} - y_i = f'_{i+1/2}$$

kimi işarə olunur. Birinci tərtib sonlu fərqlərdən 2-ci tərtib sonlu fərqlər

$$f'_{3/2} - f'_{1/2} = f_1^2, \quad f'_{5/2} - f'_{3/2} = f_2^2, ... \text{ və s.}$$

düzəldilir.

Sonlu fərqlər cədvəlini aşağıdakı kimi tərtib edək:

$$\begin{array}{cccccc}
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & f_{1/2}^1 & & & \\
x_1 & f_1 & & f_1^2 & & \\
 & & f_{3/2}^1 & & f_{3/2}^3 & \\
x_2 & f_2 & & f_2^2 & & f_2^4 \\
 & & f_{5/2}^1 & & f_{5/2}^3 & \\
x_3 & f_3 & & f_3^2 & & \\
 & & f_{7/2}^1 & & & \\
x_4 & f_4 & & & &
\end{array}$$

Cədvəldən aydındır ki,

$$f_{1/2}^1 + f_{3/2}^1 + ... + f_{n-1/2}^1 = f_1 - f_0 + f_2 - f_1 + ... + f_n - f_{n-1} = f_n - f_0 \;,$$

$$f_1^2 + f_2^2 + ... + f_{n-1}^2 = f_{3/2}^1 - f_{1/2}^1 + f_{5/2} - f_{3/2}^1 +$$
$$+ ... + f_{n-1/2}^1 - f_{n-3/2}^1 = f_{n-1/2}^1 - f_{1/2}^1$$

Yəni hər sütundakı sonlu fərqlərin cəmi əvvəlki sütunun sonuncu və birinci elementlərinin fərqinə bərabərdir.

Aşağıdakı münasibət doğrudur:

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y), \quad n = 1, 2, ...$$

Məsələn,

$$\Delta^2 y = \Delta[f(x+\Delta x) - f(x)] = [f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x)] -$$
$$-[f(x+\Delta x) - f(x)] = f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)$$

Misal 3.1. $P(x) = x^3, \quad \Delta x = 1;$

$$\Delta P(x) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1;$$
$$\Delta^2 P(x) = 6x + 6;$$
$$\Delta^3 P(x) = (6(x+1)+6) - (6x+6) = 6;$$
$$\Delta^4 P(x) = 0.$$

Sonlu fərqlərin aşağıdakı xassələri var.

1) $f = \varphi \pm g$ olduqda $f_i^k = \varphi_i^k \pm g_i^k$.

2) Funksiyanı $c = const$ ədədinə vurduqda sonlu fərq də həmin ədədə vurulur.

3) Bölünən və sonlu fərqlər arasında

$$f(x_i; x_{i+1}) = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1/2}}{h};$$

$$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}) = \frac{f_{i+3/2} - f_{i+1/2}}{2h \cdot h} = \frac{f_{i+1}^2}{2h^2};$$

$$f(x_i; x_{i+1}; ..., x_{i+k}) = \frac{f^k{}_{i+k/2}}{k! h^k}$$

əlaqə düsturları doğrudur.

4) n-ci dərəcəli çoxhədlidən n-ci tərtib sonlu fərq sabitə, n-dən böyük tərtib sonlu fərqlərin qiyməti sıfra bərabərdir. Məsələn,

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

çoxhədlisi üçün

$$\Delta^n P_n(x) = const\,,\quad \Delta^s P_n(x) = 0 \ \ (s > n \text{ olduqda}).$$

3.8. Nyutonun ikinci interpolyasiya çoxhədlisi

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ düyün nöqtələri əvəzinə $x_0, x_0 + h, \ldots, x_0 + nh$ nöqtələrini götürək. Onda

$$P_n(x) = f_0 + \frac{x - x_0}{h} f_{1/2}^1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2} f_1^2 + \\ + \ldots + \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})}{n!\,h^n} f_{n/2}^n \tag{3.19}$$

olar.

$\dfrac{x - x_0}{h} = t$ ilə işarə edık. (3.19)-dan alırıq:

$$P_n(x) = f_0 + t f_{1/2}^1 + \frac{t(t-1)}{2!} f_1^2 + \ldots + \\ + \frac{t(t-1)\ldots[t-(n-1)]}{n!} f_{n/2}^n \tag{3.20}$$

(3.20) düsturuna ***Nyutonun irəliyə interpolyasiya düsturu*** deyilir.

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ düyün nöqtələri əvəzinə $x_0, x_0 - h, \ldots, x_0 - nh$ nöqtələrini götürək. Onda

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_0 - h) + \\ + (x - x_0)(x - x_0 + h) f(x_0, x_0 - h, x_0 - 2h) + \ldots + \\ + (x - x_0)\cdots[x - x_0 + (n-1)h] f(x_0; x_0 - h; \ldots; x_0 - nh)$$

$$f(x_0 - ih; x_0 - ih + h; \dots x_0) = \frac{f^{i}_{-i/2}}{i!h^{i}} \quad \text{olduğuna görə}$$

$$P_n(x) = f_0 + \frac{(x - x_0)}{h} f^{1}_{-1/2} + \frac{(x - x_0)(x - x_0 + h)}{2!h^2} f^{2}_{-1} +$$

$$+ \dots + \frac{(x - x_0)(x - x_0 + h)\dots[x - x_0 + (n-1)h]}{n!h^n} f^{n}_{-n/2},$$

$$P_n(x_0 + th) = f_0 + tf^{1}_{-1/2} + + \frac{t(t+1)}{2!} f^{2}_{-1} + \tag{3.21}$$

$$+ \dots + \frac{t(t+1)\dots[t + (n-1)]}{n!} f^{n}_{-n/2}$$

alırıq.

(3.21) düsturuna isə ***Nyutonun geriyə interpolyasiya düsturu*** deyilir.

3.9. İnterpolyasiya düsturlarının xətası

Məlumdur ki, bütün interpolyasiya çoxhədliləri bir-biri ilə ekvivalentdir. Ona görə də Lanqranjın interpolyasiya çoxhədlisinin xətasını qiymətləndirmək kifayətdir.

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında n-ci tərtibə qədər kəsilməz törəmələrə malikdir və $f^{(n)}(x)$ törəməsi $[a,b]$ parçasında diferensiallanandır. Aşağıdakı köməkçi funksiyanı

$$\varphi(z) = f(z) - L_n(z) - k(z - x_0)(z - x_1)\dots(z - x_n) \tag{3.22}$$

nəzərdən keçirək, burada $k -$ müəyyən məchul sabitdir.

Aydındır ki, $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \dots = \varphi(x_n) = 0$. Burada k sabitini elə seçək ki, $\varphi(x) = 0$ olsun ($x -$ xətanın hesablandığı nöqtədir).

$$k = \frac{f(x) - L_n(x)}{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)}$$

olan halda bu mümkündür.

$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\neq 0$, çünki, $x\neq x_i$ $(i=0,1,...,n)$.

$\varphi(z)$ funksiyası $[a,b]$ parçasının $n+2$ sayda $x,x_0,x_1,...,x_n$ nöqtələrində sıfıra çevrilir. Onda Roll teoreminə görə $\varphi(z)$ funksiyasının törəməsi ən azı $n+1$ dəfə (a,b) intervalında sıfıra çevrilir. Tutaq ki, z -in bu qiymətləri

$$\xi_0^{(1)},\xi_1^{(1)},...,\xi_n^{(1)} \quad \left(\varphi'(\xi_0^{(1)})=\varphi'(\xi_1^{(1)})=...=\varphi'(\xi_n^{(1)})=0\right)$$

nöqtələridir. Roll teoremini yenidən $\varphi'(z)$ törəməsinə tətbiq etsək, n sayda elə $\xi_0^{(2)},\xi_1^{(2)},...,\xi_{n-1}^{(2)}$ nöqtələri var ki,

$$\varphi''(\xi_0^{(2)})=\varphi''(\xi_1^{(2)})=...=\varphi''(\xi_{n-1}^{(2)})=0.$$

Prosesi bu qaydayla davam etdirsək (a,b) intervalında elə ξ nöqtəsi var ki,

$$\varphi^{(n+1)}(\xi)=0.$$

$\varphi^{(n+1)}(z)=f^{(n+1)}(z)-k(n+1)!$ olduğuna görə sonuncuda $z=\xi$ götürsək, $f^{(n+1)}(\xi)-k(n+1)!=0$ olar. Buradan alarıq:

$$k=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Onda

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)...(x-x_n)$$

olar.

$$M_{n+1}=\sup_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

götürsək,

$$\left|\varepsilon_n(x)\right| = \left|f(x) - L_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|$$

və ya

$$\left|\varepsilon_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega(x)\right| \tag{3.23}$$

alarıq.

Laqranj və Nyuton çoxhədliləri biri-birindən yalnız yazılışına görə fərqlənir. Ona görə də xəta üçün yuxarıda alınan qiymətləndirmə Nyuton düsturu üçün də doğrudur. Lakin onun başqa şəkilini də yazmaq olar.

$$f(x, x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)} +$$

$$+ \dots + \frac{f(x_n)}{(x_n - x)(x_n - x_0)\dots(x_n - x_{n-1})}$$

düsturuna əsasən

$$f(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_1)} +$$

$$+ \dots + f(x_n)\frac{(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\dots(x_n-x_{n-1})} + \omega(x) f(x, x_0, \dots, x_n)$$

alırıq. Buradan

$$f(x) - L_n(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n) f(x, x_0, \dots, x_n) =$$

$$= \omega(x) f(x, x_0, \dots, x_n)$$

Xüsusi halda, əgər $f(x)$ funksiyasının $(n+1)$-ci tərtib törəməsi varsa, onda

$$f(x, x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

olar.

Belə bir sual meydana çıxır. İnterpolyasiya prosesinin xətası $n \to \infty$ olduqda sıfıra yaxınlaşırmı? Bu sualın cavabı mənfidir.

Tərif 3.1. Əgər $\lim\limits_{n\to\infty} L_n[f(x^*)] = f(x^*)$ varsa, onda interpolyasiya prosesi $x^* \in [a,b]$ nöqtəsində yığılır deyirlər.

Tərif 3.2. Əgər $\max\limits_{[a,b]} \left| f(x) - L_n[f(x)] \right| \to 0,\ n \to \infty$ olarsa, onda interpolyasiya prosesi müntəzəm yığılır deyirlər.

Qeyd 2. İnterpolyasiya prosesinin yığılması və ya dağılması həm şəbəkələr ardıcıllığının seçilməsindən, həm də $f(x)$ funksiyasının hamarlığından asılıdır.

İnterpolyasiyadan praktiki istifadə edən zamanı qalıq həddini həmişə qiymətləndirmək mümkün olmur. Ona görə ki, qalıq həddə daxil olan yüksək tərtib törəmələr hesablana bilmir. İnterpolyasiya olunan funksiyaya çoxlu sayda düyün nöqtələri götürməklə daha yaxşı yaxınlaşmaq olur. Beləliklə, interpolyasiya prosesinin yığılması məsələsi meydana çıxır.

Tutaq ki, bütün elementləri $[a,b]$ parçasına daxil olan aşağıdakı üçbucaq matrisi verilmişdir:

$$\begin{pmatrix} x_0^{(0)} & & & \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & & \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ x_0^{(n)} & x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

$[a,b]$ parçasında verilmiş hər hansı $f(x)$ funksiyası üçün $L_n(x)$, $n = 0,1,2,\dots$ Laqranj interpolyasiya çoxhədliləri ardıcıllığı qurulur. Əgər

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = f(x), \quad x \in [a,b] \tag{3.25}$$

olarsa, interpolyasiya prosesinə ***yığılan***, əgər sonuncu ifadə müntəzəm yığılırsa, onda prosesə ***müntəzəm yığılan*** deyilir.

Tərif 3.3. Əgər $f(x)$ funksiyasını bütün x-lər üçün yığılan

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ... \qquad (3.26)$$

qüvvət sırası şəklində göstərmək mümkündürsə, ona ***tam funksiya*** deyilir.

Teorem 3.3. Tutaq ki, $f(x)$ tam funksiyadır. Onda bu funksiya üçün qurulmuş $L_n(x)$ interpolyasiya çoxhədliləri ardıcıllığı $[a,b]$ parçasında $f(x)$ funksiyasına müntəzəm yığılır.

Xəta üçün

$$\left|f(x) - L_n(x)\right| < \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \qquad (3.27)$$

doğrudur, belə ki

$$\left|\omega_n(x)\right| < (b-a)^{n+1} \ .$$

Göstərmək olar ki, (3.27) bərabərsizliyinin sağ tərəfi $n \to \infty$ olduqda sıfıra yaxınlaşır. Bu da $L_n(x)$ ardıcıllığının $f(x)$ funksiyasına yığıldığını göstərir.

4. ƏDƏDİ DİFERENSİALLAMA

4.1. Məsələnin qoyuluşu

$y = f(x)$ funksiyası cədvəl şəklində verildikdə və yaxud da onun törəməsini bilavasitə hesablamaq çətin olduqda ədədi diferensiallamadan istifadə edilir. Funksiyanın təyin oblastının x nöqtəsində $\dfrac{d^m f(x)}{dx^m}$ törəmələrinin hesablanması düsturları diferensiallama operatorunu interpolasiya çoxhədliləri ilə aproksimasiya etməklə əldə edilir. Məhz, tədqiq edilən x nöqtəsinə ona yaxın olan bir neçə $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(n \geq m+1)$ düyün nöqtələri götürülür. Düyün nöqtələrində $y_i = f(x_i)$ qiymətləri hesablanır,

$$y = f(x) \approx \varphi(x; a) = P_{n-1}(x) \tag{4.1}$$

interpolyasiya çoxhədlisi qurulur və

$$\frac{d^m f}{dx^m} \approx \frac{d^m P_{n-1}}{dx^m} \tag{4.2}$$

düsturu ilə $f^{(m)}(x)$ hesablanılır.

4.2. Lokal interpolyasiyaya vasitəsi ilə törəmələrin aproksimasiyası

Funksiya cədvəl şəklində verilən halda törəməni

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

düsturuna əsasən

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{4.3}$$

götürməklə hesablayırlar. Bu asılılıq törəmənin sonlu fərqlərin köməyi ilə ***aproksimasiyası*** adlanır. Cədvəlin verilmiş $\{x_i, y_i\}$, $i = \overline{0, n}$ qiymətlərində və interpolyasiyanın düyün nöqtələri $h = const$ addımı ilə yerləşdikdə i-ci düyün nöqtəsi üçün sonlu fərqlərin hesablanması üsulundan asılı olaraq törəmənin hesablanmasının aşağıdakı alqoritmləri olur. Tutaq ki, $i = 1$.

1. Sol fərqlər düsturu:

$$\Delta y_1 = y_1 - y_0; \quad \Delta x = h; \quad y'_1 = \frac{y_1 - y_0}{h}. \tag{4.4}$$

2. Sağ fərqlər düsturu:

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1; \quad \Delta x = h; \quad y'_1 = \frac{y_2 - y_1}{h}. \tag{4.5}$$

3. Mərkəzi fərqlər düsturu:

$$\Delta y_1 = y_2 - y_0; \quad \Delta x = 2h; \quad y'_1 = \frac{y_2 - y_0}{2h}. \tag{4.6}$$

(4.4), (4.5), (4.6) münasibətlərindən istifadə etməklə ardıcıl olaraq yüksək tərtibli törəmələrin hesablanması üçün ifadələr almaq olar. Məsələn, (4.5)-dən istifadə edərək alırıq:

$$y''_1 = (y'_1)' = \frac{y'_2 - y'_1}{h} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1 - y_0}{h}}{h} = \frac{y_2 - 2y + y_0}{h^2}. \tag{4.7}$$

4.3. Ədədi diferensiallamanın xətası

Tədqiq edilən funksiyanı aproksimasiya edərək, onu aşağıdakı kimi göstərirlər:

$$f(x) = \varphi(x) + R(x). \tag{4.8}$$

$\varphi(x)$ kimi ya interpolyasiya funksiyasını və yaxud sıranın qismən cəmini qəbul etmək olar. Onda aproksimasiya xətası $R(x)$ ya sıranın qalıq həddi ilə və yaxud $P_{n-1}(x)$ ilə müəyyən edilə bilər. (4.8) ifadəsinin tələb olunan qədər diferensiallamaqla alarıq:

$$f'(x) = \varphi'(x) + R'(x);$$

$$f''(x) = \varphi''(x) + R''(x) \text{ və s.}$$

Onda funksiya h addımı ilə cədvəl şəklində verildikdə ədədi diferensiallamada aproksimasiya xətası

$$R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)$$

h addımından asılıdır və onu $O(h^k)$ şəklində yazırlar. k törəmənin ***aproksimasiya xətasının tərtibi*** adlanır. Bu zaman fərz edilir ki, $|h| < 1$.

(4.4) – (4.7) düsturlarının xətasının qiymətləndirilməsi Teylor sırasının köməyi ilə müəyyən edilə bilər.

Tutaq ki, ikinci tərtib kəsilməz diferensiallanan $f(x)$ funksiyası qiymətlər cədvəli ilə verilmişdir.

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Burada $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$. Tutaq ki, düyün nöqtələri bərabər yerləşmişlər, $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$, $x_i = x_0 + ih$, $h = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, n-1}$.

Teylor sırası ümumi şəkildə aşağıdakı kimidir:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots \quad (4.9)$$

(4.9) ifadəsini $x = x_1$, $\Delta x = -h$ olduqda h^1-ə qədər dəqiqliklə yazaq:

$$y_0 = y_1 - y_1' h + O(h^2)\ .$$

Onda

$$y_1' = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h) .$$

Bu ifadə (4.4) ilə üst-üstə düşür və birinci tərtib aproksimasiya olur ($k = 1$). Onda ixtiyari düyün nöqtəsi üçün

$$y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad i = \overline{1, n-1} .$$

$[a,b]$ parçası üzrə isə $f'(x)$ üçün xəta $R = \frac{h}{2} \max_{a \le x \le b} | f''(x)|$ qiymətini aşmır, burada $h = \frac{b-a}{n}$.

(4.9) üçün $\Delta x = h$ götürməklə, bu nəticəni (4.5) üçün də almaq olar. Tutaq ki, $f(x)$ III tərtib kəsilməz diferensiallanan funksiyadır. (4.6) və (4.7) üçün xətaları qiymətləndirmək üçün Teylor sırasından istifadə edərək, $\Delta x = -h$ və $\Delta x = h$ götürməklə, uyğun olaraq alırıq:

$$y_0 = y_1 - y'_1 h + \frac{y_1''}{2!} h^2 - \frac{y_1'''}{3!} h^3 + O(h^4) ; \tag{4.10}$$

$$y_2 = y_1 + y'_1 h + \frac{y_1''}{2!} h^2 + \frac{y_1'''}{3!} h^3 + O(h^4) . \tag{4.11}$$

İkinci bərabərlikdən birincini çıxmaqla, alırıq:

$$y'_1 = \frac{y_2 - y_0}{2h} + O(h^2), \qquad \text{burada } k = 2 .$$

İxtiyari düyün nöqtəsi üçün:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2), \quad i = \overline{1, n-1} .$$

(4.9) ifadəsinə əsasən

$$R_1 \le \frac{h^2}{6} \max_{a \le x \le b} \left| f'''(x) \right| .$$

(4.10) və (4.11) bərabərliklərini toplamaqla tapırıq:

$$y''_1 = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} + O(h^2), \qquad k = 2\,.$$

$[x_{i-1}, x_{i+1}]$ parçası üçün alırıq:

$$y''_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}, \quad i = \overline{1, n-1}\,.$$

$[a, b]$ parçasında ikinci tərtib törəmə üçün isə xəta

$$R_2 \le \frac{h^2}{12} \max_{a \le x \le b} \left| f^{(IV)}(x) \right|.$$

münasibəti ilə qiymətləndirilir.

4.4. İnterpolyasiya çoxhədliləri vasitəsi ilə törəmələrin aproksimasiyası

4.4.1. Nyuton çoxhədlisi vasitəsi ilə törəmələrin aproksimasiyası

Tutaq ki, $h = x_i - x_{i-1}$ ($i = \overline{1, n}$) sabit addımla cədvəl şəklində verilmiş, $y = f(x)$ funksiyası Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisi ilə approksimasiya edilə bilər:

$$y \approx N(x_0 + th) =$$

$$= y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0\,, \quad (4.12)$$

burada $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

(4.12) ifadəsini mürəkkəb funksiya kimi x dəyişəninə görə diferensiallamaqla:

$$\frac{dN}{dx}=\frac{dN}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{h}\cdot\frac{dN}{dt}$$

istənilən tərtib törəmənin hesablanması düsturunu almaq olar:

$$y'\approx\frac{1}{h}\left(\Delta y_0+\frac{2t-1}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{3t^2-6t+2}{3!}\Delta^3 y_0+\right.$$

$$\left.+\frac{4t^3-18t^2+22t-6}{4!}\Delta^4 y_0+\cdots\right), \qquad (4.13)$$

$$y''\approx\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0+\frac{6t-6}{3!}\Delta^3 y_0+\frac{12t^2-36t+22}{4!}\Delta^4 y_0+\ldots\right), \qquad (4.14)$$

$$y'''\approx\frac{1}{h^3}\left(\Delta^3 y_0+\frac{2t-3}{2!}\Delta^4 y_0+\ldots\right) \text{ və s.} \qquad (4.15)$$

Misal 4.1. $y=f(x)$ funksiyası cədvəl şəklində verilmişdir:

x	y
0	1,2833
0,1	1,8107
0,2	2,3606
0,3	2,9577
0,4	3,5969
0,5	4,2833

$x=0{,}1$ nöqtəsində $f'(x)$ və $f''(x)$ törəmələrini hesablayaq. Burada $h=0{,}1$; $t=\frac{x-x_0}{h}=\frac{0{,}1-0}{0{,}1}=1$. Əvvəlcə aşağıdakı sonlu fərqlər cədvəlini quraq:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	1,2833					
0,1	1,8107	0,5274	0,0325	0,0047	0,0002	0,0000
0,2	2,3606	0,5599	0,0372	0,0049	0,0002	
0,3	2,9577	0,5971	0,0421	0,0051		
0,4	3,5969	0,6392	0,0472			
0,5	4,2833	0,6864				

(4.13) və (4.14) düsturlarından istifadə etməklə, tapırıq:

$$y' \approx 10\left(0{,}5274 + \frac{2\cdot 1-1}{2}\cdot 0{,}0325 + \frac{3\cdot 1-6\cdot 1+2}{6}\cdot 0{,}0047 + \right.$$

$$\left. + \frac{4\cdot 1-18\cdot 1+22\cdot 1-6}{24}\cdot 0{,}0002\right) = 5{,}436\,;$$

$$y'' \approx 100\left(0{,}0325 + \frac{6\cdot 1-6}{6}\cdot 0{,}0047 + \right.$$

$$\left. + \frac{12-36+22}{24}\cdot 0{,}0002\right) = 3{,}25\,.$$

4.4.2. Laqranj çoxhədlisinə əsasən törəmələrin hesablanması

$x_i - x_{i-1} = h = const\ (i = \overline{1,n})$ olduğunu nəzərə alaraq Laqranjın $L(x)$ interpolyasiya çoxhədlisini və onun $R(x)$ qalıq həddini interpolyasiyanın üç düyün nöqtələri ($n = 2$ halı) üçün yazaq:

$$L(x) = \frac{1}{2h^2}[(x-x_1)(x-x_2)y_0 -$$

$$-2(x-x_0)(x-x_2)y_1 + (x-x_0)(x-x_1)y_2]\,;$$

$$R(x) = \frac{y_*'''}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\,.$$

Onlarım törəmələrini tapaq:

$$L'(x) = \frac{1}{2h^2}[(2x - x_1 - x_2)y_0 -$$
$$2(2x - x_0 - x_2)y_1 + (2x - x_0 - x_1)y_2],$$
$$R'(x) = \frac{y_*'''}{3!}[(x - x_1)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)].$$

Burada y_*''' – törəmənin hər hansı bir daxili $x_* \in [x_0, x_n]$ nöqtəsində qiymətidir.

$x = x_0$ nöqtəsində y_0' törəməsinin ifadəsini yazaq:

$$y_0' = L'(x_0) + R'(x_0) =$$
$$= \frac{1}{2h^2}[(2x_0 - x_1 - x_2)y_0 - 2(2x_0 - x_0 - x_2)y_1 + (2x_0 - x_0 - x_1)y_2] +$$
$$+ \frac{y_*'''}{3!}[(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) + (x_0 - x_0)(x_0 - x_2) + (x_0 - x_0)(x_0 - x_1)] =$$
$$= \frac{1}{2h^2}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{h^2}{3}y_*'''.$$

Analoji qayda ilə $x = x_1$ və $x = x_2$ olduqda y_1' və y_2' törəmələrinin ifadələrini almaq olar.

Beləliklə, üç düyün nöqtələri ($n = 2$) halı üçün işçi düsturlar aşağıdakı şəkildə olar.

$$y_0' = \frac{1}{2h^2}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{h^2}{3}y_*''',$$
$$y_1' = \frac{1}{2h}(y_2 - y_0) - \frac{h^2}{6}y_*''', \qquad (4.16)$$
$$y_2' = \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2) + \frac{h^3}{3}y_*'''.$$

Məlumat kitablarında $n = 3,4,\ldots$ üçün Laqranj düsturları verilir. Dörd düyün nöqtələri ($n = 3$) halı üçün:

$$\begin{aligned}
y'_0 &= \frac{1}{6h}\left(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3\right) - \frac{h^3}{4} y_*^{IV} \ , \\
y'_1 &= \frac{1}{6h}\left(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3\right) - \frac{h^3}{12} y_*^{IV} \ , \\
y'_2 &= \frac{1}{6h}\left(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3\right) - \frac{h^3}{12} y_*^{IV} \ , \\
y'_3 &= \frac{1}{6h}\left(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3\right) - \frac{h^3}{4} y_*^{IV} \ .
\end{aligned} \tag{4.17}$$

(4.16) və (4.17) ifadələrini təhlil edərək hökm etmək olar ki, funksiyanın $(n+1)$ düyün nöqtələrində qiymətlərindən istifadə edərək, törəmə üçün n-ci tərtib dəqiqliklə aproksimasiya almaq olar. Bu düsturları yalnız $x_0, x_1, x_2, \ldots$ düyün nöqtələri üçün deyil, həm də ixtiyarı $x = x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots$ düyün nöqtələri üçün də (4.16) və (4.17) ifadələrində uyğun indeksləri əvəz etməklə istifadə etmək olar.

Beləliklə, $n = 3$ olduqda:

$$y''_0 = \frac{1}{h^2}(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3) + O(h^2)_* \ ;$$

$$y''_1 = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + O(h^2)_* \ ;$$

$$y''_2 = \frac{1}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) + O(h^2)_* \ ;$$

$$y''_3 = \frac{1}{h^2}(-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3) + O(h^2)_* \ \text{ və s.}$$

Analoji düsturları düyün nöqtələri bərabər yerləşməyən hal üçün də almaq olar. Ancaq bu halda törəmələrin hesablanması üçün Laqranj çoxhədlisinin istifadə olunması mürəkkəb ifadələrin hesablanmasına gətirir.

Belə hesablamalara ehtiyac yarandıqda, ***naməlum əmsallar üsulu*** adlanan, süni üsuldan istifadə etmək daha məqsədəuyğundur.

4.5. Naməlum əmsallar üsulu

Bu üsuldan əsasən interpolyasiya düyün nöqtələri bərabər yerləşməyən hal üçün istifadə olunur. Bu halda hər hansı $x = x_i$ nöqtəsində axtarılan k-cı tərtib törəmənin ifadəsi funksiyanın $x_0, x_1, ..., x_n$ düyün nöqtələrindəki $y_j = f(x_j)$ $(j = \overline{0,n})$ qiymətlərinin xətti kombinasiyası şəklində göstərilir:

$$y_i^{(k)} = c_0 y_0 + c_1 y_1 + ... + c_n y_n \ , \quad i = \overline{1,n} \ . \qquad (4.18)$$

Ehtimal olunur ki, bu münasibət $y = f(x)$ dərəcəsi n-dən böyük olmayan çoxhədlidirsə, yəni o

$$y = b_0 + b_1(x - x_j) + ... + b_n(x - x_j)^n, j = \overline{0,n}$$

şəklində göstərilə bilərsə, dəqiq yerinə yetirilir. Buradan alınır ki, (4.18) münasibəti

$$y = 1, \ y = x - x_j, ..., y = (x - x_j)^n$$

çoxhədliləri üçün dəqiq yerinə yetirilməlidir. Bu çoxhədlilərin törəmələri uyğun olaraq aşağıdakı kimi olacaq:

$$y' = 0 \, , \ y' = 1, ..., y' = n(x - x_j)^{n-1} \ .$$

Bu ifadələri (4.18)-də sağ və sol tərəflərdə yerinə qoymaqla, $c_0, c_1, \dots, c_n$ əmsallarının qiymətlərini hesablamaq üçün $(n+1)$ tərtibli xətti cəbri tənliklər sistemi alınır.

Misal 4.2. $n=3$ halında $(h=const)$ y_1' törəməsi üçün ifadəni tapmalı.

Həlli. (4.18)-i

$$y_1' = c_0 y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \tag{4.18}$$

şəklində yazaq.

$$y=1,\ \ y=x-x_0,\ \ \ y=(x-x_0)^2,\ \ y=(x-x_0)^3 \tag{4.19}$$

$$y'=0,\ \ \ y'=1,\ \ \ y'=2(x-x_0),\ \ \ y'=3(x-x_0)^2 \tag{4.20}$$

çoxhədlilərdən istifadə edirik.

(4.19) və (4.20) münasibətlərini $x=x_1$ olduqda axtarılan tənliyin sağ və sol tərəflərində yazaq:

$$0=c_0\cdot 1+c_1\cdot 1+c_2\cdot 1+c_3\cdot 1;$$

$$1=c_0(x_0-x_0)+c_1(x_1-x_0)+c_2(x_2-x_0)+c_3(x_3-x_0);$$

$$2(x_1-x_0)=c_0(x_0-x_0)^2+c_1(x_1-x_0)^2+c_2(x_2-x_0)^2+c_3(x_3-x_0)^2;$$

$$3(x_1-x_0)^2=c_0(x_0-x_0)^3+c_1(x_1-x_0)^3+c_2(x_2-x_0)^3+c_3(x_3-x_0)^3.$$

Çevirmələrdən sonra

$$\begin{cases} c_0+c_1+c_2+c_3=0 \\ hc_1+2hc_2+3hc_3=1 \\ hc_1+4hc_2+9hc_3=2 \\ hc_1+8hc_2+27hc_3=3 \end{cases}$$

xətti cəbri tənliklər sistemini alarıq ki, bu sistemin də həlli

$$c_0=-\frac{1}{3h};\quad c_1=-\frac{1}{2h};\quad c_2=\frac{1}{h};\quad c_3=-\frac{1}{6h}$$

şəklində olar. Bu qiymətləri (4.18)-də nəzərə alsaq:

$$y'_1 = \frac{1}{6h}\left(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3\right) .$$

(4.18)-in qalıq həddi $R(x) = \frac{h^3}{12} y^{IV}$ olur.

Analoji qayda ilə tapmaq olar ki,

$$y'_0 = \frac{1}{6h}\left(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3\right) - \frac{h^3}{4} y^{IV},$$

$$y'_2 = \frac{1}{6h}\left(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3\right) - \frac{h^3}{12} y^{IV},$$

$$y'_3 = \frac{1}{6h}\left(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3\right) + \frac{h^3}{4} y^{IV},$$

$$y''_0 = \frac{1}{h^2}\left(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3\right) + o(h^2),$$

$$y''_1 = \frac{1}{h^2}\left(y_0 - 2y_1 + y_2\right) + o(h^2),$$

$$y''_2 = \frac{1}{h^2}\left(y_1 - 2y_2 + y_3\right) + o(h^2),$$

$$y''_3 = \frac{1}{h^2}\left(-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3\right) + o(h^2).$$

4.6. Ədədi diferensiallamada aproksimasiyanın yaxşılaşdırılması

Törəmələrin təyin edilməsi üçün yuxarıda baxılan sonlu fərqlər düsturlarından görünür ki, onların dəqiqlik tərtibi aproksimasiyada istifadə olunan düyün nöqtələrinin sayı ilə düz mütənasibdir. Lakin düyün nöqtələrinin sayının artması ilə hesablamaların həcmi artır, alınan nəticələrin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi çətinləşir. Bu çətinliyi aradan qaldırmaq üçün sonlu fərq yanaşmasında sonlu sayda düyün nöqtələri olduqda həllin dəqiqləşdirilməsi üçün daha sadə və effektiv olan ***Runqe – Romberq*** üsulundan iştifadə olunur.

Tutaq ki, $F(x)$ aproksimasiya olunmalı olan törəmədir, $f(x,h)$ isə onun qeyri-müntəzəm şəbəkədə h addımlı sonlu fərqlə aproksimasiyasıdır. Onda aproksimasiyanın qalıq həddini

$$R = h^p \varphi(x) + O(h^{p+1})$$

şəklində yazmaq olar, burada $h^p\varphi(x)$ xətanın baş həddidir. Törəmənin qiyməti

$$F(x) = f(x,h) + h^p \varphi(x) + O(h^{p+1}) \qquad (4.21)$$

şəklində olar. (4.21) ifadəsini həmin x nöqtəsində başqa $h_1 = kh$ addımı ilə yazaq:

$$F(x) = f(x,kh) + (kh)^p \varphi(x) + O[(kh)^{p+1}]. \qquad (4.22)$$

(4.21) və (4.22) ifadələrinin sağ tərəflərini bərabərləşdirməklə xətanın baş həddinin qiymətləndirmək üçün ifadə tapırıq.

$$h^p \varphi(x) \approx \frac{f(x,h) - f(x,kh)}{k^p - 1} + O(h^{p+1}). \qquad (4.23)$$

(4.23)-ü (4.21)-də yerinə qoymaqla

$$F(x) = f(x,h) + \frac{f(x,h) - f(x,kh)}{k^p - 1} + O(h^{p+1}) \qquad (4.24)$$

işçi düsturunu alırıq. Bu düstur törəmənin qiymətinin h və kh addımları ilə iki hesablama nəticəsinə onun dəqiqlik tərtibini h^p-dən h^{p+1}-ə qədər artırmağa imkan verir.

Misal 4.3. $x = 1$ nöqtəsində $y = x^3$ funksiyasının törəməsini tapın.

Aydındır ki, verilmiş funksiyanın törəməsinin dəqiq qiyməti $y'(1) = 3$. $x = 1$ nöqtəsi ətrafında funksiyanın qiymətlər cədvəlini quraq:

x	0,8	0,9	1,0
y	0,512	0,729	1,0

Dəqiqlik tərtibi $p=1$ olmaqla törəmənin sol fərqlərlə aproksimasiyasından istifadə edək. $h_1=0{,}1$; $h_2=0{,}2$ götürək (yəni $k=2$).

$$f(x,h)=y'(1;\ 0{,}1)=\frac{y(1)-y(0{,}9)}{0{,}1}=2{,}71;$$

$$f(x,kh)=y'(1;\ 0{,}2)=\frac{y(1)-y(0{,}8)}{0{,}2}=2{,}44.$$

Onda $F(x)=y'(1)=2{,}71+\dfrac{2{,}71-2{,}44}{2^1-1}=2{,}98$ olar.

Qeyd.

1. Yuxarıda şərh edilənlərdən göründüyü kimi, ədədi diferensiallama üçün alınan düsturlara görə dəqiqliyin dərəcəsi düyün nöqtələrinin sayı ilə törəmənin tərtibinin fərqinə bərabərdir. Ona görə m-ci törəmənin hesablanması üçün lazım olan düyün nöqtələrinin minimal sayı $(m+1)$-ə bərabər olmalıdır.

2. Praktiki mülahizələrə görə, hesablamalar üçün 4-6 sayda düyün nöqtələrindən istifadə etmək məsləhətdir. Onda yaxşı təşkil edilmiş şəbəkədə yaxşı dəqiqlik birinci və ya ikinci törəmələr üçün alınır, üçüncü və dördüncü törəmələr üçün kafi dəqiqlik alınır. Daha yüksək tərtibli törəmələr üçün bu şəbəkə yaramır.

3. m tərtibinin artması ilə adətən ədədi diferensiallamanın dəqiqliyi kəskin aşağı düşür və ona görə də ikinci tərtibdən yuxarı törəmələrin hesablanması üçün bu düsturlar nadir hallarda istifadə olunur.

5. ƏDƏDİ İNTEQRALLAMA

5.1. Məsələnin qoyuluşu

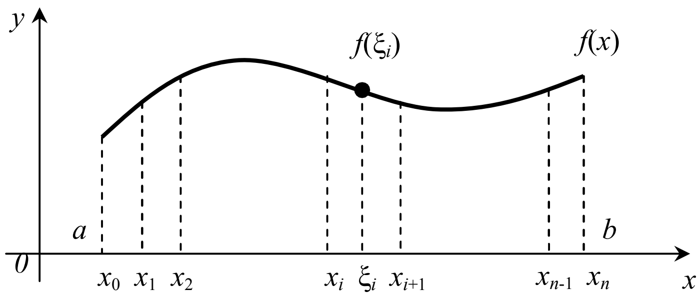
Bir çox elmi və texniki məsələlərdə funksiyaların inteqrallanması sahələrin və həcmlərin riyazi modelləşdirilməsinin və digər bir sıra texniki məsələlərin həllinin əhəmiyyətli tərkib hissəsidir.

Tutaq ki,

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{5.1}$$

müəyyən inteqralını hesablamaq lazımdır.

İnteqralların təqribi hesablanması (ədədi inteqrallama) üsulları müəyyən inteqralın qiymətinin həndəsi mənasına əsaslanır. Bu da ondan ibarətdir ki, I kəmiyyətinin qiyməti $y = f(x)$ əyrisi, absis oxu və $x = a$, $x = b$ düz xətləri ilə hüdudlanmış əyrixətli trapesiyanın sahəsidir (şəkil 5.1), burada $f(x) \geq 0$.



Şəkil 5.1. Müəyyən inteqralın həndəsi mənası

Əksər hallarda, əgər (5.1)-də $f(x)$ funksiyası analitik şəkildə verilərsə, onda müəyyən inteqral qeyri-müəyyən inteqralla (ibtidai funksiya vasitəsiylə) Nyuton-Leybnis düsturu ilə hesablanır:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (5.2)$$

Ancaq bir çox hallarda (5.2) düsturundan həmişə istifadə etmək mümkün olmur. Ona görə də $f(x)$ funksiyası çox mürəkkəb olduqda, yəni $F(x)$ ibtidai funksiyasını elementar funksiyalar ilə ifadə etmək mümkün olmadıqda və $f(x)$ funksiyası cədvəl şəklində verildikdə, qoyulmuş məsələni həll etmək üçün, universal yanaşmadan, inteqralaltı funksiyanın müxtəlif dərəcəli interpolyasiya çoxhədliləri ilə aproksimasiyasına əsaslanan, ***ədədi inteqrallama*** üsullarından istifadə olunur.

Qeyd etmək lazımdır ki, ədədi inteqrallamanın əsas ideyası $f(x)$ funksiyasının, (5.1) şəklində formal yazılmış, məşhur Riman inteqralının tərifində qoyulmuşdur. Bu tərifin mahiyyəti aşağıdakı kimidir.

Tutaq ki, $f(x)$ həqiqi funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunmuşdur və məhduddur. Bu parçanı ixtiyari n sayda $[x_i, x_{i+1}]$ kiçik intervallara bölək, burada $0 \le i \le n-1$, $x_0 = a$, $x_n = b$.

Hər bir intervalda ixtiyari ξ_i, $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$ nöqtəsini götürək və ***inteqral cəmi*** adlanan,

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i). \qquad (5.3)$$

cəmini quraq (şəkil 5.1).

Əgər ixtiyari ξ_i üçün ən böyük uzunluqlu kiçik intervalın uzunluğu sıfıra yaxınlaşdıqda $\lim\limits_{\max|x_{i+1}-x_i|\to 0} S$ varsa, ona $f(x)$ funksiyasının ***Riman inteqralı*** deyilir:

$$I = \lim_{\max|x_{i+1}-x_i|\to 0} S \quad . \tag{5.4}$$

Onda (5.3) cəmi ədədi inteqrallamanın ən sadə nümunəsini verir. Onun yuxarı S_2 və aşağı S_1 cəmləri isə S-in xətasını təyin edir:

$$\begin{cases} |I-S| \le S_2 - S_1; \\ S_1 = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1}-x_i); \quad m_i = \min_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x); \\ S_2 = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1}-x_i); \quad M_i = \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x). \end{cases} \tag{5.5}$$

Təcrübədə ədədi inteqrallama düsturları, mahiyyətcə, (5.3)-dən yalnız üsulların aşkar göstərilməsi ilə fərqlənir:

– x_i, ξ_i nöqtələrinin seçilməsi;

– (5.4)-də yığılmanın (yaxınlaşmanın) sürətləndirilməsi;

– $f(x)$-ə aid əlavə məlumatlar (məsələn, $f(x) \in C^2[a,b]$) vasitəsilə xətaların qiymətləndirilməsi.

Ədədi inteqrallamanın işçi vasitəsi olaraq, (5.1) üçün ***kvadratur düstur*** anlayışı tətbiq olunur. Bunun üçün (5.3) inteqral cəmi anlayışını ümümiləşdirək. $f(x)$ funksiyasının qiymətlərinin hesablandığı ξ_i nöqtələri ***düyünlər*** adlanır, (5.3)-də $(x_{i+1}-x_i)$ əmsalları isə, $f(x)$ funksiyasından asılı olmayan, ***çəkilər*** adlanan, müəyyən q_i ədədləri ilə əvəz edilir. Onda (5.3) düsturu

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} q_i f(\xi_i) \tag{5.6}$$

şəklində olar, burada $a \le \xi_i \le b$.

Aydındır ki, (5.1) inteqralı (5.5)-ə uyğun olaraq

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} q_i f(\xi_i) + R . \qquad (5.7)$$

şəkildə yazılmalıdır.

(5.7) düsturu ***kvadratur düstur***, R isə ***kvadratur düsturun xətası*** adlanır.

Deməli, funksiyanın ədədi inteqrallanması (5.1)-də inteqralaltı $f(x)$ funksiyasının müəyyən nöqtələrdəki $f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$ qiymətlərinə əsasən müəyyən inteqralın təqribi hesablanmasından ibarətdir. Birqat inteqralın (bir dəyişəndən asılı inteqralın) ədədi hesablanması ***kvadratur***, ikiqat inteqralın isə – ***kubatur*** adlanır. Uyğun düsturlar ***kvadratur*** və ***kubatur*** düsturlar adlanır.

(5.1) inteqralının hesablanmasına adi yanaşma ondan ibarətdir ki, $[a,b]$ parçasında $f(x)$ funksiyası sadə şəkilli $g(x)$ interpolyasiyaedici funksiya ilə (məsələn, çoxhədli ilə) əvəz olunur, sonra isə təqribi olaraq

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx \qquad (5.8)$$

götürülür. $g(x)$ funksiyası elə olmalıdır ki, $\int_a^b g(x)dx$ bilavasitə hesablansın.

Laqranj çoxhədlisinin tətbiq olunması halına baxaq. Tutaq ki, $x_0, x_1, ..., x_n$ nöqtələri $[a,b]$ parçasında düyün nöqtələridir və $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$. Laqranj çoxhədlisini yazaq:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} y_i \ , \qquad (5.9)$$

burada

$$L_n(x_i) = y_i ,$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n) .$$

$f(x)$-i $L_n(x)$ çoxhədlisi ilə əvəz etməkə aşağıdakı bərabərliyi alırıq:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + R_n(f) . \qquad (5.10)$$

(5.9)-u (5.10)-da yerinə qoysaq və təqribi kvadratur düsturu alınar:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(y_i) , \qquad (5.11)$$

burada

$$A_i = \int_a^b \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} dx . \qquad (5.12)$$

Əgər a və b interpolyasiyanın düyün nöqtələri olarsa, onda (5.11) kvadratur düsturu "*qapalı tip*", əks halda isə "*açıq tip*" düstur adlanır. Qeyd edək ki:

1) Düyün nöqtələrinin belə yerləşdikdə A_i əmsalları $f(x)$-dən asılı olmurlar;

2) n dərəcəli çoxhədli üçün (5.11) düsturu dəqiqdir, belə ki, onda $L_n(x) \equiv f(x)$; deməli, xüsusi halda, $y = x^k$ $(k = \overline{0,n})$ olduqda da (5.11) düsturu dəqiqdir, yəni $R_n(f) = R_n(x^k) = 0,\ k = \overline{0,n}$.

$f(x) = x^k$ $(k = \overline{0,n})$ götürsək, A_i $(i = \overline{0,n})$ kvadratur əmsallarına nəzərən

$$\begin{cases} I_0 = \sum_{i=0}^{n} A_i, \\ I_1 = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ I_n = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^n \end{cases} \tag{5.13}$$

xətti cəbri tənliklər sistemini alarıq. Burada

$$I_k = \int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \qquad (k = \overline{0,n}).$$

Aydındır ki, (5.13) sisteminin determinantı Vandermond determinantıdır və

$$\Delta = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0$$

olduğundan (5.13) sisteminin $A_0, A_1, ..., A_n$ yeganə həlli olur.

5.2. Nyuton-Kotes düsturları

İnteqrallama intervalında funksiyanın qiymətləri istənilən sayda ola bilər. Tutaq ki, $[a,b]$ parçası n bərabər hissəyə bölünmüşdür: $h = \dfrac{b-a}{n}$; $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0,n}$. $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ arqumentlərinə uyğun funksiyanın $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ qiymətləri məlumdur.

(5.1)-də inteqralaltı funksiyanı Laqranj çoxhədlisi ilə əvəz edək.

$$f(x) \approx L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i} t(t-1)\cdots(t-n)}{i!(n-i)!(t-i)} y_i ,$$

burada $t = \dfrac{x - x_0}{n}$.

Onda

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_0^n \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} t(t-1)\cdots(t-n)}{i!(n-i)!(t-i)} y_i dt \qquad (5.14)$$

və ya

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^n H_i y_i , \qquad (5.15)$$

burada

$$H_i = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-i} dt . \qquad (5.16)$$

(5.14) və ya (5.15) düsturları ***Nyuton-Kotes kvadratur düsturları*** adlanır.

H_i ədədləri ***Kotes ədədləri*** adlanır və

$$1)\ \sum_{i=0}^n H_i = n ; \qquad 2)\ H_i = H_{n-i}$$

bərabərlikləri doğrudur.

$[a,b]$ parçasının bölünmədiyi halda onda tək bir düyün nöqtəsi götürülür. Bu nöqtəni x_0 ilə işarə edək. İnterpolyasiya çoxhədlisi $L_0(x) = y_0$ şəklini alır, kvadratur düstur isə aşağıdakı kimi olur:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)y_0 . \qquad (5.17)$$

$H_i = H_{n-i}$ xassəsindən istifadə etməklə bəzi sadə halları nəzərdən keçirək.

$n=1$ olduqda (5.16)-dan alınır ki,

$$H_0 = \frac{-1}{0!\cdot 1!}\int_0^1 (t-1)dt = -\frac{(t-1)^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Buradan $H_1 = \dfrac{1}{2}$ və (5.15) kvadratur düsturu

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1). \tag{5.18}$$

şəklini alır.

$n=2$ olduqda (5.16)-ya əsasən,

$$H_0 = \frac{1}{0!2!}\int_0^2 (t-1)(t-2)dt = \frac{1}{3},$$

$$H_1 = \frac{1}{0!1!}\int_0^1 t(t-2)dt = \frac{4}{3}.$$

Onda

$$H_2 = H_0 = \frac{1}{3}$$

və

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \tag{5.19}$$

$n=3$ olduqda isə (5.16)-ya əsasən,

$$H_0 = \frac{1}{0!3!}\int_0^3 (t-1)(t-2)(t-3)dt = \frac{3}{8}.$$

Buradan

$$H_2 = \frac{3}{8}.$$

$$H_1 = \frac{1}{0!2!}\int_0^1 (t-1)(t-2)(t-3)dt = \frac{9}{8}.$$

Deməli,

$$H_3 = \frac{9}{8}.$$

Onda (5.15) kvadratur düsturu

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3). \qquad (5.20)$$

şəklini alır.

5.3. Düzbucaqlılar üsulu

Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, $I = \int_a^b f(x)dx$ inteqralının hesablanması $y = f(x)$ əyrisi, absis oxu və $x = a$, $x = b$ düz xətləri ilə hüdüdlanmış əyrixətli trapesiyanın sahəsinin hesablanması ilə eynigüclüdür (şəkil 5.1).

$[a,b]$ inteqrallama parçasını hər birinin uzunluğu $h = \dfrac{b-a}{n}$ olan n sayda bərabər hissəyə bölək.

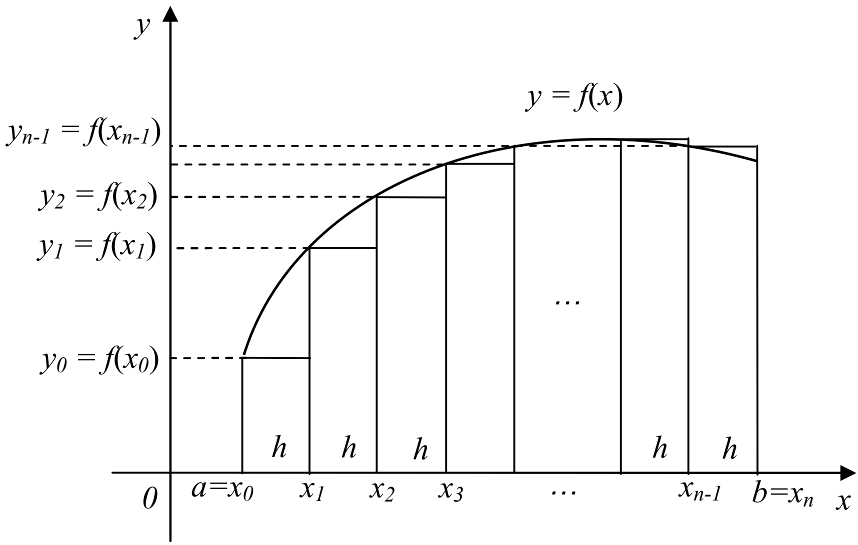
İnteqralın təqribi qiyməti, hündürlükləri hər bir kiçik parçanın sol ucunda $f(x)$-in qiymətinə bərabər olan, n sayda düzbucaqlıların sahələrinin cəminə bərabər olduğu alınır (şəkil 5.2):

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx hy_0 + hy_1 + \ldots + hy_{n-1} = h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}).$$

Yəni ədədi inteqrallama düsturu

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} y_i \tag{5.21}$$

şəklində olar ki, buna da ***"sol" düzbucaqlılar düsturu*** deyilir.

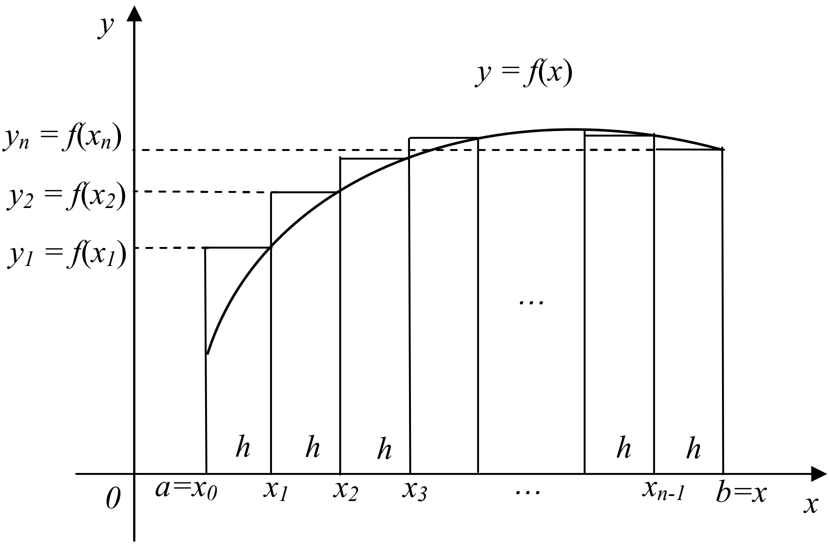


Şəkil 5.2. "Sol" düzbucaqlılar üsulunun həndəsi izahı

Əgər hər bir kiçik düzbucaqlının sahəsinin təqribi qiyməti olaraq, hündürlüyü parçanın sağ ucunda $f(x)$-in qiymətinə bərabər olan düzbucaqlının sahəsi qəbul etsək (şəkil 5.3), onda ədədi inteqrallama düsturu

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} y_i \tag{5.22}$$

şəklində olar. Buna isə ***"sağ" düzbucaqlılar düsturu*** deyilir.



Şəkil 5.3. ″Sağ″ düzbucaqlılar üsulunun həndəsi izahı

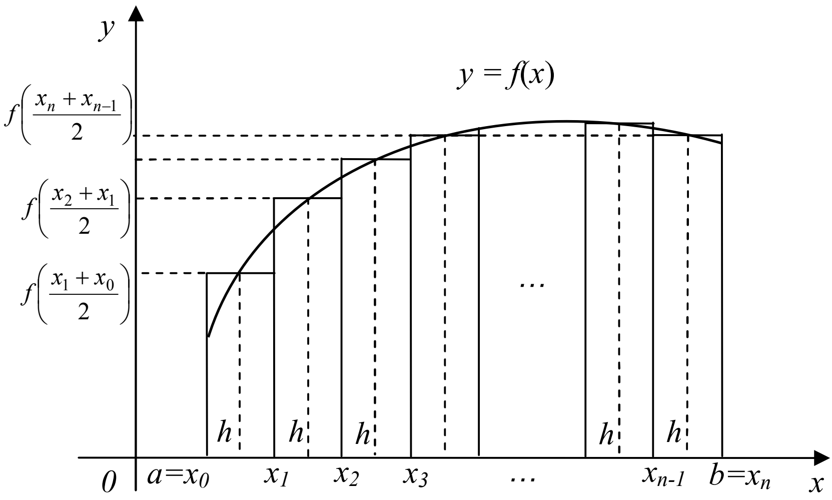
Düzbucaqlılar üsulunun üçüncü halı "orta" düzbucaqlılar üsuludur. Bu halda, hər bir kiçik parça üçün sahənin təqribi qiyməti olaraq, hündürlüyü parçanın orta hissəsində $f(x)$ -in qiymətinə bərabər olan düzbucaqlının sahəsi qəbul edilir (şəkil 5.4).

Onda ədədi inteqrallama düsturu

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \qquad (5.23)$$

şəklində olur və ***"orta" düzbucaqlılar düsturu*** adlanır.

Düzbucaqlılar üsulu sadə və eyni zamanda ədədi inteqrallamanın ən kobud üsuludur. Aydındır ki, bölgü parçalarının n sayı nə qədər böyük olarsa, (5.21) – (5.23) düsturlar daha dəqiq nəticə verərlər. Lakin bölgü parçalarının n sayını artırmaq həmişə mümkün olmur. Ona görə də eyni n üçün daha dəqiq nəticələr verən düsturlar böyük maraq doğurur. Nəzərə çarpacaq dərəcədə daha kiçik xəta verən başqa bir üsul trapesiyalar üsuludur.

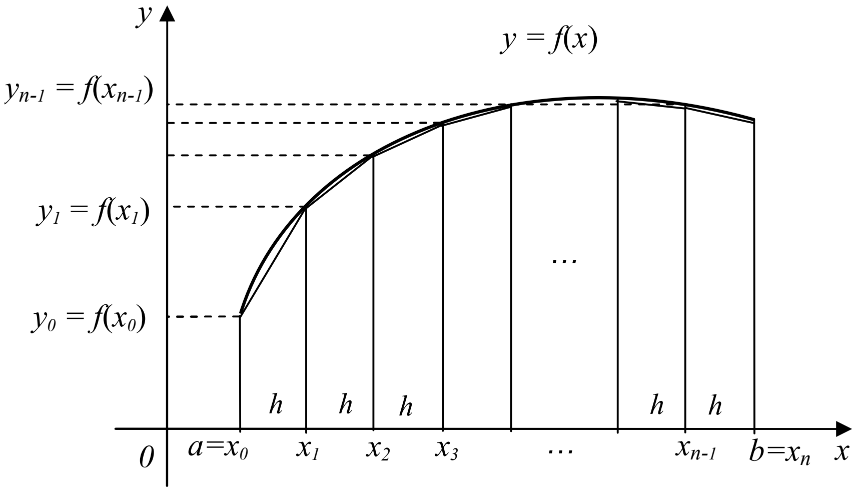


Şəkil 5.4. ″Orta″ düzbucaqlılar üsulunun həndəsi izahı

5.3. Trapesiyalar üsulu

$[a,b]$ parçası n sayda bərabər hissələrə bölək və bölgü nöqtələrini $x_i = a + ih$, $i = \overline{0,n}$ ilə işarə edək, burada $h = \dfrac{b-a}{n}$. Hər bir $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$ parçasında $y = f(x)$ əyrisini koordinatları $(x_{i-1}; f(x_{i-1}))$ və $(x_i; f(x_i))$ olan iki məlum nöqtədən keçən düz xəttlə əvəz edək və hündürlüyü $h = \dfrac{b-a}{n}$ olan düzbucaqlı trapesiya quraq (şəkil 5.5).

Nəticədə əyrixətli trapesiyanın axtarılan sahəsi təqribən elementar həndəsi trapesiyaların sahələrinin cəmi ilə əvəz olunur (oturacaqları a, b və hündürlüyü h olan trapesiyanın sahəsi $S = h \cdot \frac{a+b}{2}$ düsturu ilə hesablanır) ki,



Şəkil 5.5. Trapesiyalar üsulunun həndəsi izahı

bu halda

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} +$$

$$+ \ldots + h \cdot \frac{f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})}{2} + h \cdot \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} =$$

$$= h \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})}{2} + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right) =$$

$$= h \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_2)}{2} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{f(x_{n-2})}{2} + \frac{f(x_{n-1})}{2} + \frac{f(x_{n-1})}{2} + \frac{f(x_n)}{2} \right) =$$

$$= h \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$

düsturu alınır. Beləliklə,

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right).$$

Alınmış düsturu qısa şəkildə

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) \qquad (5.24)$$

kimi də yazmaq olar. Bu düstur ***ümumiləşmiş trapesiyalar düsturu*** adlanır, müəyyən inteqralın (5.24)-ə nəzərən təqribi hesablanması üsuluna ***trapesiyalar üsulu*** deyilir.

5.4. Parabolalar (Simpson) üsulu

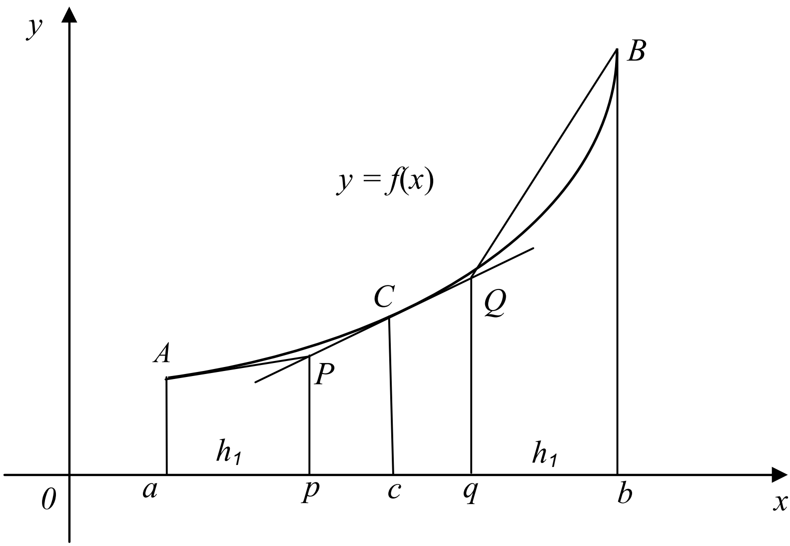
Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında $y = f(x)$ funkiyası müsbətdir və kəsilməzdir. Əyrixətli $aABb$ trapesiyasının sahəsini tapaq (şəkil 5.6).

Bunun üçün $[a,b]$ parçasını $c = \frac{a+b}{2}$ nöqtəsi ilə yarıya bölək və $C(c, f(c))$ nöqtəsində $y = f(x)$ əyrisinə toxunan çəkək. Bundan sonra $[a,b]$ parçasını p və q nöqtələri ilə üç bərabər hissəyə bölək və $x = p$ və $x = q$ düz xətləri çəkək. Tutaq ki, P və Q bu düz xətlərin toxunanla kəsişmə nöqtələridir. A nöqtəsin

P ilə və B nöqtəsin Q ilə birləşdirməklə, üç düzbucaqlı $aAPp$, $pPQq$, $qQBb$ trapesiyalarını alarıq. Onda $aABb$ trapesiyasının sahəsini

$$I \approx \frac{aA + pP}{2} \cdot h_1 + \frac{pP + qQ}{2} \cdot h_1 + \frac{qQ + bB}{2} \cdot h_1$$

düsturu ilə təqribi hesablamaq olar, burada $h_1 = \dfrac{b-a}{3}$.



Şəkil 5.6. Parabolalar üsulunun həndəsi izahı

Buradan alarıq ki,

$$I \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left(aA + 2\left(pP + qQ\right) + bB\right).$$

Qeyd edək ki, $aA = f(a)$, $bB = f(b)$, $pP + qQ = 2f(c)$ (trapesiyanın orta xətti kimi). Nətcədə Simpsonun

$$I \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4f(c) + f(b)\right) \qquad (5.25)$$

kiçik düsturunu alırıq.

Bu halda ACB qövsqü A, P, Q, B nöqtələrindən keçən parabola ilə əvəz edilir.

Simpsonun (5.25) kiçik düsturu inteqralaltı funksiyanın qrafiki bir az əyilmiş olduqda inteqralın qiymətini daha dəqiqliklə verir, inteqralaltı funksiya mürəkkəb olduqda (5.25) düsturu yaramır. Onda inteqralı hesablamaq üçün $[a,b]$ parçasını n sayda bərabər hissələrə bölmək və hər bir parçaya (5.25) düsturunu tətbiq etmək lazımdır.

Parabolalar üsulunun həndəsi mənasından göründüyü kimi, n cüt ədəd olmalıdır.

$h = \dfrac{b-a}{n}$, bölgü nöqtələri $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n = b$, $[a,b]$ parçasında inteqralaltı funksiyanın uyğun qiymətləri $y_0, y_1, \ldots, y_n$ olarsa, onda alınan parçaların hər bir cütünə 5.25) düsturunu tətbiq etməklə

$$I_1 \approx \frac{x_2 - x_0}{6}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right);$$

$$I_2 \approx \frac{x_4 - x_2}{6}\left(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right);$$

....

$$I_{\frac{n}{2}} \approx \frac{x_n - x_{n-2}}{6}\left(f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

alınır. Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplasaq,

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx I_1 + I_2 + \ldots + I_{\frac{n}{2}} \qquad (5.26)$$

olar.

Qeyd edək ki, bütün $I_1, I_2, \ldots, I_{\frac{n}{2}}$ ifadələrində birinci vuruq $\frac{h}{3}$-ə bərabərdir:

$$\frac{x_2 - x_0}{6} = \frac{2h}{6} = \frac{h}{3};$$
$$\frac{x_4 - x_2}{6} = \frac{2h}{6} = \frac{h}{3}; \qquad (5.27)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{x_n - x_{n-2}}{6} = \frac{2h}{6} = \frac{h}{3}.$$

Bu qiymətləri nəzərə alsaq,

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx I_1 + I_2 + \ldots + I_{\frac{n}{2}} =$$
$$= \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) +$$
$$+ 4f(x_3) + f(x_4) + \ldots + f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\big) =$$
$$= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1})) +$$
$$+ 2(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{n-2})) + f(x_n)]$$

olar.

Beləliklə, Simpsonun ″böyük″ düsturunu alırıq:

$$I \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + ... + f(x_{n-1})) +$$

$$+ 2(f(x_2) + f(x_4) + ... + f(x_{n-2})) + f(x_n)]. \qquad (5.28)$$

Bu düsturun tətbiqi ilə müəyyən inteqralın təqribi hesablanması üsuluna ***Simpson üsulu*** deyilir.

5.5. Kvadratur düsturların xətaları

Hər bir halda, sonradan cəmlənən, lokal xətalar təyin edilir.

(5.21) ″sol″ düzbucaqlılar düsturuna baxaq. Teylor düsturuna əsasən $[x_{i-1}, x_i]$ parçasında interpolyasiya düsturu

$$r_i(x) = \frac{f'(\xi_i)}{1!}(x - x_{i-1})$$

təşkil edir, burada $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Onda inteqrallama xətası

$$R_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} r_i(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x - x_{i-1})dx$$

ifadəsi ilə ifadə edilir ki, orta qiymət haqqında ümumiləşmiş teoremə əsasən onu

$$R_i = f'(\overline{\xi_i})\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-1})dx = f'(\overline{\xi_i})\frac{h^2}{2}$$

şəklində yazmaq olar, burada $\overline{\xi_i} \in [x_{i-1}, x_i]$.

Onda (5.21) düsturunun xətası

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} R_i = \frac{h^2}{2}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f'(\overline{\xi_i}) = \frac{h(b-a)}{2}\cdot\frac{f'(\overline{\xi_i})}{n}$$

olur.

Sonra, fərz edək ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında kəsilməz diferensiallanan funksiyadır. Onda Veyerştras teoreminə görə elə $\xi \in [a,b]$ qiymətini tapmaq olar ki, xətanı qiymətləndirmək üçün ifadənin son şəkili

$$R = \frac{h(b-a)}{2} f'(\xi)\,,\ \xi \in [\mathrm{a,b}] \tag{5.29}$$

olar.

(5.29) düsturundan istifadə etməklə, verilmiş ε inteqrallama xətasını təmin edən, h addımını və n sayını seçmək olar. Doğrudan da, tutaq ki, $M_1 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. Onda alarıq:

$$|R| \le \frac{h(b-a)}{2} M_1\,.$$

$$\frac{h(b-a)}{2} M_1 = \varepsilon \ \Rightarrow\ h = \frac{2\varepsilon}{M_1(b-a)}\,.$$

(5.24) trapesiyalar düsturuna baxaq.

İnteqrallamanın $[x_{i-1}, x_i]$ parçasında lokal xətasını təyin edək. İnterpolyasiya xətası:

$$r_i(x) = \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2!} f''(\xi_i)\,,$$

burada $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Onda orta qiymət haqqında teoremə əsasən

$$R_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} r_i(x)dx = \frac{f''(\overline{\xi_i})}{2} \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1})(x-x_i)dx = -\frac{f''(\overline{\xi_i})}{12} h^3\,,$$

burada $\overline{\xi_i} \in [x_{i-1}, x_i]$. Sonra, lokal xətaları cəmləməklə, trapesiya düsturundan istifadə edəndə $[a,b]$ parçasında alınan, qlobal xəta üçün:

$$R = -\sum_i \frac{f''(\overline{\xi_i})}{12} h^3 = -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(\xi), \qquad (5.30)$$

olduğunu alarıq, burada $\xi \in [a,b]$. Simson düsturu üçün isə xətanın

$$R = -\frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi) \qquad (5.31)$$

şəklində olduğunu isbatsız qəbul edək, burada $\xi \in [a,b]$.

5.6. Qeyri-məxsusi inteqralların təqribi hesablanması

Məlum olduğu kimi, $\int_a^b f(x)dx$ inteqralı o vaxt məxsusi inteqral adlanır ki:

1) $[a,b]$ inteqrallama oblastı sonludur;
2) $f(x)$ funksiyası $[a,b]$-də kəsilməzdir.

Əks halda inteqrala ***qeyri-məxsusi inteqral*** deyilir. Əvvəlcə

$$\int_a^\infty f(x)dx \qquad (5.32)$$

qeyri-məxsusi inteqralının təqribi hesablanmasını nəzərdən keçirək.

Tutaq ki, $f(x) \in c_{[a,\infty)}$. Bu halda (5.32) inteqralı üçün

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \qquad (5.33)$$

limiti sonlu ədəd olarsa, ona ***yığılan qeyri-məxsusi inteqral*** deyilir və

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx\,. \qquad (5.34)$$

Əgər (5.33) limiti yoxdursa, onda (5.32) inteqralı ***dağılan*** adlanır. Bu növ inteqralların təqribi hesablanmasını nəzərdən keçirək.

I üsul. Sərhədlər əvəzləmə vasitəsilə sonlu şəkilə gətirilir. Məsələn,

$$\int_a^{\infty} f(x)dx\,,\ a>0$$

inteqralı üçün $x = a/(1-t)$ əvəzləməsi $[a,\infty]$ aralığını $[0,1]$ -ə çevirir. Əgər inteqralaltı funksiya müəyyən tərtib törəmələri ilə çevirmədən sonra məhdud qalırsa, onda məlum üsulları tətbiq etmək olar.

II üsul. Verilən ε dəqiqliyi ilə (5.32) yığılan inteqralını hesablamaq üçün onu

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx \qquad (5.35)$$

kimi göstərək. İnteqralın yığılmasına görə b -ni elə böyük seçmək olar ki,

$$\left|\int_b^{\infty} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (5.36)$$

olsun.

$\int_a^b f(x)dx$ müəyyən inteqralını isə kvadratur düsturların ixtiyari biri ilə hesablamaq olar.

Tutaq ki, S bu inteqralın $\frac{\varepsilon}{2}$ dəqiqliyi ilə təqribi qiymətidir, yəni

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad . \tag{5.37}$$

Onda (5.35), (5.36), (5.37) düsturlarından alınır ki,

$$\left|\int_a^\infty f(x)dx - S\right| < \varepsilon$$

Tutaq ki, $[a,b]$ sonludur və $f(x)$-in $[a,b]$-də sonlu sayda kəsilmə nöqtələri var. Sadəlik üçün fərz edək ki, $f(x)$-in $[a,b]$-də bir kəsilmə nöqtəsi var (II növ kəsilmə nöqtəsi). Onda tərifə görə

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\delta_1 \to +0 \\ \delta_2 \to +0}} \left\{ \int_a^{c-\delta_1} f(x)dx + \int_{c+\delta_2}^b f(x)dx \right\} \tag{5.38}$$

götürülür. Əgər (5.38) limiti varsa, bu inteqral ***yığılan***, əks halda isə ***dağılan*** olur.

Verilmiş ε dəqiqliklə (5.34) yığılan qeyri-məxsusi inteqralını təqribi hesablamaq üçün elə kiçik δ_1 və δ_2 seçilir ki,

$$\left|\int_{c-\delta_1}^{c+\delta_2} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olsun. Sonra isə

$$\int_a^{c-\delta_1} f(x)dx \quad \text{və} \quad \int_{c+\delta_2}^b f(x)dx \tag{5.39}$$

məxsusi inteqrallarını məlum kvadratur düstura görə hesablamaq olar.

Aydındır ki, əgər (5.39) inteqrallarının $\frac{\varepsilon}{4}$ dəqiqliklə təqribi qiymətləri S_1 və S_2 olarsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_1 + S_2$$

olur.

Qeyd. Əgər $f(x)$ funksiyasının kəsilmə nöqtəsi a və b uclarından biri ilə üst-üstə düşərsə, onda hesablama sxeminin şəkili dəyişdirilir.

6. ADİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN TƏQRİBİ HƏLL ÜSULLARI

Adi diferensial tənliklərin ən sadəsi bir tərtibli $y' = f(x,y)$ diferensial tənliyidir. Diferensial tənliyin ümumi həlli ilə yanaşı, bir çox hallarda onun müəyyən şərtləri ödəyən xüsusi həllini tapmaq tələb olunur. $y' = f(x,y)$ diferensial tənliyinin $y_0 = y(x_0)$ başlanğıc şərtini ödəyən xüsusi həllinin tapılması məsələsi ***Koşi məsələsi*** adlanır. Həndəsi olaraq, bu $X0Y$ müstəvisinin verilmiş $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsindən keçən, inteqral əyrisinin tapılmasını göstərir.

Əgər diferensial tənliyinin sağ tərəfi $f(x,y)$ müəyyən

$$R = \{(x,y) : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$$

oblastında kəsilməzdirsə, onda x_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafında, heç olmasa, bir həll mövcuddur: $|x - x_0| < h$, $h > 0$. Əgər R oblastında

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \le L|y_2 - y_1|$$

Lipşis şərti ödənilərsə, bu həll yeganədir, burada $L -$ Lipşis sabitidir (ümumi halda a və b -dən asılıdır). Əgər R oblastında $f(x,y)$ məhdud $f'_y(x,y)$ törəməsinə malikdirsə, onda

$$L = \max|f'_y(x,y)|, \ (x,y) \in R$$

götürmək olar.

Koşi məsələsinin dəqiq həllini bir çox hallarda tapmaq olmur, buna görə də Koşi məsələsini təqribi həll etmək lazım gəlir.

Həlli ifadə etdiyi formadan asılı olaraq təqribi üsulları bir neçə qrupa bölmək olar:

1) diferensial tənliyin təqribi həllini analitik ifadə şəklində verən analitik üsullar;
2) diferensial tənliyin təqribi həllini axtarılan $y(x)$ funksiyasının ayrı-ayrı x_i nöqtələrində (düyünlərində) qiymətlərini cədvəl şəklində təsvir etməyə imkan verən ədədi üsullar;
3) həlli qrafik şəkildə verən qrafik üsullar.

Fərz edəcəyik ki, baxılan tənliklər üçün varlıq və yeganəlik şərtləri ödənilir.

6.1. Diferensial tənliklərin analitik üsullarla həlli

6.1.1. Ardıcıl diferensiallama üsulu (sıraların köməyi ilə diferensial tənliyin inteqrallanması)

Diferensial tənliyin inteqrallanmasının təqribi analitik üsullarından biri onun həllinin Teylor sırası şəklində göstərilməsidir. Bu sıranın sonlu sayda hədlərinin cəmi təqribən axtarılan xüsusi həllə bərabər götürülür.

Tutaq ki, iki tərtibli $y'' = F(x, y, y')$ diferensial tənliyinin $y_0 = y(x_0)$, $y_0' = y'(x_0)$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapmaq tələb olunur.

Fərz edək ki, diferensial tənliyin həlli var və bu həll $x - x_0$ fərqinin qüvvətlərinə görə

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \qquad (6.1)$$

Teylor sırasına ayırmaq olar. $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, y_0, y_0', y_0'' qiymətlərini başlanğıc şərtlərin və ilkin tənliyin köməyi ilə tapılır: $y_0 = y(x_0)$, $y_0' = y'(x_0)$, $y_0'' = F(x_0, y_0, y_0')$. $y_0'' = F(x_0, y_0, y_0')$ -in hər iki tərəfini x -ə görə diferensiallamaqla,

$$y''' = F_x^{/}(x, y, y') + F_y^{/}(x, y, y')y' + F_{y^{/}}^{/}(x, y, y')y^{//} \qquad (6.2)$$

üçüncü tərtib törəməni alırıq. x_0 qiymətini (6.2)-nin sağ tərəfində nəzərə almaqla, $y_0''' = y'''(x_0)$ tapılır. (6.2) bərabərliyini bir də diferensiallamaqla x_0 nöqtəsində dördüncü tərtib törəmə tapılır və s. Törəmələrin tapılmış qiymətlərini (6.1) ayrılışında nəzərə almaq lazımdır. Üsulun xətası (6.1) ayrılışının ilk atılan hədlərindən birincisi ilə təyin edilir.

Həllərin qüvvət sıralarına ayrılması üsulu (ardıcıl diferensiallama üsulu) həm n-tərtibli adi diferensial tənliklərin, həm də adi diferensial tənliklər sisteminin həlli üçün oxşar şəkildə tətbiq olunur. Bundan başqa, bu üsul daha effektiv ədədi üsulların elementi kimi istifadə edilə bilər.

Misal 6.1.

$$\begin{cases} y'(x) = y\cos x - z\sin x \\ z'(x) = y\sin x + z\cos x \end{cases}$$

diferensial tənliklər sisteminin

$$y(0) = 1, \quad z(0) = 0$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həllinin qüvvət sırasına ayrılışının ilk dörd həddini tapmalı.

Həlli. $y(x)$, $z(x)$ funksiyalarını

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(k)}(0)}{k!}x^k + \ldots,$$

$$z(x) = z(0) + \frac{z'(0)}{1!}x + \frac{z''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{z^{(k)}(0)}{k!}x^k + \ldots$$

qüvvət sıraları şəklində axtaraq. Başlanğıc şərtlərə görə $y(0) = 1$, $z(0) = 0$. Sistemdə $x = 0$ və başlanğıc şərtləri nəzərə almaqla,

$y'(0)=1$, $z'(0)=0$ alarıq.

Sistemin tənliklərini x-ə görə diferensiallasaq,

$$\begin{cases} y''(x)=-(y+z')\sin x-(z-y')\cos x \\ z''(x)=-(z-y')\sin x+(y+z')\cos x \end{cases}$$

olar. Buradan $y''(0)=1$, $z''(0)=1$ alınır.

Sistemin tənliklərini x-ə görə bir də diferensiallasaq,

$$\begin{cases} y'''(x)=-(z-2y'-z'')\sin x-(y+2z'-y'')\cos x \\ z'''(x)=-(y+2z'-y'')\sin x-(z-2y'-z'')\cos x \end{cases}$$

olar. Buradan $y'''(0)=0$, $z'''(0)=3$ olduğu alınır.

Törəmələrin tapılmış qiymətlərini qüvvət sıralarında nəzərə almaqla

$$y(x)\approx 1+x+\frac{x^2}{2},\quad z(x)\approx \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}$$

olduğunu alarıq.

6.1.2. Ardıcıl yaxınlaşmalar üsulu (iterasiya üsulu, Pikar üsulu)

Bu üsul $y'=f(x,y)$ diferensial tənliyinin $y_0=y(x_0)$ başlanğıc şərtini ödəyən həllinə yığılan $\{y_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığının qurulmasına əsaslanır. $\{y_n(x)\}$ ardıcıllığdan olan istənilən funksiyanı Koşi məsələsinin təqribi həlli kimi qəbul etmək olar.

Bir tərtibli $y'=f(x,y)$ diferensial tənliyi üçün $y_0=y(x_0)$ başlanğıc şərtlərini ödəyən Koşi məsələsinə baxaq. Diferensial tənliyin sağ tərəfi üçün varlıq və yeganəlik şərtləri ödənilir. Diferensial tənliyin hər iki tərəfini x_0-dan x-ə qədər inteqrallayaq:

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx,$$

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx \tag{6.3}$$

(6.3) tənliyini iterasiya üsulu ilə həll edəcəyik. Əvvəlcə başlanğıc şərtini ödəyən hər hansı bir $y_0(x)$ funksiyasını seçirik. Bu funksiyanı sıfırıncı yaxınlaşma adlandırırlar. Sonra $y_0(x)$ -i (6.3) düsturunun sağ tərəfində nəzərə alıb və 1-ci yaxınlaşma tapılır.

Qeyd. $y_0(x)$ başlanğıc yaxınlaşması, məsələn, qoyulmuş məsələnin fiziki əsasları əsasında seçilməlidir. Əgər $y_0(x)$ funksiyası haqqında qabaqcadan heç nə məlum deyilsə, onda $y_0(x) = y_0$ götürmək olar.

(6.3) bərabərliyində inteqral işarəsi altında $y(x)$ funksiyasını $y_0 = y_0(x)$ qiyməti ilə əvəz etsək,

$$y_1(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x_0))dx$$

birinci yaxınlaşmasını alarıq. Sonra (6.3) bərabərliyində $y(x)$ funksiyasını tapılmış $y_1(x)$ funksiyası ilə əvəz etsək,

$$y_2(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))dx$$

ikinci yaxınlaşmasını alarıq.

Prosesi bu qayda ilə davam etdirməklə, ardıcıl olaraq növbəti yaxınlaşmaları

$$y_n(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\left(x, y_{n-1}(x)\right)dx \tag{6.4}$$

rekurrent düsturu ilə tapırıq (bu üsulun işçi düsturudur).

Əgər sağ tərəf $f(x, y)$ hər hansı qapalı

$$R = \left\{(x, y) : \left|x - x_0\right| \le a, \left|y - y_0\right| \le b\right\}$$

düzbucaqlıda

$$\left|f\left(x, y_2\right) - f\left(x, y_1\right)\right| \le L\left|y_2 - y_1\right|$$

Lipşis şərtini ödəyirsə, onda başlanğıc funksiyanın seçilməsindən asılı olmayaraq $y_n(x)$ ardıcıl yaxınlaşmaları ixtiyari $[x_0; x_0 + h]$ parçasında Koşi məsələsinin həllinə yığılır: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$ və $[x_0; x_0 + h]$ parçasında $y_n(x)$ təqribi həllinin xətası

$$\varepsilon_n = \left|y(x) - y_n(x)\right| \le M \cdot N^n \frac{\left(x - x_0\right)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{6.5}$$

kimi qiymətləndirilir, burada

$$M = \max_{(x,y)\in R}\left|f(x, y)\right|,$$

$$N = \max_{(x,y)\in R}\left|f_y^{/}(x, y)\right|,$$

$$h = \min\left(a; b/M\right) .$$

Hesablamaların dayandırılması üçün

$$\left|y_n(x) - y_{n-1}(x)\right| < \varepsilon$$

bərabərsizliyindən istifadə etmək olar, əgər o ödənilirsə, proses sona çatmışdır və $y(x) \approx y_n(x)$ diferensial tənliyin həll qəbul edilir. Əks halda növbəti yaxınlaşma təyin edilir.

İterasiya üsulu həm diferensial tənliklər sisteminin həlli üçün, həm də əgər onu bir tərtibli diferensial tənliklər sistemi şəklində yazmaq mümkündürsə, n tərtibli diferensial tənliyin həlli üçün də tətbiq oluna bilər.

Diferensial tənliyin iterasiya üsulu ilə həlli üçün, həllərin qüvvət sıralarına ayrılması üsulundan fərqli olaraq, sağ tərəfin analinik olması tələb olunmur. Sağ tərəf inteqralların yığılmasını təmin etməlidir. Buna görə iterasiya üsulunun tətbiq edilə bilməsinin sahəsi daha geniş olur – o həllərin qüvvət sırasına ayrılması mümkün olmayanda tətbiq oluna bilər.

İterasiya üsulunun nöqsanı getdikcə daha çox inteqralların hesablanmasının lazım olmasıdır.

Misal 6.2.

$y' = x^2 + y^2$ tənliyinin $y(0) = 0$ başlanğıc şərtini ödəyən həllinin üç ardıcıl yaxınlaşmasını tapmalı.

Həlli. Başlanğıc şərtini nəzərə almaqla, bu tənliyi

$$y(x) = \int_0^x (x^2 + y^2)dx$$

inteqral tənliyi ilə əvəz edək.

Başlanğıc yaxınlaşma olaraq $y_0(x) \equiv 0$ götürək.

Birinci yaxınlaşmanı

$$y_1(x) = \int_0^x (x^2 + y_0^2(x))dx = \int_0^x x^2 dx = x^3/3$$

düsturuna görə tapırıq.

Analoji olaraq, ikinci və üçüncü yaxınlaşmaları

$$y_2(x) = \int_0^x (x^2 + y_1^2(x))\,dx = \int_0^x (x^2 + x^6/9)\,dx = x^3/3 + x^7/63\,,$$

$$y_3(x)=\int_0^x (x^2+y_2^2(x))\,dx=$$

$$=\int_0^x (x^2+x^6/9+2x^{10}/189+x^{14}/3969)\,dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2079}+\frac{x^{15}}{59535}$$

şəklində tapmış oluruq.

Axırıncı yaxınlaşmanın xətasını qiymətləndirək.

$f(x,y)=x^2+y^2$ funksiyası bütün müstəvidə təyin olunmuşdur və kəsilməzdir, odur ki, a və b üçün istənilən ədədləri götürmək olar. Müəyyənlik üçün $a=1$, $b=0,5$ götürək. Onda

$$M=\max\left|f(x,y)\right|=\max\left|x^2+y^2\right|=1{,}25\,,$$

$$N=\max\left|f'_y(x,y)\right|=\max\left|2y\right|=1\,.$$

$h=0{,}4$ seçək və $[0;0{,}4]$ parçasında

$$\left|y(x)-y_3(x)\right|\le 1{,}25\cdot 1^3\cdot\frac{x^4}{4!}=\frac{5}{96}x^4$$

olduğunu alırıq. Deməli,

$$\max_{[0;0,4]}\left|y(x)-y_3(x)\right|\le\frac{5\cdot(0{,}4)^4}{96}\approx 0{,}00133\,.$$

6.1.3. Yüksək tərtibli diferensial tənliklər üçün ardıcıl yaxınlaşmalar üsulu

İki tərtibli $y''=f(x,y,y')$ diferensial tənliyi üçün başlanğıc şərtləri $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$ olan Koşi məsələsini nəzərdən keçirək. Tənliyin hər iki tərəfini x_0-dan x-ə qədər inteqrallayaq:

$$\int_{x_0}^{x} y''(x)dx = y'(x) - y'(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x, y, y')dx$$

və ya

$$y'(x) = y'(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y, y')dx .$$

Bir də inteqrallamaqla,

$$\int_{x_0}^{x} y'(x)dx = y(x) - y(x_0) = (x - x_0)y_0' + \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x, y, y')dx\right)dx$$

və ya

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y_0' + \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x, y, y')dx\right)dx \qquad (6.6)$$

alırıq.

Qoyulmuş məsələnin fiziki mahiyyətinə əsaslanaraq ilkin yaxınlaşmanı seçmək tələb olunur. Əgər ilkin yaxınlaşmanı seçmək mümkün deyilsə, onda belə yaxınlaşma kimi $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ şərtlərini təmin edən xətti funksiyanı seçmək əlverişlidir ki, bu funksiya həndəsi olaraq y_0' bucaq əmsalıyla $(x_0; y_0)$ nöqtəsindən keçən düz xətti təsvir edir, yəni

$$y_0(x) = y_0 + (x - x_0)y_0' .$$

Onda $y'(x_0) = y_0'$.

$y_0(x)$ və $y_0'(x)$-i (6.6) düsturunun sağ tərəfində nəzərə alıb 1-ci yaxınlaşmanı,

$$y_1(x) = y(x_0) + (x - x_0)y_0' + \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x), y_0'(x))dx\right)dx ,$$

sonra 1-ci yaxınlaşmanı (6.6) düsturunun sağ tərəfində nəzərə alıb 2-ci yaxınlaşmanı alırıq:

$$y_2(x) = y(x_0) + (x - x_0)y_0' + \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x), y_1'(x))dx\right)dx .$$

Bu qayda ilə proses davam etdirilir.

Əgər $(n-1)$-ci yaxınlaşma $y_{n-1}(x)$ təyin olunmuşdursa, onda $y_{n-1}'(x)$ və $f(x, y_{n-1}(x), y_{n-1}'(x))$-i hesablayıb, n-ci yaxınlaşmanı

$$y_n(x) = y(x_0) + (x - x_0)y_0' + \\ + \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x), y_{n-1}'(x))dx\right)dx \qquad (6.7)$$

düsturuna görə tapmış oluruq.

Hesablama prosesi x_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafında $|y_n(x) - y_{n-1}(x)| < \varepsilon$ olduqda yığılır, burada ε – verilmiş dəqiqlikdir.

6.1.4. Diferensial tənliklər sistemi üçün ardıcıl yaxınlaşmalar üsulu

Tutaq ki, hər hansı D oblastında

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = p_1(t)\cdot x(t) + q_1(t)\cdot y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = p_2(t)\cdot x(t) + q_2(t)\cdot y(t) \end{cases} \qquad (6.8)$$

diferensial tənliklər sisteminin verilmiş

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \qquad (6.9)$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən xüsusi həllini tapmaq tələb olunur.

Fərz edək ki, (6.8) sisteminin $p_1(t), p_2(t), q_1(t), q_2(t)$ əmsalları t_0 nöqtəsini özündə saxlayan D oblastında kəsilməz funksiyalardır. (6.8) sisteminin tənliklərini inteqrallamaqla,

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} [p_1(t)x(t) + q_1(t)y(t)]dt \\ y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} [p_2(t)x(t) + q_2(t)y(t)]dt \end{cases} \tag{6.10}$$

olduğu alınır.

İterasiya üsulunun mahiyyətini saxlamaqla, sıfırıncı yaxınlaşmalar kimi $x_0(t) = x_0$, $y_0(t) = y_0$ sabitlərini seçmək olar. Əgər x_0 və y_0 -ı (6.10) diferensial tənliklər sistemində nəzərə alsaq,

$$\begin{cases} x_1(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} [p_1(t)x_0 + q_1(t)y_0]dt \\ y_1(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} [p_2(t)x_0 + q_2(t)y_0]dt \end{cases} \tag{6.11}$$

birinci yaxınlaşmalarını alarıq. Sonra 1-ci yaxınlaşmaları (6.11) sisteminin tənliklərinin sağ tərəfində qoymaqla, 2-ci yaxınlaşmaları və s. alırıq. Onda n-ci yaxınlaşmaları $(n-1)$-ci ilə ifadə edən ümumi düstur

$$\begin{cases} x_n(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} [p_1(t)x_{n-1}(t) + q_1(t)y_{n-1}(t)]dt \\ y_n(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} [p_2(t)x_{n-1}(t) + q_2(t)y_{n-1}(t)]dt \end{cases} \tag{6.12}$$

şəklində olar.

Diferensial tənliklər nəzəriyyəsində isbat edilir ki, t_0 nöqtəsini özündə saxlayan parçada proses yığılır, yəni $n \to \infty$ olduqda $x_n(t) \to x(t)$, $y_n(t) \to y(t)$. Bununla belə, əgər baxılan parçada

$$|p_1(t)| \le M \,, |p_2(t)| \le M \,, |q_1(t)| \le M \,, \ |q_2(t)| \le M \,, m = \max\{|x_0|, |y_0|\}$$

olarsa, onda iki ardıcıl yaxınlaşmalar arasındakı fərqlərin mütləq qiyməti aşağıdakı bərabərsizliklərlə qiymətləndirilir:

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \le m \frac{(2M(t - t_0))^n}{n!},$$

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \le m \frac{(2M(t - t_0))^n}{n!}.$$

6.1.5. Qeyri-müəyyən əmsallar üsulu

Bu üsul, adətən, dəyişən əmsallı xətti diferensial tənliklərin həlli üçün tətbiq edilir. Üsulun mahiyyətinə $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$ başlanğıc şərtlərini ödəyən iki tərtibli

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

diferensial tənliklər üçün şərh edək. Fərz edək ki, tənliyin əmsallarından hər birini x -in qüvvətlərinə görə sıraya ayırmaq mümkündür:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \,, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \,, \quad r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n \,. \qquad (6.13)$$

Bu tənliyin həllini

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (6.14)$$

sırası şəklində axtaraq, burada c_n – məchul əmsallardır.

(6.14) bərabərliyinin hər iki tərəfini 2 dəfə diferensiallayaq:

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot nx^{n-1}, \qquad y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n(n-1)x^{n-2}.$$

$y, y', y'', p(x),\ q(x),\ r(x)$ üçün sıraları ilkin tənlikdə nəzərə alsaq,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$$

olar. İndi sıraların vurulmasını yerinə yetirərək, axırıncı bərabərliyin sağ və sol tərəflərində x-in eyni qüvvətlərinin əmsallarını bərabərləşdirərək, c_n məchullarına nəzərən sistem alırıq:

$$x^0: \quad 2c_2 + c_1 p_0 + c_0 q_0 = r_0$$

$$x^1: \quad 3\cdot 2c_3 + 2c_2 p_0 + c_1 p_1 + c_1 q_0 + c_0 q_1 = r_1$$

$$x^2: \quad 4\cdot 3c_4 + 3c_3 p_0 + 2c_2 p_1 + c_1 p_2 + c_2 q_0 + c_1 q_1 + c_0 q_2 = r_2$$

....

Bir halda ki, $p(x), q(x), r(x)$ funksiyalarının ayrılışları tapılmışdır, p_n, q_n, r_n kəmiyyətləri məlumdur. Sistemin hər bir tənliyində əvvəlki ilə müqayisədə bir məchul çoxdur. c_0, c_1 əmsalları başlanğıc şərtlərindən təyin edilir, qalan bütün əmsallar isə ardıcıl olaraq axırıncı sistemdən tapırlar.

Qeyd 1. Əgər (6.13) sıraları $|x| < R$ olduqda yığılırlarsa, onda alınmış (6.14) sırası həmin oblastda yığılır və tənliyin həllidir.

Qeyd 2. Əgər başlanğıc şərtlər $x = x_0$ olduqda verilmişdirsə, $x - x_0 = t$ əvəzləməsi ilə onu yuxarıda baxılan məsələyə gətirmək

olar.

Qeyd 3. Bir çox hallarda diferensial tənliyi qeyri-müəyyən əmsallar üsulu ilə həll edərkən sıranın əmsalları üçün ümumi şəkildə ifadə tapmaq olur.

6.1.6. Kiçik parametr (daxil edilməsi) üsulu

Praktikada bəzən kiçik parametrləri olan diferensial tənliklərin həlləri ilə məşğul olmaq lazım gəlir. Məsələn, bunlara

$$y'' + y + \varepsilon y^3 = 0$$

Dyuffinq tənliyi daxildir. Bu tənlik transformator olan elektrik dövrəsində gərginliyi təsvir edir. ε kiçik parametri ölçüsüz kəmiyyətdir, sistemin qeyri-xəttilik dərəcəsini xarakterizə edir.

Van-der-Pol tənliyi də kiçik parametri olan diferensial tənlikdir:

$$y'' + \omega^2 y = \varepsilon(1 - y^2)y'.$$

Kiçik parametrləri olan diferensial tənliklərin dəqiq həllini tamaq mümkün deyil. Ona görə bu tənliklərin təqribi inteqrallanması məsələsinə baxılır.

Parametrləri özündə saxlayan diferensial tənliklər üçün təqribi həllin tapılmasının ən geniş yayılmış üsulu kiçik parametr üsulu və ya həyəcanlandırmalar üsuludur.

Bu üsulun mahiyyəti diferensial tənliyin və ya diferensial tənliklər sistemin təqribi həllinin hər hansı sıranın kiçik parametrin qüvvətlərinə görə qismən cəmləri şəklində axtarılmasından ibarətdir. Bu sıranın bütün hədlərini müəyyən etmək vacib deyil. Praktikada sıranın 2-3 həddini tapmaq, amma sonra ε parametrinin kiçikliyindən istifadə edərək, tapılmış hədlərin cəminin ilkin tənliyin dəqiq həllindən az fərqləndiyini isbat etmək kifayətdir.

Misal 6.3.

Diferensial tənliyin həllinin ε kiçik parametrinin qüvvətlərinə görə sıraya ayrılmasının 3 həddini tapmaq tələb olunur.

$$y' = \frac{x}{1+\varepsilon xy}, \quad y(0) = 0 .$$

Həlli. Tənliyin həllini

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots$$

sırası şəklində axtaraq.

$\varepsilon = 0$ olduqda diferensial tənliyin həlli

$$y' = x \quad \Rightarrow \quad y = x^2/2 + C$$

olar. Başlanğıc şərtləri nəzərə almaqla $C = 0 \Rightarrow y = x^2/2$. Onda sıranın birinci həddi $y_0(x) = x^2/2$ -yə bərabər olacaq.

Diferensial tənliyi $y'(1+\varepsilon xy) = x$ şəklində yazıb və $y(x)$ ayrılışına görə alınmış cəmdə ε^2 toplananlarını saxlasaq, nəticədə

$$x + y_1'\varepsilon + y_2'\varepsilon^2 + \frac{x^4}{2}\varepsilon + y_1'\frac{x^3}{2}\varepsilon^2 + y_1 x^2\varepsilon^2 + \ldots - x = 0$$

olduğunu alırıq. ε -nun eyni qüvvətlərində əmsalları bərabərləşdirsək,

$$\varepsilon: \quad y_1' + x^4/2 = 0 \Rightarrow y_1(x) = -x^5/10,$$

$$\varepsilon^2: \quad y_2' + y_1' \cdot x^3/2 + x^2 y_1 = 0 \Rightarrow y_2'(x) = 7x^7/20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2(x) = 7x^8/160$$

alarıq.

Nəticədə

$$y(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{10}\varepsilon + \frac{7x^8}{160}\varepsilon^2 + \ldots$$

olar.

6.2. Diferensial tənliklərin ədədi həll üsulları

Məlumdur ki, bir çox diferensial tənliklərin dəqiq həllini həmişə tapmaq olmur və bəzi diferensial tənliklərin dəqiq həllinin tapılması vacib deyil. Bu hallarda, diferensial tənliklərin təqribi, xüsusən ədədi həlli axtarılır.

Ədədi üsullar, diferensial tənliyin həllini məchul dəyişənin müəyyən bir sıra qiymətləri üçün axtarılan funksiyanın qiymətlərini cədvəl şəklində təsvir etməyə imkan verir.

Tutaq ki, $y' = f(x, y)$, $y_0 = y(x_0)$ Koşi məsələsini həll etmək tələb olunur. Bu məsələni həll etmək üçün x dəyişəninin düyün qiymələrini (düyün nöqtələrini) x_m $(m = \overline{0,n})$ ilə, y_m ilə isə axtarılan funksiyanın x_m düyün nöqtələrindəki qiymətlərini işarə edək və diferensial tənliyi

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx$$

inteqral tənliyi şəklində yazaq, burada $y(x)$ axtarılan funksiyadır və Koşi məsələsinin dəqiq həllidir. Axırıncı tənliyin köməyi ilə axtarılan $y(x)$ funksiyasının x_m, x_{m+1} düyün nöqtələrində qiymətlərini tapaq:

$$y_m = y(x_m) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_m} f(x, y)dx,$$

$$y_{m+1} = y(x_{m+1}) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_{m+1}} f(x, y)dx,$$

İkinci tənlikdən birincini tərəf-tərəfə çıxsaq,

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x,y)dx \qquad (6.15)$$

bərabərliyi alınar.

Bir qayda olaraq, Koşi məsələnin ədədi həll üsulları yalnız alınmış (6.15) bərabərliyinin sağ tərəfindəki inteqralın təqribi hesablaması üsulları ilə fərqlənir.

Diferensial tənliyin ədədi həll üsullarından onların Runqe-Kutta üsulları ümumi adı altında tanınan geniş yayılmış üsullarını nəzərdən keçirək.

Runqe-Kutta üsulları aşağıdakı fərqli xüsusiyyətlərə malikdir:

1) üsullar bir addımlıdır, yəni y_{m+1}-i tapmaq üçün yalnız əvvəlki (x_m, y_m) nöqtəsi istifadə edilir;

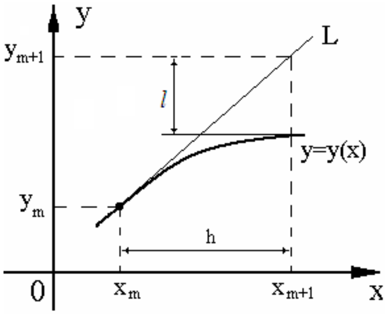
2) onlar h^p tərtibli hədlərinə qədər Teylor sırası ayrılışına uyğun gəlirlər, burada p qüvvət üstü müxtəlif üsullar üçün müxtəlifdir və ***üsulun tərtibi*** adlanır;

3) $f(x, y)$ funksiyasının törəmələrinin hesablanması lazım olmur, yalnız funksiyanın özünün bir neçə dəfə x və y-in müxtəlif qiymətlərində hesablanması lazım olur.

6.2.1. Eyler üsulu (sınıq xətlər üsulu)

Eyler üsulu adi diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsinin ən sadə ədədi həll üsuludur. Üsulun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, axtarılan inteqral əyrisi, xüsusi həllin qrafiki olan, sınıq xətt ilə əvəz olunur.

Tutaq ki, axtarılan əyri üzərində (x_m, y_m) nöqtəsi məlumdur. Bu nöqtədən meyl bucağının tangensi $y'_m = f(x_m, y_m)$-ə bərabər olan bir düz xətt keçirək. $y = y(x)$ əyrisi, məlum olmayan, dəqiq həlli təsvir edir. Ona görə də (x_{m+1}, y_{m+1}) nöqtəsini növbəti həll nöqtəsi hesab etmək olar.



L düz xəttinin tənliyindən

$$y = y_m + y'_m(x - x_m),$$

$$y'_m = f(x_m, y_m) \text{ və } x_{m+1} = x_m + h,$$

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m) \qquad (6.16)$$

olar.

(6.16) düsturü, h $(p = 1)$ tərtibli hədlərinə qədər Teylor sırası ayrılışına uyğun gələn, təqribi həlli verən Eyler üsulunu ifadə edir, belə ki, hesablamaların xətasının tərtibi h^2 -na bərabərdir və şəkildə l parçası şəklində göstərilmişdir. Buna görə üsul bir tərtibli Runqe-Kutta üsullardan biridir. Şəkildə göstərilmişdir ki, (x_m, y_m) nöqtəsi $y = y(x)$ əyrisi üzərində yerləşir, həqiqətdə, əlbəttə ki, $y_m -$ təqribi qiymətdir və əyri üzərində yerləşmir (inteqral əyrisi üzərində yalnız başlanğıc (x_0, y_0) nöqtəsi yerləşir).

(6.16) düsturünda $m = 0,1,2,\ldots$ götürməklə ardıcıl olaraq $y_1, y_2, y_3, \ldots$ kəmiyyətləri tapılır. Bu qiymətlərdən istifadə edərək, (x_0, y_0) nöqtəsindən keçən, inteqral əyrisini təqribi təsvir edən Eyler sınıq xətti qurulur.

Eyler üsulu həndəsi mənası ondan ibarətdir ki, (x_0, y_0) nöqtəsindən inteqral əyrisi deyil, ona toxunanın parçası keçirilir və x_0 -dan $x_1 = x_0 + h$ -a qədər olan parça təqribən inteqral əyrisi qəbul edilir. Bundan sonra başlanğıc nöqtə olaraq (x_1, y_1) götürülür və növbəti sınıq xətt parçası qurulur və s.

Bu üsul aşağı dəqiqliyə malikdir və xəta başlanğıc nöqtəsindən uzaqlaşdıqca (səhvlərin sistematik yığılması) artır. Əgər sağ tərəf $f(x,y)$ $R=\{|x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b\}$ düzbucaqlısında

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le N|y_2-y_1| \quad (N=const),$$

$$\left|\frac{df}{dx}\right|=\left|\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right|\le M \quad (M=const)$$

şərtlərini ödəyirsə, onda üsulun xətası

$$|y(x_m)-y_m|\le\frac{hM}{2N}\left((1+hN)^m-1\right)$$

şəklində qiymətləndirilir.

Eyler üsulu y_m-dən y_{m+1}-ə hər dəfə keçdikdə $\propto h^2$ xətası əmələ gətirir, lakin, cədvəlin sonunda xətaların toplanması baş verir, onda qlobal xəta $\propto h$ olur.

Qeyd. Üsulun işçi düsturu başqa cür alına bilər, yəni (6.15) düsturunda $[x_m,x_{m+1}]$ parçasında inteqralaltı funksiya sabit $f(x_m,y_m)-$ sıfır tərtibli çoxhədli hesab edilir ki, bu da inteqralın sol düzbucaqlılar düsturu ilə aproksimasiyasına uyğundur. İnteqral asan hesablanır. Nəticədə

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x_m,y_m)dx=f(x_m,y_m)h+O\left(h^2\right),$$

və ya

$$y_{m+1}=y_m+hf\left(x_m,y_m\right)$$

alınır.

Misal 6.4.

Eyler üsulundan istifadə etməklə, $y' = y - 2x/y$ diferensial tənliyinin $y(0) = 1$ başlanğıc şərtini ödəyən həllinin $[0;1]$ parçasında $h = 0,2$ addımı ilə qiymətlər cədvəlini tərtib etməli.

Həlli. Hesablamaların nəticələri cədvəldə verilmişdir. Cədvəlin birinci sətirində $m = 0$ olduqda $x_0 = 0$, $y_0 = 1,0000$ başlanğıc qiymətləri yazılır və onlara görə

$$f(x_0, y_0) = 1,$$

sonra isə

$$\Delta y_0 = hf(x_0, y_0) = 0,2$$

hesablanır. Onda $m = 0$ olduqda

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0,2 = 1,2$$

alınır.

$m = 1$ olduqda $x_1 = 0,2$, $y_1 = 1,2000$ qiymətləri ikinci sətirdə yazılır. Onları istifadə etməklə,

$$f(x_1, y_1) = 0,8667,$$

sonra

$$\Delta y_1 = hf(x_1, y_1) = 0,2 \cdot 0,8667 = 0,1733$$

hesablamaq olar. Beləliklə,

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1,2 + 0,1733 = 1,3733$$

alınır.

$m = 2, 3, 4, 5$ olduqda hesablamalar analoji qaydada aparılır.

Cədvəlin axırıncı sütununda müqayisə üçün həllin dəqiq qiymətləri verilmişdir. Cədvəldən görünür ki, y_5-in mütləq xətası $\Delta = 0,0917$, yəni nisbi xəta $\delta = 5\%$.

m	x_m	y_m	$2x_m/y_m$	$y_m - 2x_m/y_m$	Δy_m	$y=\sqrt{2x+1}$
0	0	1,0000	0	1,0000	0,2000	1,0000
1	0,2	1,2000	0,3333	0,8667	0,1733	1,1832
2	0,4	1,3733	0,5928	0,7805	0,1561	1,3416
3	0,6	1,5294	0,7846	0,7458	0,1492	1,4832
4	0,8	1,6786	0,9532	0,7254	0,1451	1,6124
5	1,0	1,8237				1,7320

6.2.2. Diferensial tənliklər sistemi üçün Eyler üsulu

Bir tərtibli

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t,x,y), \quad x(t_0)=x_0, \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t,x,y), \quad y(t_0)=y_0 \end{cases}$$

diferensial tənliklər sistemi üçün Koşi məsələsinə baxaq.

Bu diferensial tənliklər sisteminin $[t_0;t_0+a]$ parçasında təqribi ədədi həllinin tapılması üçün də, alqoritm şəklində yerinə yetirilən, Eyler üsulundan istifadə etmək olar:

1) $[t_0;t_0+a]$ parçasının bölgü nöqtələrinin sayı n verilir və $h=\dfrac{a}{n}$ addımı hesablanır.

Burada t_0, x_0, y_0 kəmiyyətləri məlumdur.

2) Tutaq ki, t_m, x_m, y_m hesablanmışdır. Bu qiymətləri sistemin tənliklərinin sağ tərəfində nəzərə almaqla, $f_1(t_m, x_m, y_m)$, $f_2(t_m, x_m, y_m)$ tapılır və

$$x_{m+1}=x_m+hf_1(t_m,x_m,y_m),$$

$$y_{m+1}=y_m+hf_2(t_m,x_m,y_m),$$

$$t_{m+1}=t_m+h$$

hesablanır. Əgər $m+1=n$ $[t_{m+1}=t_0+a]$ olarsa, proses sona çatmış hesab olunur. $x_0,x_1,\ldots,x_n$ və $y_0,y_1,\ldots,y_n$ ədədləri diferensial tənliklər sisteminin axtarılan həllinin $t_0,t_1,\ldots,t_n$ nöqtələrində təqribi qiymətləridir.

Eyler üsulunu yüksək tərtibli diferensial tənliklər üçün də tətbiq etmək olar.

$$y''=f(x,y,y'),$$

$$y(x_0)=y_0,$$

$$y'(x_0)=y'_0$$

Koşi məsələsi $y'=z$, $y''=z'$ əvəzetmələrini köməyi ilə baxılan məsələyə gətirilir. İki tərtibli diferensial tənlik bir tərtibli

$$\begin{cases} y'=z \\ z'=f(x,y,z) \end{cases}$$

diferensial tənliklər sisteminə gətirilir, başlanğıc şərtlər isə

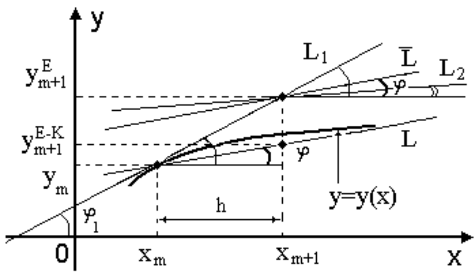
$$y(x_0)=y_0,$$

$$z(x_0)=z_0$$

şərtlərinə keçir.

Tənliklərinin sayı 3 və daha çox olan bir tərtibli diferensial tənliklər sisteminə və daha yüksək tərtibli diferensial tənliklərə Eyler üsulu analoji qayda ilə tətbiq olunur.

6.2.3. Eyler-Koşi üsulu (Eylerin düzəldilmiş üsulu)



Bu üsul iki tərtibli Runqe-Kutta üsulları qrupuna aiddir. Bu üsulda iki (x_m, y_m), $(x_m + h, y_m + hy'_m)$ nöqtələri üçün toxunanın meyl bucağının orta tangensi tapılır. İkinci nöqtə Eyler üsulunda (x_{m+1}, y_{m+1}) ilə işarə olunan nöqtədir. Eyler üsulu ilə L_1 düz xətti üzərində yerləşən (x_{m+1}, y^E_{m+1}) nöqtəsi təyin edilir. Bu nöqtədə toxunanın meyl bucağının tangensi yenidən hesablanır. Bu qiymətə L_2 düz xətti uyğun gəlir. Tangenslərin ortalaması $\overline{L}$ düz xəttini verir. Həhayət (x_m, y_m) nöqtəsindən $L \,//\, \overline{L}$ düz xətti keçirilir.

L düz xəttinin $x = x_{m+1}$ düz xətti ilə kəsişdiyi (x_{m+1}, y^{E-K}_{m+1}) nöqtəsi axtarılan nöqtə olacaq. $\overline{L}$ və L düz xətlərinin φ meyl bucağının tangensi:

$$tg\varphi = \frac{1}{2}\big(f(x_m, y_m) + f(x_m + h; y_m + hy'_m)\big), \qquad (6.17)$$

burada

$$y'_m = f(x_m, y_m)\ . \qquad (6.18)$$

L düz xəttinin tənliyi $y = y_m + (x - x_m)\cdot tg\varphi$ şəklində yazılır, onda

$$y_{m+1} = y_m + h\cdot tg\varphi\,. \qquad (6.19)$$

(6.17), (6.18), (6.19) münasibətləri Eylerin ***düzəldilmiş*** üsulunu təyin edirlər. Üsulun işçi düsturu

$$y_{m+1}^{E-K} = y_m + \frac{1}{2}\big(f(x_m, y_m) + f(x_m + h; y_m + hy'_m)\big) \qquad (6.20)$$

şəklindədir.

Qeyd. Əgər (6.15) düsturunda $[x_m, x_{m+1}]$ parçasında inteqralaltı $f(x,y)$ funksiyası bir dərəcəli çoxhədli ilə interpolyasiya edilərsə, yəni

$$f(x,y) \approx f(x_m; y_m) + \frac{f\left(x_{m+1}; y_{m+1}^E\right) - f(x_m; y_m)}{h}(x - x_m)$$

olarsa (burada y_{m+1}^E – Eyler üsulu ilə təyin olunan qiymətdir), onda (6.15) düsturunun sağ tərəfindəki inteqralı hesablamaqla,

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x_m, y_m)dx = \frac{h}{2}\big(f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1})\big) + O(h^3),$$

(trapesiyalar düsturu)

$$y_{m+1}^{E-K} = y_m + \frac{h}{2}\left(f(x_m, y_m) + f\left(x_{m+1}, y_{m+1}^E\right)\right)$$

alınar.

Misal 6.5.

Eyler-Koşi üsulundan istifadə etməklə, $y' = y - 2x/y$ diferensial tənliyinin $y(0) = 1$ başlanğıc şərtini ödəyən həllinin [0;1] parçasında $h = 0{,}2$ addımı ilə qiymətlər cədvəlini tərtib etməli.

Həlli. Hesablamaların nəticələri cədvəldə verilmişdir. Cədvəlin birinci sətirində $m = 0$ və $x_0 = 0$, $y_0 = 1{,}0000$ başlanğıc qiymətləri yazılır və $f_0 = f(x_0, y_0) = 1$ hesablanır. (6.16) düsturu ilə $y_1^E = 1 + 0{,}2 \cdot 1 = 1{,}2$ hesablayırlar və birinci sətirin növbəti sütunlarına $hf_0/2 = 0{,}1$, $x_1 = 0{,}2$, $y_1^E = 1{,}2$ qiymətlərini yazırlar. Sonra $hf\left(x_1, y_1^E\right)/2 = 0{,}1 \cdot (1{,}2 - 0{,}4/1{,}2) = 0{,}0867$ tapırlar və (6.20) düsturu ilə

$$\Delta y_0 = \frac{h}{2}\left(f(x_0, y_0) + f\left(x_1, y_1^E\right)\right) = 0{,}1 + 0{,}0867 = 0{,}1867\,;$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1867 = 1{,}1867$$

alırlar. Bundan sonra cədvəlin ikinci sətiri tərtib olunur: $m = 1$, $x_1 = 0{,}2$, $y_1 = 1{,}1867$. Sonra

$$f_1 = f(x_1, y_1) = 1{,}1867 - 0{,}4/1{,}1867 = 0{,}8497,$$

$$y_2^E = 1{,}1867 + 0{,}1699 = 1{,}3566$$

tapırlar və ikinci sətirin növbəti sütunlarına $hf_1/2 = 0{,}0850$, $x_2 = 0{,}4$, $y_2^E = 1{,}3566$ yazırlar. Alınmış x_2, y_2^E qiymətlərini istifadə etməklə, $hf\left(x_2, y_2^E\right)/2 = 0{,}0767$ hesablayırlar və (6.20) düsturu ilə

$$\Delta y_1 = \frac{h}{2}\left(f(x_1, y_1) + f\left(x_2, y_2^Э\right)\right) = 0{,}0850 + 0{,}0767 = 0{,}1617\,;$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1{,}1867 + 0{,}1617 = 1{,}3484\,.$$

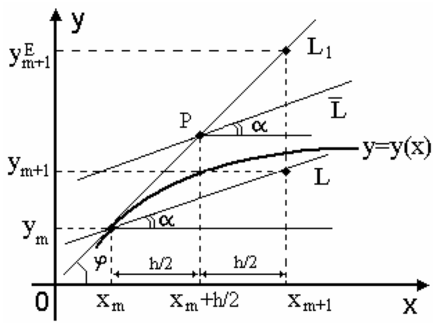
hesablanılır.

$m = 2, 3, 4, 5$ olduqda da cədvəlin doldurulması analoji qaydada aparılır.

m	x_m	y_m^{E-K}	$hf_m/2$	x_{m+1}	y_{m+1}^E	$hf\left(x_{m+1}, y_{m+1}^E\right)/2$	Δy_m
0	0	1,0000	0,1	0,2	1,2	0,0867	0,1867
1	0,2	1,1867	0,0850	0,4	1,3566	0,0767	0,1617
2	0,4	1,3484	0,0755	0,6	1,4993	0,0699	0,1454
3	0,6	1,4938	0,0690	0,8	1,6180	0,0651	0,1341
4	0,8	1,6272	0,0645	1,0	1,7569	0,0618	0,1263
5	1,0	1,7542					

6.2.4. Modifikasiya olunmuş (dəyişilmiş) Eyler üsulu

Qurulması əvvəlki şəkildəki kimi eyni olan şəkilə baxaq. Belə ki, (x_m, y_m) nöqtəsindən əyilmə bucağının tangensi $y'_m = f(x_m, y_m)$ -ə bərabər olan L_1 düz xətti keçirilmişdir. L_1 və $x = x_m + h/2$



düz xəttlərinin kəsişməsindəki koordinatları $\left(x_m + \frac{h}{2}; y_m + \frac{h}{2} y'_m\right)$ olan P nöqtəsində toxunan düz xəttin əyilmə bucağının tangensi

$$tg\alpha = f\left(x_m + \frac{h}{2}; y_m + \frac{h}{2} y'_m\right) \tag{6.21}$$

olar, burada $y'_m = f(x_m, y_m)$. Bu $\overline{L}$ düz xəttidir. Sonra (x_m, y_m) nöqtəsindən $L // \overline{L}$ düz xətti keçirmək lazımdır. L düz xətti ilə $x = x_{m+1}$ düz xəttinin kəsişməsi axtarılan (x_{m+1}, y_{m+1}) nöqtəsini verəcək. L düz xəttinin tənliyini $y = y_m + (x - x_m)tg\alpha$ şəklində yazsaq, buradan

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot tg\alpha \tag{6.22}$$

olar.

(6.21)-i (6.22)-də nəzərə almaqla, dəyişilmiş Eyler üsulunun işçi düsturu alınır:

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot f\left(x_m + \frac{h}{2};\ y_m + \frac{h}{2} f(x_m, y_m)\right). \tag{6.23}$$

Dəyişilmiş Eyler üsulu da iki tərtibli Runqe-Kutta üsuludur.

Qeyd. Əgər (6.15) düsturunda $[x_m, x_{m+1}]$ parçasında inteqralaltı $f(x, y)$ funksiyası onun orta nöqtədə $x_{m+1/2} = x_m + h/2$, $y_{m+1/2} = y_m + h/2$ qiyməti ilə interpolyasiya edilərsə, yəni $f(x, y) \approx f(x_{m+1/2}; y_{m+1/2})$, onda inteqralı hesablamaqla, modifikasiya olunmuş Eyler üsulunu almış olarıq:

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x_m, y_m)dx = hf\left(x_{m+1/2}, y_{m+1/2}\right) + O\left(h^3\right),$$

(orta düzbucaqlılar üsulu)

$$y_{m+1} = y_m + hf\left(x_{m+1/2}; y_{m+1/2}\right).$$

Burada Koşi məsələsinin həllinə inteqralın hesablanması kimi baxılır, buna görə də üsulun xətası hesablama oblastının bölündüyü bütün elementar parçalar üçün istifadə edilən kvadratur düsturların lokal xətalarının cəmindən artıq deyil. Yaxşılaşdırılmış Eyler üsullarının qalıq hədləri tərtibi $O\left(h^3\right)$ olur.

Misal 6.6.

Modifikasiya olunmuş Eyler üsulundan istifadə etməklə, $y' = y - 2x/y$ diferensial tənliyinin $y(0) = 1$ başlanğıc şərtini ödəyən həllinin [0;1] parçasında $h = 0{,}2$ addımı ilə qiymətlər cədvəlini tərtib etməli.

Həlli.

Hesablamaların nəticələri cədvəldə verilmişdir. Cədvəlin birinci sətirində $m = 0$ və $x_0 = 0$, $y_0 = 1{,}0000$ başlanğıc qiymətləri yazılır və $f_0 = f\left(x_0, y_0\right) = 1$ hesablanır. Onda (6.16) düsturu ilə $x_{m+1/2} = 0{,}1$ olduqda $y_{m+1/2} = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$ alınır. Sonra

$$f\left(x_{m+1/2}, y_{m+1/2}\right) = 0{,}9182$$

və

$$\Delta y_0 = hf\left(x_{m+1/2}, y_{m+1/2}\right) = 0{,}2 \cdot 0{,}9182 = 0{,}1836$$

tapılır.

(6.23) düsturuna əsasən

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1836 = 1{,}1836$$

alınır. Bu nəticədən istifadə etməklə, cədvəlin ikinci sətiri doldurulur: $m = 1$, $x_1 = 0{,}2$, $y_1 = 1{,}1867$ və $hf\left(x_1, y_1\right)/2 = 0{,}0846$ tapırlar. Sonra $x_{3/2} = 0{,}3$ olduqda (6.16) düsturu ilə

$$y_{3/2} = 1{,}1836 + 0{,}0846 = 1{,}2682$$

tapılır.

$$f(x_{3/2}, y_{3/2}) = 0{,}7942,$$

$$\Delta y_1 = h\,f(x_{3/2}, y_{3/2}) = 0{,}2 \cdot 0{,}7942 = 0{,}1590$$

hesablanır. (6.23) düsturuna əsasən

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1{,}1836 + 0{,}1590 = 1{,}3426$$

alınır.

$m = 2, 3, 4, 5$ olduqda da cədvəlin doldurulması analoji qaydada aparılır.

m	x_m	y_m	$hf_m/2$	$x_{m+1/2}$	$y_{m+1/2}$	Δy_m	$y = \sqrt{2x+1}$
0	0	1,0000	0,1	0,1	1,1	1,0000	1,0000
1	0,2	1,1836	0,0846	0,3	1,2682	1,1832	1,1832
2	0,4	1,3426	0,0747	0,5	1,4173	1,3416	1,3416
3	0,6	1,4850	0,0677	0,7	1,5527	1,4832	1,4832
4	0,8	1,6152	0,0625	0,9	1,6777	1,6124	1,6124
5	1,0	1,7362				1,7320	1,7320

6.2.5. Diferensial tənliklər sistemi üçün modifikasiya olunmuş Eyler üsulu

Tutaq ki, h inteqrallama addımı ilə

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(t, x, y), & x(t_0) = x_0 \\ \dot{y}(t) = f_2(t, x, y), & y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Koşi məsələsini həll etmək tələb olunur.

Təqribi ədədi həllin modifikasiya olunmuş Eyler üsulu ilə hesablanması aşağıdakı rekurrent düsturlarla həyata keçirilir:

$$t_{k+1/2} = t_k + \frac{h}{2},$$

$$x_{k+1/2} = x_k + \frac{h}{2} f_1(t_k, x_k, y_k), \quad y_{k+1/2} = y_k + \frac{h}{2} f_2(t_k, x_k, y_k),$$

$$\alpha_k = f_1(t_{k+1/2}, x_{k+1/2}, y_{k+1/2}), \quad \beta_k = f_2(t_{k+1/2}, x_{k+1/2}, y_{k+1/2}),$$

$$t_{k+1} = t_k + h, \quad x_{k+1} = x_k + \alpha_k h, \quad y_{k+1} = y_k + \beta_k h$$

6.2.6. Dörd tərtibli Runqe-Kutta üsulu

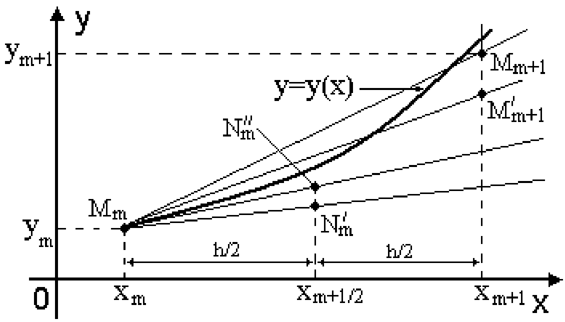
Dörd tərtibli Runqe-Kutta üsulu diferensial tənliyin yüksək dəqiqlikli ədədi həlli üçün ən çox istifadə edilən üsuldur. Bu üsul o dərəcədə geniş şəkildə istifadə olunur ki, üsul adətən "Runqe-Kutta üsulu" adlandırılır.

Həndəsi olaraq $y' = f(x, y)$, $y_0 = y(x_0)$ Koşi məsələsi üçün bu üsul da ondan ibarətdir ki, kiçik $[x; x+h]$ parçasında $y = y(x)$ inteqral əyrisi $(x, y(x))$ nöqtəsindən keçən düz xətt parçası ilə əvəz olunur. Bununla belə, üsul, əvvəlki üsullara nisbətən, daha incə bir yanaşmaya – bu düz xətt parçasının istiqamətini müəyyənləşdirməyə əsaslanır.

Tutaq ki, $[x_0; x_0 + a]$ parçası

$$x_0, x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n = x_0 + a \quad (x_{m+1} - x_m = h)$$

nöqtələri ilə n sayda bərabər hissələrə bölünmüşdür və uyğun nöqtələrdə diferensial tənliyin həllinin təqribi qiymətləri müəyyən edilmişdir.



$[x_m; x_{m+1}]$ parçasında məlum olan $y_m = y(x_m)$ qiymətinə görə y_{m+1} qiymətini tapaq.

1. $M(x_m, y_m)$ nöqtəsində inteqral əyrisinə toxunanın

$$k_{1m} = f(x_m; y_m) \tag{6.24}$$

bucaq əmsalını, $y - y_m = k_{1m}(x - x_m)$ və $x = x_m + h/2$ düz xəttlərinin kəsişmə nöqtəsini, yəni $N'_k\left(x_m + \frac{h}{2};\ y_m + \frac{h}{2} \cdot k_{1m}\right)$ nöqtəsini təyin edirik.

2. N'_m nöqtəsində toxunanın bucaq əmsalını tapırıq:

$$k_{2m} = f\left(x_m + \frac{h}{2};\ y_m + \frac{h}{2} \cdot k_{1m}\right). \tag{6.25}$$

M_m nöqtəsindən, $x = x_m + h/2$ düz xətti ilə kəsişməyə qədər, bucaq əmsalı k_{2m} olan $y - y_m = k_{2m}(x - x_m)$ düz xəttini keçiririk, nəticədə $N''_m\left(x_m + \frac{h}{2}; y_m + \frac{h}{2} \cdot k_{2m}\right)$ nöqtəsini alırıq.

3. N''_m nöqtəsində toxunanın bucaq əmsalını tapırıq:

$$k_{3m} = f\left(x_m + \frac{h}{2};\ y_m + \frac{h}{2} \cdot k_{2m}\right). \tag{6.26}$$

M_m nöqtəsindən, $x = x_m + h$ düz xətti ilə kəsişməyə qədər, bucaq əmsalı k_{3m} olan $y - y_m = k_{3m}(x - x_m)$ düz xəttini keçiririk, nəticədə $M'_{m+1}(x_m + h; y_m + hk_{3m})$ nöqtəsini alırıq.

4. M'_{m+1} nöqtəsində toxunanın bucaq əmsalını tapırıq:

$$k_{4m} = f(x_m + h; y_m + hk_{3m}). \tag{6.27}$$

Nəhayət, məsələnin təqribi həllini əks etdirən sınıq xətt parçasının istiqamətini k_m -ə bərabər götürürük:

$$k_m = \frac{1}{6}(k_{1m} + 2k_{2m} + 2k_{3m} + k_{4m}) \tag{6.28}$$

və M_m nöqtəsindən, $x = x_m + h$ düz xətti ilə $M(x_{m+1}, y_{m+1}) = M_{m+1}$ nöqtəsində kəsişməyə qədər

$$y - y_m = k_m(x - x_m)$$

düz xəttini keçiririk, burada

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot k_m \tag{6.29}$$

həllin $x_{m+1} = x_m + h$ nöqtəsində təqribi qiyməti hesab edilir.

Üsulun lokal və qlobal (bütün inteqrallama parçasında) xətaları uyğun olaraq h^5 və h^4 tərtibləri ilə xarakterizə olunur.

Qeyd edək ki, bir nöqtədən digərinə keçdikdə hesablama addımı dəyişdirilə bilər. h adımının seçilməsinə nəzarət etmək üçün

$$\theta = \left| \frac{k_{2m} - k_{3m}}{k_{1m} - k_{2m}} \right|$$

kəsrinin qiymətini hesabladıqda alınan qiymət yüzdə birləri aşmamalıdır. Əks halda addımı kiçiltmək lazımdır. Xətanın kobud qiymətləndirilməsini

$$\left| y_m^* - y(x_m) \right| \approx \left| y_m^* - y_m \right| / 15$$

düsturuna görə ikiqat hesablamanın köməyi ilə almaq olar, burada $y(x_m)$ – diferensial tənliyin x_m nöqtəsində dəqiq həlli, y_m^*, y_m – uyğun olaraq $h/2, h$ addımı ilə alınmış təqribi qiymətlərdir.

Misal 6.7.

Dörd tərtibli Runqe-Kutta üsulu ilə

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1$$

Koşi məsələsini $[0; 0{,}4]$ parçasında $h = 0{,}1$ addımı ilə həll etməli.

Həlli.

$f(x, y) = x + y$, onda (6.24) (6.29) düsturlarına uyğun olaraq alırıq:

$$x_{m+1} = x_m + h,$$

$$k_{1m} = h \cdot \left(x_m + y_m \right),$$

$$k_{2m} = h \cdot \left(x_m + h/2 + y_m + k_{1m}/2 \right),$$

$$k_{3m} = h \cdot \left(x_m + h/2 + y_m + k_{2m}/2 \right),$$

$$k_{4m} = h \cdot (x_m + h + y_m + k_{3m}),$$

$$\Delta y_m = \frac{1}{6} \cdot (k_{1m} + 2k_{2m} + 2k_{3m} + k_{4m}),$$

$$y_{m+1} = y_m + \Delta y_m, \quad (m = 0,1,2,3).$$

$x_0 = 0,\ y_0 = 1$ götürməklə, y_1-in qiymətini tapırıq:

$m = 0, \quad x_1 = x_0 + h = 0 + 0{,}1 = 0{,}1$

$$k_{10} = h \cdot (x_0 + y_0) = 0{,}1 \cdot (0 + 1) = 0{,}1$$

$$k_{20} = h \cdot \left(x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{1}{2} k_{10} \right) = 0{,}1 \cdot (0 + 0{,}05 + 1 + 0{,}05) = 0{,}11$$

$$k_{30} = h \cdot \left(x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{1}{2} k_{20} \right) = 0{,}1 \cdot (0 + 0{,}05 + 1 + 0{,}055) = 0{,}1105$$

$$k_{40} = h \cdot (x_0 + h + y_0 + k_{30}) = 0{,}1 \cdot (0 + 0{,}1 + 1 + 0{,}1105) = 0{,}12105$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} \cdot (k_{10} + 2k_{20} + 2k_{30} + k_{40}) =$$

$$= \frac{1}{6}(0{,}1 + 2 \cdot 0{,}11 + 2 + 0{,}1105 + 0{,}12105) \approx 0{,}110342$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}110342 = 1{,}110342.$$

Sonra, hər addımda ədədi həllərin y_m qiymətlərini hesablanılır, bütün hesablamaların nəticələriniə əsasən cədvəl tərtib edilir:

m	x_m	k_{1m}	k_{2m}	k_{3m}	k_{4m}	Δy_m	y_m
0	0,1	0,100000	0,110000	0,110500	0,121050	0,110342	1,110342
1	0,2	0,121034	0,132086	0,132638	0,144298	0,132463	1,242805
2	0,3	0,144281	0,156495	0,156495	0,169991	0,156912	1,399717
3	0,4	0,169972	0,183470	0,183470	0,198386	0,183931	1,583648

Alınmış həllin xətası 0,000001-i aşmır.

Baxılan Koşi məsələsinin müxtəlif üsullarla ədədi həlləri müqayisə üçün aşağıdakı cədvəldə verilmişdir.

m	x_m	Eyler üsulu	Eyler-Koşi üsulu	Runqe-Kutta üsulu	Dəqiq həll $y(x)=2e^x-x-1$
0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0
1	0,1	1,1	1,11	1,110342	1,110342
2	0,2	1,22	1,24205	1,242805	1,242805
3	0,3	1,362	1,398465	1,399717	1,399718
4	0,4	1,5282	1,581804	1,583648	1,583649

6.2.7. İkinci tərtib diferensial tənlik üçün Runqe-Kutta üsulu

$y''=f(x,y,y')$, $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$ Koşi məsələsinin həlli aşağıdakı hesablama sxemi ilə yerinə yetirilir:

$$k_{1m}=hf\left(x_m;y_m;y'_m\right),$$

$$k_{2m}=hf\left(x_m+\frac{h}{2};\,y_m+\frac{h}{2}y'_m+\frac{h}{8}k_{1m};\,y'_m+\frac{k_{1m}}{2}\right),$$

$$k_{3m}=hf\left(x_m+\frac{h}{2};\,y_m+\frac{h}{2}y'_m+\frac{h}{8}k_{1m};\,y'_m+\frac{k_{2m}}{2}\right),$$

$$k_{4m}=hf\left(x_m+h;\,y_m+hy'_m+\frac{h}{2}k_{3m};\,y'_m+k_{3m}\right),$$

$$y_{m+1}=y_m+h\left(y'_m+\frac{1}{6}\left(k_{1m}+k_{2m}+k_{3m}\right)\right),$$

$$y'_{m+1}=y'_m+\frac{1}{6}\left(k_{1m}+2k_{2m}+2k_{3m}+k_{4m}\right),$$

burada $h-$ addımdır, üsulun xətasının tərtibi h^5-dir.

6.2.8. Adams üsulu

Koşi məsələsinin həlli üçün çox addımlı üsullar onunla səciyyələnir ki, həllin cari düyündə (nöqtədə) hesablanan qiyməti yalnız bir əvvəlki düyün qiymətlərində deyil, bir sıra əvvəlki düyün qiymətlərindən asılıdır.

Çox addımlı üsulların qurulmasının ümumi sxemi aşağıdakı kimidir. Tutaq ki, şəbəkənin bir neçə $x_{m-s}, x_{m-s+1}, \ldots, x_{m-1}, x_m$ düyün nöqtələrində təqribi həll məlumdur. Deməli, bu nöqtələrdə diferensial tənliyin sağ tərəfinin $f(x_i; y_i)$ qiymətləri məlumdur, həm də nəzərə almaq lazımdır ki, $f(x; y(x))$ artıq bir dəyişənli $f(x; y(x)) = F(x)$ funksiyası olacaq. $F(x)$ funksiyasını $L_p(x)$ interpolyasiya çoxhədlisi ilə əvəz edək və verilmiş diferensial tənliyi $[x_m; x_{m+1}]$ parçasında inteqrallanaqla, y_{m+1} qiymətini hesablayaq:

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} L_p(x)dx .$$

İnterpolyasiya çoxhədlisinin qurulması üçün dörd düyün nöqtəsi $x_{m-3}, x_{m-2}, x_{m-1}, x_m$ istifadə edilən halda, şəbəkədə sabit addımlarla

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{24}\left(55F_m - 59F_{m-1} + 37F_{m-2} - 9F_{m-3}\right)$$

şəklində yazılan, Adams düsturu alınır.

Adams sxemi ilə hesablamaya başlamaq üçün, x_0, x_1, x_2, x_3 dörd başlanğıc nöqtələrində həlli bilmək lazımdır.

Diferensial tənliyi Runqe-Kutta üsulu ilə həll etdikdə hər bir y_i qiymətininin tapılması üçün çoxlu hesablama aparmaq lazımdır. Tənliyin sağ tərəfinin analitik ifadəsi mürəkkəb olduqda belə tənliyin Runqe-Kutta üsulu ilə həlli böyük çətinliklər yaradır. Buna görə, praktikada bəzən, tənliyin sağ tərəfinin mürkkəb hesablanmasını tələb etməyən, Adams üsulu (1855) istifadə olunur.

$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ Koşi məsələsi üçün Adams üsulunun mahiyyəti aşağıdakı kimidir.

Tutaq ki, $x_i\ (i = 0,1,\ldots) - h$ addımla bərabər məsafədə duran qiymətlərdir və $y_i = y(x_i)$. Bu tənliyin, $x_i = x_0 + ih\ \ (i = 0,1,\ldots,n)$ nöqtələri ilə n sayda bərabər hissələrə bölünmüş $[a,b]$ parçasında həllini tapmaq tələb olunur.

$[x_i; x_{i+1}]$ parçası üzrə diferensial tənliyi inteqrallacaq, onda

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx \quad \text{və ya} \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx$$

olar.

Törəmənin tapılması üçün Nyutonun (üçüncü tərtib fərqlərlə kifayətlənməklə) ikinci interpolyasiya düsturundan istifadə edərək,

$$y(x) = y_i + q\Delta y_{i-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{i-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{i-3} + \ldots,$$

$$y'(x) = y'_i + q\Delta y'_{i-1} + \frac{q^2+q}{2}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q^3+3q^2+2q}{6}\Delta^3 y'_{i-3} + \ldots,$$

olduğunu alarıq, burada $q = (x - x_i)/h$.

y' üçün ifadəni əvəz etməklə və $dx = hdq$ olduğundan

$$\Delta y_i = h\int_0^1 \left(y'_i + q\Delta y'_{i-1} + \frac{q^2+q}{2}\Delta^2 y'_{i-1} + \frac{q^3+3q^2+2q}{6}\Delta^3 y'_{i-3} \right) dq =$$

$$= hy_i' + \frac{1}{2}\Delta\left(hy_{i-1}'\right) + \frac{5}{12}\Delta^2\left(hy_{i-2}'\right) + \frac{3}{8}\Delta^3\left(hy_{i-3}'\right)$$

alınır.

Sonra $t_i = hy_i' = hf(x_i, y_i) \quad (i = 0,1,\ldots,n)$ işarə etsək, onda istənilən fərq üçün $\Delta^m\left(hy_i'\right) = \Delta^m t_i$ və

$$\Delta y_i = t_i + \frac{1}{2}\Delta t_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 t_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 t_{i-3} \tag{6.30}$$

olar. Bu halda $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$ düsturu ilə tənliyin həllini almış olarıq. (6.30) düsturu ***Adamsın ekstrapolyasiya düsturu*** adlanır.

Prosesi başlamaq üçün dörd başlanğıc y_0, y_1, y_2, y_3 qiymətləri lazımdır. Bunlar, hər hansı ədədi üsulla, $y(x_0) = y_0$ ilkin şərtinə əsaslanaraq təyin edilir. Bunun üçün, məsələn, Runqe-Kutta üsulunu və ya Teylor sırasına ayırma (bu zaman 5 hədd götürmək lazımdır) üsulundan istifadə etmək olar.

$$y_i = y\left(x_0 + ih\right) = y_0 + y_0'\left(ih\right) + y_0''\left(ih\right)^2/2 + \ldots .$$

Bu qiymətləri bilməklə, $y' = f(x, y)$ tənliyindən törəmələrin y_0', y_1', y_2', y_3' qiymətlərini tapmaq və

$$t_0 = hy_0' = hf\left(x_0, y_0\right);$$

$$t_1 = hy_1' = hf\left(x_1, y_1\right);$$

$$t_2 = hy_2' = hf\left(x_2, y_2\right);$$

$$t_3 = hy_3' = hf\left(x_3, y_3\right)$$

təyin etmək olar.

Sonra $\Delta t_0 = \Delta\left(hy_0'\right)$; $\Delta t_1 = \Delta\left(hy_1'\right)$; $\Delta t_2 = \Delta\left(hy_2'\right)$; $\Delta^2\left(hy_0'\right)$; $\Delta^2\left(hy_1'\right)$; $\Delta^3\left(hy_0'\right)$ fərqləri hesablanılır və fərqlər cədvəli tərtib edilir:

x_i	y_i	Δy_i	$y'_i = f(x_i; y_i)$	$t_i = hy'_i$	Δt_i	$\Delta^2 t_i$	$\Delta^3 t_i$
x_0	y_0		$f(x_0; y_0)$	t_0	Δt_0	$\Delta^2 t_0$	$\Delta^3 t_0$
x_1	y_1		$f(x_1; y_1)$	t_1	Δt_1	$\Delta^2 t_1$	
x_2	y_2		$f(x_2; y_2)$	t_2	Δt_2		
x_3	y_3		$f(x_3; y_3)$	t_3			

Üsul intervalda dördüncü tərtib dəqiqliyə malikdir.

7. XÜSUSI TÖRƏMƏLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR

Bir çox tətbiqi məsələlərin həlli xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həllinə gətirilir.

Funksiya, onun arqumentləri və xüsusi törəmələri daxil olan tənlik ***xüsusi törəməli diferensial tənlik*** adlanır. Əgər xüsusi törəməli diferensial tənlikdə törəmənin tərtibi vahidə bərabər olarsa, o birtərtibli xüsusi törəməli diferensial tənlik adlanır.

Funksiyanı z , onun arqumentlərini $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ilə işarə etsək, onda ümumi şəkildə xüsusi törəməli diferensial tənliyi

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \qquad (7.1)$$

kimi yazmaq olar.

7.1. Birtərtibli xüsusi törəməli diferensial tənliklər

Əgər (7.1) tənliyi

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = b \qquad (7.2)$$

şəklində olarsa, başqa sözlə, $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ xüsusi törəmələrinə nəzərən xətti olarsa, belə tənlik ***birtərtibli xüsusi törəməli xətti diferensial tənlik*** adlanır.

(7.2) tənliyində iştirak edən $a_1, a_2, \ldots, a_n$ əmsalları və b sərbəst həddi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ arqumentlərindən asılı olan funksiyalardır.

Sadəlik üçün, dəyişənlərin sayı iki olan hala baxaq. Bu hal üçün qeyd olunan təklifləri dəyişənlərin sayı ixtiyari sayda olan hal üçün ümumiləşdirmək olar.

Tutaq ki,

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{7.3}$$

funksiyası

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + a_2 \frac{\partial z}{\partial y} = b \tag{7.4}$$

tənliyini ödəyən z dəyişənini x, y, c -lərdən asılı olan funksiya kimi təyin edir (c istənilən sabit kəmiyyətdir).

$\varphi(x, y, z) = 0$ funksiyasının

$$a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + b \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \tag{7.5}$$

münasibətini eyniliklə ödədiyini göstərmək olar. Odur ki, (7.4) tənliyini həll etmək üçün (7.5) tənliyini həll etməyi bilmək lazımdır. Bunun üçün

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} = \dfrac{a_1}{b} \\ \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{a_2}{b} \end{cases} \quad \text{və yaxud} \quad \frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{b} \tag{7.6}$$

tənliklər sisteminə baxaq və qəbul edək ki, onun birinci inteqralları

$$\varphi_1(x, y, z) = c_1, \qquad \varphi_1(x, y, z) = c_1. \tag{7.7}$$

Burada c_1, c_2 istənilən sabit kəmiyyətdir.

(7.7) tənliklərindən y və z dəyişənlərini x, c_1, c_2 ilə ifadə edərək $\varphi(x, y, z)$ funksiyasında yerinə yazmaqla onu $\varphi(x, y, z) = \Phi(x, c_1, c_2)$ şəklində göstərmək olar. c_1 və c_2 üçün (7.7) ifadələrini nəzərə almaqla

$$\varphi(x, y, z) = \Phi(x, \varphi_1, \varphi_2)$$

eyniliyini alarıq (Φ istənilən funksiyadır).

Göstərmək olar ki, əgər $\varphi(x,y,z)$ funksiyası (7.5) tənliyinin həllidirsə, onda x dəyişəni $\Phi(x,\varphi_1,\varphi_2)$ funksiyasına aşkar şəkildə daxil olmur, yəni

$$\varphi(x,y,z)=\Phi(\varphi_1,\varphi_2)$$

olur. Deməli (7.5) tənliyinin ümumi həlli $\Phi(\varphi_1,\varphi_2)$ funksiyasıdır.

Beləliklə, (7.4) tənliyini həlli etmək üçün aşağıdakı qaydanı vermək olar:

- (7.6) adi diferensial tənliklər sistemini yazmalı və sistemin asılı olmayan iki həlini (birinci inteqrallarını) tapmalı;
- φ_1,φ_2 -dən asılı olan istənilən $\Phi(\varphi_1,\varphi_2)$ funksiyasını sabitə və yaxud sıfıra bərabər etməklə (Φ funksiyası ixtiyari olduğuna görə onlar eyni güclüdür) z dəyişənini x,y -in funksiyası kimi təyin edən

$$\Phi(\varphi_1,\varphi_2)=0 \qquad (7.8)$$

münastbətini qurmalı.

Bu qayda ilə təyin olunan hər bir z funksiyası (7.4) tənliyini ödəyir və əksinə, (7.4) tənliyini ödəyən hər bir z funksiyası (7.8) bərabərliyi ilə təyin olunan funksiyalar sinifinə daxildir.

Misal 7.1. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ tənliyini həll edin.

Həlli.

Verilmiş tənliyə uyğun

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{0}$$

diferensial tənliklər sistemini quraq. Bu sistemdən

$$xdy + ydx = 0\,,\ dz = 0\,.$$

Bu sistemin həlli

$$x^2 + y^2 = c_1\,,\ z = c_2$$

Bu inteqrallardan asılı olan ixtiyari funksiyanı $\Phi(x^2 + y^2, z)$ ilə işarə etsək və onu sıfıra bərabər götürsək

$$\Phi(x^2 + y^2, z) = 0 \quad \text{və yaxud} \quad z = \psi(x^2 + y^2)$$

yaza bilərik (burada ψ ixtiyari funksiyadır).

Misal 7.2. Sabit əmsallı $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$ tənliyini həll edin (a, b sabit kəmiyyətlərdir).

Həlli.

Verilmiş tənliyə uyğun

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

diferensial tənliklər sistemini quraq. Buradan

$$\begin{cases} dx - adz = 0 \\ dy - bdz = 0 \end{cases} \Rightarrow x - az = c_1\,,\ y - bz = c_2$$

Deməli,

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0 \quad \text{və yaxud} \quad y - bz = \psi(x - az)\,.$$

Analoji qayda dəyişənlərin sayı birdən çox olan halda da doğrudur. Belə ki, xüsusi törəməli

$$a_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + a_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = b \qquad (7.9)$$

tənliyini ödəyən və n sayda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dəyişənlərindən asılı olan z funksiyalarını tapmaq üçün

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{b} \qquad (7.10)$$

tənliklər sisteminin asılı olmayan n sayda $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ həllərini tapmaq və onlardan asılı olan ixtiyari funksiyanı sıfıra bərabər etmək lazımdır ($a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ əmsalları $x_1, x_2, \ldots, x_n$ və z -dən asılı olan verilmiş funksiyalardır). Beləliklə, alınan

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0 \qquad (7.11)$$

tənliyi (7.9) tənliyini ödəyən z dəyişənini $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dəyişənlərindən asılı olan funksiya kimi təyin edir.

(7.11) tənliyi (7.9) tənliyinin ***ümumi inteqralı*** adlanır.

Tutaq ki, xüsusi halda, z dəyişəni birinci həllərin yalnız birinə, məsələn, axırıncısına daxildir, onda ümumi həlli

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) \qquad (7.12)$$

kimi də yazmaq olar.

(7.9) tənliyinin ümumi həllini (7.12) bərabərliyini z dəyişəninə nəzərən həll etməklə aşkar şəkildə tapmaq olar.

Misal 7.3. $x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = mz$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli.

Verilmiş tənliyə uyğun

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{mz}$$

tənliklər sistemini yazmaqla alınan sistemin birinci həllərini tapaq:

$$\ln x_1 = \ln x_2 + \ln c_1, \; x_1 = c_1 x_n,$$

$$\frac{x_1}{x_n}=c_1,\ \ \frac{x_2}{x_n}=c_2,\ \ldots,\ \frac{x_{n-1}}{x_n}=c_{n-1},$$

$$\frac{\ln z}{m}=\ln x_n+\ln c,\ \ \frac{z}{x_n^m}=c_n$$

($c_n=c^m$). Verilmiş tənliyin ümumi həlli

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_n},\frac{x_2}{x_n},\ldots,\frac{x_{n-1}}{x_n},\frac{z}{x_n^m}\right)=0$$

və ya

$$z=x_n^m\left(\frac{x_1}{x_n},\frac{x_2}{x_n},\ldots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

Alınan ifadə $x_1,x_2,\ldots,x_n$ dəyişənlərindən asılı olan m tərtibli bircinsli funksiyaların ümumi ifadəsidir.

$$a_1\frac{\partial z}{\partial x}+a_2\frac{\partial z}{\partial y}=b$$

tənliyinin

$$x=u(t),\ y=v(t),\ z=w(t) \tag{7.13}$$

xəttindən keçən $z=z(x,y)$ səth tənliyini tapmaq üçün

$$\frac{dx}{a_1}=\frac{dy}{a_2}=\frac{dz}{b}$$

sisteminin asılı olmayan iki $\varphi_1(x,y,z)=c_1$ və $\varphi_2(x,y,z)=c_2$ birinci həlli tapılır və x,y,z əvəzinə onların (7.13) ifadələrini yazdıqda t parametrinə nəzərən

$$\Phi_1(t)=c_1,\ \Phi_2(t)=c_2 \tag{7.14}$$

tənlikləri alınır. Bu tənliklərdən t parametrini yox etməklə

$$F(c_1, c_2) = 0$$

münasibəti alınır. Bu münasibətdən isə c_1, c_2 əvəzinə onların birinci inteqrallardakı ifadəsini yazmaqla tələb olunan həll, yəni səthin tənliyi alınır.

Misal 7.4. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x} + xz\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2xy$ tənliyinin $x^2 + y^2 = 16$, $z = 3$ xəttindən keçən səth tənliyini tapın.

Həlli.

Verilmiş tənliyə uyğun olan

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = -\frac{dz}{2xy}$$

sistemini həll etsək,

$$xdx = ydy, \ 2xdx = -zdz$$

olar.

Hər iki tənlik dəyişənlərinə ayrılmış tənlikdir. Bu tənlikləri həll etsək,

$$x^2 - y^2 = c_1, \quad x^2 + \frac{z^2}{2} = c_2 .$$

Onda verilmiş tənliyin ümumi həlli:

$$x^2 + \frac{z^2}{2} = \Phi(x^2 - y^2) \ . \qquad (7.15)$$

Verilmiş şərtləri ödəyən həlli, yəni Φ funksiyasını tapmaq üçün (7.15) bərabərliyində $x^2 = 16 - y^2$, $z = 3$ qiymətlərini yazsaq,

$$16 - y^2 + \frac{9}{2} = \Phi(16 - 2y^2)$$

olar.

$16-2y^2=t$ qəbul edək. Onda $y^2=8-\dfrac{t}{2}$ olar.

Alırıq ki,

$$\Phi(t)=\frac{t+25}{2},\quad \Phi(x^2-y^2)=\frac{x^2-y^2+25}{2}.$$

Bu qiyməti (7.15) bərabərliyində nəzərə alsaq

$$x^2+\frac{z^2}{2}=\frac{x^2-y^2+25}{2} \qquad \text{və ya} \qquad x^2+y^2+z^2=25$$

olar.

7.2. İkinci tərtib xüsusi törəməli diferensial tənliklər

Məchul funksiyanı u ilə, arqumentləri (sərbəst dəyişənləri) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ilə işarə etsək, ikinci tərtib xüsusi törəməli diferensial tənliyi ümumi şəkildə

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)=0 \quad (7.16)$$

kimi yazmaq olar.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (7.17)$$

şəklindəki tənlik ***ikinci tərtib xücusi törəməli xətti diferensial tənlik*** adlanır. Burada a_{ij} ($j=\overline{1,n}$; $i=\overline{1,n}$), b_i ($i=\overline{1,n}$) və c sabit kəmiyyətlərdir.

$f=0$ olduqda (7.17) tənliyi ***bircinsli***, $f\neq 0$ olduqda isə ***bircinsli olmayan*** tənlik adlanır.

Xüsusi halda, sərbəst dəyişənlərin sayı iki (x və y) olduqda (7.17) tənliyi

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0 \qquad (7.18)$$

şəklinə düşür.

(7.18) tənliyinin araşdırılması ikinci tərtib xüsusi törəmələrlə əlaqədar olduğuna görə, onu

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+ \\ +F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})=0 \qquad (7.19)$$

xətti bircinsli tənliyi şəklinə gətirək və onu araşdıraq.

Diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin əsas məsələlərindən biri (7.19) tənliyinin sadə şəklə gətirilməsi məsələsidir. Bunun üçün x və y dəyişənlərini

$$\xi=\varphi(x,y), \\ \eta=\psi(x,y) \qquad (7.20)$$

yeni dəyişənləri ilə əvəz edək. Tutaq ki, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ funksiyalarının müəyyən tərtib törəmələri var və bu sistemi x,y dəyişənlərinə nəzərən birqiymətli həll etmək mümkündür.

u funksiyasını x,y -in mürəkkəb funksiyası qəbul edib, birinci və ikinci tərtib törəmələrini taparaq və (7.19) ifadəsində nəzərə alsaq,

$$A_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2B_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+C_1\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0 \qquad (7.21)$$

olar, burada

$$A_1=A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$B_1 = A\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x} + 2B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y},$$

$$C_1 = A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2.$$

F_1 funksiyası $u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}$ dəyişənlərinə nəzərən xətti olduğuna görə (7.21) tənliyi də xətti olar.

Aşağıdakı üç haldan biri və (7.20) münasibəti ödənildikdə (7.19) tənliyi ***kanonik şəkilə gətirilmişdir*** deyirlər:

1. $A_1 = 0$, $C_1 = 0$;
2. $A_1 = 0$, $B_1 = 0$;
3. $A_1 = C_1$, $B_1 = 0$.

(7.20) münasibətində $\xi = \varphi(x, y)$ və $\eta = \psi(x, y)$ funksiyalarını elə seçmək olar ki, yuxarıda qeyd olunan üç haldan biri ödənilsin. Doğrudan da, tutaq ki, $A_1 = 0$, $C_1 = 0$. Onda $\varphi(x, y)$ və $\psi(x, y)$ funksiyalarının hər biri xüsusi törəməli

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0 \qquad (7.22)$$

diferensial tənliyini ödəməlidir. Bu tənliyinin həlli isə hər hansı adi diferensial tənliyin ümumi həlli ilə əlaqədardır.

Teorem. D oblastının hər bir nöqtəsində $z = f(x, y)$ funksiyasının (7.20) tənliyini ödəməsi üçün zəruri və kafi şərt həmin oblastda

$$f(x, y) = const = C_0$$

ifadəsinin

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0 \qquad (7.23)$$

adi diferensial tənliyinin ümumi həlli olmasıdır.

(7.23) tənliyi (7.22) tənliyinin ***xarakteristik tənliyi*** adlanır. Bu tənliyi $\frac{dy}{dx}$ -ə nəzərən həll etsək,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad ;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad .$$

tənliklərini alarıq. Bu tənliklərin həllərini, uyğun olaraq, $\varphi(x,y) = C_1$, $\psi(x,y) = C_2$ ilə işarə edək. $\varphi(x,y) = C_1$, $\psi(x,y) = C_2$ əyrilərinə (7.21) tənliyinin ***xarakteristikaları*** deyilir. (7.18) tənliyinin bu üsulla sadələşdirilməsi ***xarakteristikalar üsulu*** adlanır.

$B^2 - AC > 0$ olduqda (7.19) tənliyinin xarakteristikaları həqiqi və müxtəlif, $B^2 - AC = 0$ olduqda həqiqi və bir-birinə bərabər, $B^2 - AC < 0$ olduqda isə qoşma kompleks olurlar.

Xarakteristikalarına görə (7.19) tənliyini aşağıdakı tiplərə ayırırlar:

(7.19) tənliyi $B^2 - AC > 0$ olduqda ***hiperbolik,*** $B^2 - AC < 0$ olduqda ***elliptik***, $B^2 - AC = 0$ olduqda isə ***parabolik*** tipli tənlik adlanır.

Qeyd etmək lazımdır ki, $\xi = \varphi(x,y)$ və $\eta = \psi(x,y)$ əvəzləmələri ilə (7.19) tənliyini (7.21) şəklinə saldıqda tənliyin tipi dəyişmir. Daha doğrusu: $B^2 - AC > 0$ olduqda $B_1^1 - A_1C_1 > 0$;

$B^2 - AC < 0$ olduqda $B_1^1 - A_1C_1 < 0$; $B^2 - AC = 0$ olduqda $B_1^1 - A_1C_1 = 0$ olur.

Hiperbolik tipli tənliklərin kanonik şəkilə gətirilməsi. Tutaq ki, (7.19) tənliyi hiperbolik tipli tənlikdir, yəni $B^2 - AC > 0$. Bu halda tənliyin xarakteristikaları həqiqi və müxtəlifdir. Qeyd edilən teoremə əsasən $\varphi(x,y) = C_1$, $\psi(x,y) = C_2$ xarakteristikalar olduqda (7.19) tənliyində $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ əvəzləmələri aparmaqla

$$A_1 = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

$$C_1 = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = 0$$

almaq olar. Beləliklə, (7.21) tənliyi

$$2B_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + F_1 = 0$$

və ya

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right); \left(\Phi_1 = -\frac{F_1}{2B_1}\right) \qquad (7.24)$$

şəklinə düşər.

(7.24) tənliyi ***hiperbolik tipli tənliyin kanonik şəkili*** adlanır.

Elliptik tipli tənliklərin kanonik şəkilə gətirilməsi. Fərz edək ki, (7.19) tənliyi elliptik tipli tənlikdir. Bu halda $B^2 - AC < 0$. Onda xarakteristikalar qoşma kompleks funksiyalar olar. $\xi(x,y) + i\eta(x,y) = C_1$, $\xi(x,y) - i\eta(x,y) = C_2$ funksiyaları xarakteristik əyrilər olduğuna görə

$$A\left[\frac{\partial(\xi+i\eta)}{\partial x}\right]^2+2B\left[\frac{\partial(\xi+i\eta)}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial(\xi+i\eta)}{\partial y}\right]+C\left[\frac{\partial(\xi+i\eta)}{\partial y}\right]^2=0$$

və ya

$$A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2-$$

$$-\left[A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]+$$

$$+2i\left[A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right]=0$$

olar. Bu eyniliyin həqiqi və xəyali hissələri sıfıra bərabərdir. Ona görə $A_1=C_1$, $B_1=0$ olar. Beləliklə, (7.21) tənliyi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\Phi_2\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right);\ \left(\Phi_2=-\frac{F_1}{A_1}\right) \qquad (7.25)$$

şəklinə düşər.

(7.25) tənliyi ***elliptik tipli tənliyin kanonik şəkili*** adlanır.

Parabolik tipli tənliklərin kanonik şəkilə gətirilməsi. Tutaq ki, (7.19) parabolik tipli tənlikdir, yəni $B^2-AC=0$. Bu halda (7.19) tənliyi yalnız bir $\varphi(x,y)=0$ həqiqi xarakteristikasına malikdir. Burada $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=y$ əvəzləməsini aparaq. Bu halda $A_1=0$ olması aydındır. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}$ -nin əmsalı isə aşağıdakı şəkilə düşər:

$$B_1=B\frac{\partial\varphi}{\partial x}+C\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{B}{A}\left(A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=\frac{B}{A}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(-\frac{dy}{dx}+B\right).$$

$B^2-AC=0$ olduğuna görə

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A}\Rightarrow -A\frac{dy}{dx}+B=0\,.$$

Deməli, $B_1=0$. Bu halda (7.21) tənliyi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\Phi_3\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right);\ \left(\Phi_3=-\frac{F_1}{C_1}\right) \qquad (7.26)$$

şəklinə düşər.

(7.26) tənliyi ***parabolik tipli tənliyin kanonik şəkili*** adlanır.

Ola bilər ki, hər hansı D oblastının müxtəlif hissələrində verilmiş tənlik müxtəlif tipli olsun. Onda deyirlər ki, tənlik D oblastında qarışıq tiplidir. Məsələn, Trikomi tənliyi adlanan

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

tənliyinə baxaq. Bu tənlik üçün $B=0$, $A=y$, $C=1$ olduğu aydındır. $B^2-AC=-y$ olduğuna görə $y>0$ olarsa, Trikomi tənliyi elliptik tipli, $y<0$ olarsa hiperbolik tipli, $y=0$ oxu üzərində isə parabolik tipli tənlikdir.

Misal 7.5. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ tənliyini kanonik şəkilə gətirin və həll edin.

Həlli. Bu tənlik üçün

$$A=x^2,\ B=0,\ C=-y^2,\ B^2-AC=-x^2y^2<0$$

olduğuna görə $x\neq 0$, $y\neq 0$ olduqda verilmiş tənlik hiperbolik tipli tənlikdir. Tənliyin xarakteristikalarını tapaq. Bunun üçün ona uyğun olan xarakteristik tənliyi yazaq:

$$x^2(dy)^2-y^2(dx)^2=0 \text{ və ya } (xdy-ydx)(xdy+ydx)=0\,.$$

Buradan $xdy + ydx = 0$, $xdy - ydx = 0$ adi diferensial tənlikləri alınır. Bu tənlikləri dəyişənlərinə ayırıb inteqrallamaqla

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0, \quad \ln y + \ln x = \ln C_1,$$

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0, \quad \ln y - \ln x = \ln C_2$$

alınır. Buradan $xy = C_1$, $\frac{y}{x} = C_2$ xarakteristikalar ailəsini alarıq.

Tənliyi kanonik şəkilə gətirmək üçün $\xi = xy$, $\eta = \frac{y}{x}$ əvəzləmələrini aparaq. x, y dəyişənlərə nəzərən xüsusi törəmələri tapaq.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot y - \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{y}{x^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot x - \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot y\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{y}{x^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)y -$$

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\cdot\frac{y}{x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{2y}{x^3} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot y - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{y}{x^2}\right)y - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot y + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{y}{x^2}\right)\cdot\frac{y}{x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{2y}{x^3} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot y^2 - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{y^2}{x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{y^2}{x^4} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{y}{x^3};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} .$$

Alınmış xüsusi törəmələri verilmiş tənlikdə nəzərə alsaq,

$$x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot y^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{y^2}{x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{y^2}{x^4} + 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{y}{x^3} \right) -$$

$$- y^2 \left(x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = 0 ;$$

$$- 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot y^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{y}{x} = 0 ;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

olar.

Alınan tənlik verilmiş tənliyin kanonik şəklidir və ona nisbətən sadədir.

Alınan tənliyi həll etmək üçün $\frac{\partial u}{\partial \eta} = v$ qəbul edək. Onda

$$2\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} = v \Rightarrow v = C(\eta)\sqrt{\xi} .$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = v \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = C(\eta)\sqrt{\xi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \sqrt{\xi} \int C(\eta) d\eta + C_1(\xi) = \sqrt{\xi} C_2(\eta) + C_1(\xi)$$

Beləliklə,

$$u(x,y)=\sqrt{xy}\,C_2\left(\frac{y}{x}\right)+C_1(xy)$$

ifadəsini alarıq. Burada C_1, C_2 uyğun olaraq xy və $\frac{y}{x}$ ifadələrinin ixtiyari funksiyalarıdır. Sonuncu bərabərlikdə $C_1(xy)$ və $C_2\left(\frac{y}{x}\right)$ əvəzinə $\ln(xy)\sqrt{xy}$, $\sqrt{\frac{y}{x}}$, $\sin\frac{y}{x}$, $\left(\frac{y}{x}\right)^3 \sin xy$ və s. funksiyalarını götürmək olar. Onda verilmiş tənliyin uygun həlləri

$$u(x,y)=\sqrt{xy}\left(\frac{y}{x}\right)^3+\sin xy,$$

$$u(x,y)=\sqrt{xy}\,\frac{y}{x}+\ln(xy)$$

və s. şəklində olar.

Misal 7.6. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,

$$u\big|_{y=0}=3x^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=1-x$$

Koşi məsələsinin həll edin.

Həlli. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, verilmiş tənliyinin ümumi həlli $u=y\Phi_1(x)+\Phi_2(x)$ şəklində olar. Başlanğıc şərtlərdən

$$\Phi_2(x)=3x^2,\quad \Phi_1(x)=1-x$$

tapılır. $\Phi_1(x),\Phi_2(x)$ funksiyalarının bu ifadələrini ümumi həlldə nəzərə alsaq,

$$u=y(1-x)+3x^2$$

olar.

8. SİMİN RƏQS TƏNLİYİ

Uzunluğu başqa ölçülərinə nəzərən çox böyük olan cisim ***sim*** adlanır.

Ox oxu boyunca hər iki tərəfə sonsuz uzadılmış simə baxaq və onun bu vəziyyətini müvazinət halı kimi qəbul edək. Simi hər hansı bir xarici qüvvənin təsiri ilə müvazinət halından çıxarıb, sonra isə bu qüvvənin təsirini kəssək, onda sim, təsir qüvvəsindən asılı olaraq, müxtəlif cür rəqsi hərəkət edəcək. Simin elə rəqsi hərəkətlərinə baxaq ki, rəqs edən zaman onun bütün nöqtələri Ox oxuna perpendikulyar olan düz xətt boyunca hərəkət etməklə eyni bir müstəvi üzərində yerləşsinlər. Simin belə hərəkəti onun ***eninə rəqsi*** adlanır.

Rəqs zamanı simin hər hansı $u(x)$ nöqtəsinin Ox oxundan olan meylini u ilə işarə edək. Onda

$$u = u(m,t) = u(x,t)$$

olar, yəni simin rəqs prosesi müəyyən bir $u(x,t)$ funksiyası vasitəsilə ifadə edilir. Bu funksiya t anında simin absisi x olan nöqtəsinin yerdəyişməsinin qiymətini göstərir.

Göstərmək olur ki, $u(x,t)$ funksiyası

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

tənliyini ödəyir, burada $T-$ simin dartılma qüvvəsi, $\rho-$ simin xətti sıxlığıdır.

$\frac{T}{\rho} = a^2$ işarə etsək simin rəqs tənliyini

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (8.1)$$

şəklində yazmaq olar. (8.1) tənliyi ***simin eninə sərbəst rəqslərinin tənliyi*** adlanır.

Əgər simə xarici qüvvə təsir edərsə, onda simin rəqs tənliyi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{8.2}$$

şəklində olar. (8.2) tənliyi ***simin məcburi rəqs tənliyi*** adlanır.

8.1. Simin rəqs tənliyi üçün başlanğıc və sərhəd şərtləri

Aydındır (8.1) və (8.2) tənliklərinin heç biri, rəqs edən simin vəziyyətini birqiymətli təyin edə bilməz. Daha doğrusu, bu tənliklərin sonsuz sayda həlli var. Bu o deməkdir ki, sim sonsuz sayda muxtəlif rəqsi hərəkət edə bilər. Odur ki, həllin müəyyən olması üçün əlavə şərtlər verilməlidir. Bu şərtlər elə olmalıdır ki, tənliyin sonsuz sayda həllərindən bizə lazım olan həlli birqiymətli təyin etmək mümkün olsun. Riyazi fizikada əlavə şərtlər, ***başlanğıc şərtləri və sərhəd şərtləri*** adlanan, iki növə ayrılır. Başlanğıc şərtləri axtarılan funksiyanın başlanğıc andakı halını, sərhəd şərtləri isə axtarılan funksiyanın baxılan oblastın sərhəd nöqtələrindəki vəziyyətini müəyyən edir. Məsələnin qoyuluşundan asılı olaraq, başlanğıc və sərhəd şərtləri müxtəlif ola bilər.

Sonlu simin sərbəst rəqslərini nəzərdən keçirək. Fərz edək ki, sim hər iki ucundan Ox oxuna bərkidilmişdir. Simin sol ucu x_1, sağ ücü x_2 olsun. Onda həmin nöqtələrdə $u(x,t)$ funksiyasının qiyməti sıfıra bərabər olar, çünki bu nöqtələr rəqs zamanı tərpənməz qalır (yəni hərəkət etmir) və buna görə də onların Ox oxundan olan meyilləri sıfıra bərabərdir:

$$\left.\begin{aligned} u(x,t)\big|_{x=x_1} &= u(x_1,t) = 0 \\ u(x,t)\big|_{x=x_2} &= u(x_2,t) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

Bu halda (8.3) şərtləri (8.1) tənliyi üçün ***sərhəd şərtləri*** adlanır.

Tutaq ki, başlanğıc anda simin vəziyyəti məlumdur. Simin başlanğıc anda vəziyyətini təyin edən funksiya $\varphi_1(x)$ olsun. Bu o deməkdir ki,

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u(x,0) = \varphi_1(x)$$

olur. Əlavə olaraq fərz edək ki, başlanğıc anda simin nöqtələrinin sürətini $\varphi_2(x)$ funksiyası təyin edir. Bu isə o deməkdir ki,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_t'(x,0) = \varphi_2(x)$$

olur.

$$\left.\begin{aligned} &u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_1(x) \\ &\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_2(x) \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

şərtləri (8.1) tənliyi üçün ***başlanğıc*** və ya ***Koşi şərtləri*** adlanır.

(8.1) tənliyinin yalnız (8.4) başlanğıc şərtlərini ödəyən həllinin tapılması məsələsi (8.1) tənliyi üçün ***Koşi məsələsi***, (8.3) sərhəd şərtləri və (8.4) başlanğıc şərtlərini ödəyən həllinin tapılması məsələsi (8.1) tənliyi üçün ***qarışıq məsələ*** adlanır.

Sonsuz simin sərbəst rəqslərini nəzərdən keçirək. Bu halda onun ucları baxılan hissənin rəqslərinə təsir etmlr. Odur ki, belə halda axtarılan funksiya üzərinə heç bir sərhəd şərti qoyulmur.

Qeyd olunanlar aşağıdakı kimi riyazi ifadə olunur:

(8.1) tənliyinin (8.4) başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapmalı. Burada $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ funksiyaları $(-\infty,+\infty)$ intervalında təyin olunmuş funksiyalardır. $\varphi_1(x)$ iki dəfə diferensiallanan, $\varphi_2(x)$ isə diferensiallanan funksiya olduqda bu məsələnin yeganə həlli var.

8.2. Dalamber üsulu ilə sonsuz simin sərbəst rəqs tənliyinin həlli

(8.1) tənliyi üçün Koşi məsələsinin həllinə baxaq. Bunun üçün əvvəlcə onun növünü müəyyən edək. Bu məqsədlə tənliyi

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad (8.5)$$

şəklində yazaq. Bu tənlik ikinci tərtib xüsusi törəməli sabit əmsallı diferensial tənlikdir.

$$A=a^2,\ B=0,\ C=-1,\ B^2-AC=a^2>0$$

olduğuna görə (8.5) hiperbolik tipli tənlikdir və onun xarakteristik tənliyi

$$a^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2-1=0 \qquad (8.6)$$

olar. (8.6) ifadəsindən aşağıdakı kimi iki tənlik alınır:

$$dx-adt=0,$$

$$dx+adt=0.$$

Bu tənliklərin həlləri uyğun olaraq

$$x-at=c_1,$$

$$x+at=c_2.$$

şəklindədirlər. Odur ki, tənliyini kanonik şəkilə gətirmək üçün

$$\xi=x-at;\ \eta=x+at$$

əvəzləmələrini aparmaq lazımdır. ξ, η dəyişənləri vasitəsi ilə u funksiyasını x,t dəyişənlərindən asılı funksiya hesab edib, xüsusi törəmələr üçün

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$

olduğu alınır. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ üçün alınan ifadələri verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq,

$$4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$$

alınar.

$$4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0.$$

Buradan çıxır ki, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ funksiyası ξ dəyişənindən asılı deyil. Onda $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ ifadəsi ancaq η-dan asılı olar:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=\theta(\eta).$$

Bu bərabərliyin hər iki tərəfini $d\eta$-ya vurub inteqrallasaq,

$$u=\int\theta(\eta)d\eta+\theta_1(\xi)$$

alınar. Onda

$$\int \theta(\eta)d\eta = \theta_2(\eta)$$

işarə edərək,

$$u = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at)$$

funksiyasını alarıq ki, bu da (8.1) tənliyinin ümumi həllidir. Bu həll (8.1) tənliyinin ***Dalamber həlli*** adlanır.

$\theta_1(\xi)$ və $\theta_2(\eta)$ funksiyalarını təyin etmək üçün (8.4) başlanğıc şərtlərindən istifadə edək. Onda

$$\left. \begin{aligned} u(x,t)\big|_{t=0} &= \varphi_1(x) = \theta_1(x) + \theta_2(x) \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} &= \varphi_2(x) = -a\theta_1'(x) + a\theta_2'(x) \end{aligned} \right\} \tag{8.7}$$

münasibətlərini alarıq. (8.7) münasibətlərinin ikinci tənliyini $(0,x)$ intervalı üzrə inteqrallasaq,

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_2(z)dz + c$$

alınar. Burada $c = \theta_1(0) - \theta_2(0)$.

Beləliklə,

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(x) + \theta_2(x) &= \varphi_1(x) \\ \theta_1(x) - \theta_2(x) &= -\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_2(z)dz + c \end{aligned} \right\}$$

olur. Bu tənliklər sistemini $\theta_1(x), \theta_2(x)$ funksiyalarına nəzərən həll etsək,

$$\theta_1(x) = \frac{1}{2}\varphi_1(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_2(z)dz + \frac{c}{2},$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{2}\varphi_1(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_2(z)dz - \frac{c}{2}$$

alınar. Buna görə də $u(x,t)$ funksiyası üçün

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x-at)+\varphi_1(x+at)]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x=at}\varphi_2(z)dz \qquad (8.8)$$

ifadəsini alarıq.

(8.8) ifadəsi ***Dalamber düsturu*** adlanır.

8.3. Sonlu simin sərbəst rəqs tənliyinin həlli

Tutaq ki, uzunluğu l olan simin sol ucu $x=0$ nöqtəsində, sağ ucu isə $x=l$ nöqtəsində bərkidilmişdir. Bu halda simin vəziyyətini təyin edən $u(x,t)$ funksiyası üçün sərhəd şərtləri

$$u(x,t)\big|_{x=0}=0\,,\; u(x,t)\big|_{l=0}=0$$

şəklində olar.

Aşağıdakı məsələyə baxaq:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (8.9)$$

tənliyinin

$$u(x,t)\big|_{x=0}=0\,,\; u(x,t)\big|_{x=l}=0 \qquad (8.10)$$

sərhəd şərtlərini və

$$\left.\begin{aligned} u(x,t)\big|_{t=0}&=\varphi_1(x)\\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}&=\varphi_2(x)\end{aligned}\right\} \qquad (8.11)$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapmalı. Burada $\varphi_1(x)$ və $\varphi_2(x)$ funksiyaları $(0,l)$ intervalında təyin olunmuş məlum funksiyalardır.

Sonsuz sim üçün Koşi məsələsinin həlli (Dalamber düsturu) sonlu sim üçün qarışıq məsələnin həlli üçün də doğru olduğunu göstərmək olar.

$u=\theta_1+\theta_2$ funksiyalarının baxılan tənliyi ödəməsi üçün θ_1,θ_2 funksiyalarını ixtiyari götürmək olmaz. Bu funksiyalar ikinci tərtib törəmələri ilə birlikdə kəsilməz olmalıdır. $\varphi_1(x)$ və $\varphi_2(x)$ funksiyaları da bəzi əlavə şərtləri ödəməlidirlər. Bu funksiyalar üzərinə əlavə şərtləri qoymadıqda da verilmiş məsələni həll etmək olar. Bu halda məsələni həll etmək üçün Furye üsulunu nəzərdən keçirək.

Tutaq ki, (8.9)–(8.11) qarışıq məsələni həll etmək tələb olunur. (8.9) tənliyinin həllini

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

şəklində axtaraq. Burada $X(x)$ ancaq x-dən, $T(t)$ isə ancaq t-dən asılı funksiyalardır. $u(x,t)$-nin bu ifadəsini (8.9) tənliyində nəzərə alsaq,

$$X''(x)T(t)=\frac{1}{a^2}T''(t)X(x)$$

və ya

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)} \qquad (8.12)$$

münasibətlərini alarıq. Bu bərabərliyin sol tərəfi t-dən, sağ tərəfi isə x-dən asılı deyil. Buradan görünür ki, (8.12) bərabərliyinin sağ və sol tərəfləri arqumentlər dəyişdikdə sabit qalır. Odur ki,

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\lambda^2 \qquad (8.13)$$

münasibətini alarıq. Burada $\lambda=const$. (8.13) münasibətindən

$$X''(x)=\lambda^2X(x) \qquad (8.14)$$

$$T''(t) = \lambda^2 T(t) \tag{8.15}$$

adi diferensial tənlikləri alınır və bu tənliklərin ümumi həlləri

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x\,, \tag{8.16}$$

$$T(t) = C\cos a\lambda t + D\sin a\lambda t\,, \tag{8.17}$$

burada A, B, C, D ixtiyari sabitlərdir.

$X(x), T(t)$ funksiyalarının ifadələrini axtarılan həlldə yazsaq,

$$u(x,t) = (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)(C\cos a\lambda t + D\sin a\lambda t)$$

olar.

A, B sabitlərini elə seçək ki, (8.10) şərtləri ödənilsin. Onda

$$X(0) = X(l) = 0$$

bərabərlikləri alınar. Bunu (8.16)-da nəzərə alsaq,

$0 = A\cdot 1 + B\cdot 0$,

$0 = A\cos\lambda l + B\sin\lambda l$.

$0 = A\cdot 1 + B\cdot 0 \Rightarrow\ A = 0$.

$0 = A\cos\lambda l + B\sin\lambda l \Rightarrow B\sin\lambda l = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{n\pi}{l}\ \ (n = 1,2,\dots)$.

Beləliklə,

$$X(x) = B\sin\frac{n\pi}{l}x\ \ (n = 1,2,\dots). \tag{8.18}$$

$\lambda = \dfrac{n\pi}{l}$ qiymətini (8.17) bərabərliyində nəzərə alsaq,

$$T(t) = C\cos\frac{an\pi}{l}t + D\sin\frac{an\pi}{l}t\ \ (n = 1,2,\dots)\,. \tag{8.19}$$

Hər bir n üçün $u(x,t)$ funksiyasının da bir $u_n(x,t)$ qiyməti uyğun olar. Onda

$$u_n(x,t)=\sin\frac{n\pi}{l}x\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t+D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right) \qquad (8.20)$$

Hər bir n üçün bir C, D sabitləri olduğuna görə (B həmin sabitlərə aiddir) (8.20)-də onlar uyğun olaraq C_n, D_n ilə işarə olunublar.

(8.9) tənliyi xətti bircinsli olduğuna görə

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$$

və ya

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t+D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right) \qquad (8.21)$$

sırası ilə təyin olunan funksiya (8.11) sərhəd şərtlərini ödəyər və (8.9) tənliyinin həlli olar.

(8.11) başlanğıc şərtlərini (8.21) sırasında nəzərə alsaq,

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

alınar. $\varphi_1(x)$ funksiyasını $(0,l)$ intervalında Furye sırasına ayırmaq mümkün olarsa, onda

$$C_n=\int_0^l\varphi_1(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \qquad (8.22)$$

(8.21) bərabərliyinin hədlərini t-yə nəzərən diferensiallayaq və $t=0$ götürək. Onda

$$\varphi_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

alınar və bu sıranın Furye əmsalları

$$D_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \varphi_2(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \qquad (8.23)$$

olar.

Misal 8.1. $u(x,t)\big|_{t=0} = \sin x$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\big|_{t=0} = 1$ olduqda, $t = \frac{\pi}{4}$ anında $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tənliyi ilə təyin olunan simin formasını təyin edin.

Həlli.

Verilmiş tənlik parabolik tipli olduğuna görə onun xarakteristik tənliyi

$$4\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - 1 = 0$$

olar. Bu tənlikdən

$$dx - 2dt = 0,$$

$$dx + 2dt = 0.$$

Bu tənliklərin inteqralları uyğun olaraq

$$x - 2t = c_1,$$

$$x + 2t = c_2$$

olar. Onda verilmiş tənliyi kanonik şəklə gətirmək üçün

$$\xi = x - 2t,$$

$$\eta = x + 2t$$

əvəz edək.

ξ, η dəyişənləri vasitəsi ilə u funksiyasını x, t dəyişənlərindən asılı funksiya hesab edib və ikinci tərtib xüsusi törəmələri tapıb tənlikdə yazsaq,

$$16\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 \text{ və yaxud } \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

tənliyini alarıq və bu tənliyin ümumi həlli

$$u(x,t)=\theta_1(x-2t)+\theta_2(x+2t)$$

olar.

$\theta_1(\xi)$ və $\theta_2(\eta)$ funksiyalarını təyin etmək üçün verilmiş başlanğıc şərtlərindən istifadə edək. Onda

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\sin x=\theta_1(x)+\theta_2(x)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=1=-2\theta_1'(x)+2\theta_2'(x)$$

münasibətlərini alarıq. Axırıncı tənliyi inteqrallasaq,

$$\theta_1(x)-\theta_2(x)=-\frac{1}{2}x+c$$

alınar. Burada c ixtiyari sabitdir.

Beləliklə,

$$\begin{cases}\theta_1(x)+\theta_2(x)=\sin x\\ \theta_1(x)-\theta_2(x)=-\dfrac{1}{2}x+c\end{cases}$$

Buradan

$$\begin{cases}\theta_1(x)=\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{1}{4}+\dfrac{c}{2}\\ \theta_2(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{4}-\dfrac{c}{2}\end{cases}$$

alarıq. Bu ifadələri ümumi həlldə nəzərə alsaq,

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin(x-2t)+\sin(x+2t)]+t=\sin x\cos 2t+t$$

olar. Buradan

$$u(x,t)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

Deməli, sim $t = \dfrac{\pi}{4}$ anında absis oxuna paralel olur.

Məsələ 8.2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tənliyinin

$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0, \; u(x,t)\big|_{x=2} = 0$$

sərhəd şərtlərini və

$$u(x,t)\big|_{t=0} = 2x - x^2, \; \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapmalı.

Həlli.

Tənliyin həllini

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

şəklində axtaraq. Onda

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0, \; X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

tənliklərini alarıq. Bu tənliklərin həlləri uyğun olaraq

$$T(t) = A_1 \cos \lambda t + B_1 \sin \lambda t,$$

$$X(x) = C \cos \lambda x + D \sin \lambda x.$$

Burada A_1, B_1, C, D ixtiyari sabitlərdir. $T(t), X(x)$ funksiyalarının ifadələrini axtarılan həlldə yazsaq,

$$u(x,t) = (A_1 \cos \lambda t + B_1 \sin \lambda t)(C \cos \lambda x + D \sin \lambda x).$$

Alınan $u(x,t)$ funksiyası sərhəd şərtlərini ödəməlidir, yəni $u(x,t)\big|_{x=0} = 0$ sərhəd şərtinə əsasən

$$(A_1\cos\lambda t + B_1\sin\lambda t)(C\cos\lambda x + D\sin\lambda x)\big|_{x=0} = 0$$

olmalıdır. Buradan $C = 0$ və

$$u(x,t) = (A\cos\lambda t + B\sin\lambda t)\sin\lambda x$$

olar (burada $A = A_1 D$, $B = B_1 D$).

$u(x,t)\big|_{x=2} = 0$ sərhəd şərtinə əsasən

$$(A\cos\lambda t + B\sin\lambda t)\sin 2\lambda = 0,$$

buradan isə $\sin 2\lambda = 0$, $\lambda = \dfrac{\pi k}{2}$ ($k = 1,2,\dots$) olar.

k-nın hər bir qiymətinə müəyyən bir $\lambda = \lambda_k$ uyğun olduğuna görə tənliyin $u_k(x,t)$ xüsusi həlli

$$u_n(x,t) = \sin\frac{k\pi}{2}x\left(A_k\cos\frac{k\pi}{2}t + B_k\sin\frac{k\pi}{2}t\right).$$

Deməli,

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi}{2}x\left(A_k\cos\frac{k\pi}{2}t + B_k\sin\frac{k\pi}{2}t\right)$$

sırasının cəmi verilmiş tənliyi və sərhəd şərtlərini ödəyir.

A_k, B_k sabitlərini elə seçək ki, bu cəm verilmiş başlanğıc şərtlərini də ödəsin.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi}{2}x\left(-\frac{k\pi}{2}A_k\sin\frac{k\pi}{2}t + \frac{k\pi}{2}B_k\cos\frac{k\pi}{2}t\right)$$

olduğuna görə $t = 0$ olduqda

$$\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{k\pi}{2}\cos\frac{k\pi}{2}x = 0 \quad \text{və} \quad \sum_{k=1}^{\infty}A_k\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2}x = 2x - x^2$$

bərabərlikləri alınar.

Birinci Furye sırasından $B_k = 0$ ($k = 1,2,\dots$), ikincidən

$$A_k = \int_0^2 (2x - x^2)\sin\frac{k\pi}{2}x dx .$$

Alınan müəyyən inteqralı hissə-hissə inteqrallasaq,

$$A_k = \begin{cases} \dfrac{32}{k^3\pi^3}, & k = 2n-1 \\ 0, & k = 2n \end{cases}$$

olar. Deməli,

$$A_{2n} = 0\,,\ A_{2n-1} = \frac{32}{(2n-1)^3\pi^3}$$

olur və verilmiş qarışıq məsələnin həlli

$$u(x,t) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^3}\cos\frac{2n-1}{2}\pi + \sin\frac{2n-1}{2}\pi x\right)$$

şəklində olar.

9. İSTİLİKKEÇİRMƏ TƏNLİYİ

9.1. Çubuqda istiliyin yayılma tənliyi

Uzunluğu l olan bircinsli çubuğa baxaq. Tutaq ki, çubuğun eninə kəsiyinin ixtiyari nöqtəsində temperatur eynidir və ona kənardan istilik nüfuz edə bilmir. Bu çubuqda istiliyin yayılma prosesini araşdıraq.

Ox oxunu elə seçək ki, çubuğun bir ucu $x=0$ nöqtəsi ilə, digər ucu isə $x=l$ nöqtəsi ilə üst-üstə düşsün. Tutaq ki, $u(x,t)$ funksiyası çubuğun x absisli kəsiyinin t anındakı temperaturunu göstərir.

Məlumdur ki, istiliyin yayılma sürəti, yəni zaman vahidində absisi x olan kəsikdən keçən istiliyin miqdarı

$$Q=-k\frac{\partial u}{\partial x}S \tag{9.1}$$

düsturu ilə təyin edilir. Burada S – çubuq kəsiyinin sahəsi, k – istilikkeçirmə əmsalıdır.

Absisləri x_1, x_2 olan kəsiklərin arasında qalan çubuq həssəsinə baxaq. Absisi x_1 olan kəsikdən Δt zamanında keçən istiliyin miqdarı

$$\Delta Q_1=-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1}S\Delta t$$

düsturu ilə təyin edilir. Absisi x_2 olan kəsikdən Δt zamanında keçən istiliyin miqdarı

$$\Delta Q_2=-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2}S\Delta t$$

olar. Δt zamanında çubuq hissəsi daxilində qalıq istilik miqdarı, yəni $\Delta Q_1-\Delta Q_2$ aşağıdakı düsturla təyin edilir:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = k\left[\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1}\right]S\Delta t \approx k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S \Delta t \quad (9.2)$$

(burada mötərizə içərisindəki fərqə Laqranj düsturu tətbiq olunur). Δt zamanında əmələ gəlmiş bu istilik miqdarı (artımı) çubuq hissəsinin temperaturunun Δu qədər artmasına sərf edilmişdir:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c\rho \Delta x S \Delta u$$

və yaxud

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \approx c\rho \Delta x S \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t\,, \quad (9.3)$$

burada c – çubuq maddəsinin istilik tutumu, ρ – çubuq maddəsinin sıxlığıdır ($\rho\Delta x S$ çubuq hissəsinin kütləsidir).

Eyni istilik miqdarı olan $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ fərqinin (9.2) və (9.3) ifadələrini bir-birinə bərabər götürsək,

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S \Delta t = c\rho \Delta x S \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t\,,$$

yaxud

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

alarıq. $\frac{k}{c\rho} = a^2$ qəbul etməklə

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (9.4)$$

tənliyini alarıq. Bu tənlik bircinsli çubuqda ***istilikkeçirmə tənliyidir.***

(9.4) tənliyi həllinin tamamilə təyin olunması üçün $u(x,t)$ funksiyası məsələnin fiziki şərtlərinə uyğun olan sərhəd şərtlərini ödəməlidir. (9.4) tənliyinin həlli üçün verilən şərtlər müxtəlif ola bilər:

$$u(x,0) = \varphi(x), \ 0 \le x \le l, \tag{9.5}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = \psi_1(t), & 0 \le t \le T \\ u(l,t) = \psi_2(t), & 0 \le t \le T \end{cases} \tag{9.6}$$

(9.5) başlanğıc şərtinin fiziki mənası ondan ibarətdir ki, $t = 0$ olduqda çubuğun müxtəlif kəsiklərində temperatur verilmiş $\varphi(x)$-ə bərabərdir. (9.6) sərhəd şərtləri o deməkdir ki, çubuğun $x = 0$ və $x = l$ uclarında temperatur uyğun olaraq $\psi_1(t)$ və $\psi_2(t)$-yə bərabərdir.

(9.4) tənliyinin $0 \le x \le l, 0 \le t \le T$ oblastında (9.5), (9.6) şərtlərini ödəyən yeganə həlli olduğunu isbat etmək olar.

9.2. İstiliyin fəzada yayılması

Tutaq ki, S səthi ilə əhatə olunmuş V cisimi qeyri-bərabər olaraq qızdırılmışdır. Bu halda V cisiminin daxilində istilik axını əmələ gələcəkdir. İstilik cisimin temperaturu yüksək olan nöqtələrindən temperaturu aşağı olan nöqtələrə axmağa başlayacaqdır. V cisiminin temperaturunu müəyyən edən funksiya u olduğundan, aydındır ki, o V oblastının nöqtələrindən və t zamanından asılı olar:

$$u = u(M,t) = u(x,y,z,t).$$

Göstərmək olar ki, çubuqda istiliyin yayılmasında olduğu kimi, bu funksiya

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t) \tag{9.7}$$

tənliyi ilə xarakterizə olunur. Bu tənlik ***fəzada istilikkeçirmə***

tənliyi adlanır. Tənlikdəki a^2 sabiti ***istilikkeçirmə əmsalı*** adlanır. Əgər cisimin daxilində istilik mənbəyi yoxdursa, onda istilikkeçirmə tənliyi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{9.8}$$

şəklində olar.

Temperatur zamandan asılı deyilsə, yəni istilik prosesi stasionardırsa, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ olar və istilikkeçirmə tənliyi

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{9.9}$$

şəklinə düşər.

Aydındır ki, müstəvi cisimlərdə istilikkeçirmə tənliyində

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,;\ f = f(x, y, t)\,,$$

birölçülü cisimlərdə isə

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,;\ f = f(x, t)$$

olar. Buna görə də iki və birölçülü fəzalarda istilikkeçirmə tənlikləri uyğun olaraq

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t)\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

şəklində olar.

9.3. Ucları sıfır temperaturda saxlanan çubuqda istiliyin yayılması

Tutaq ki, ucları $x=0$ və $x=l$ nöqtələri qəbul edilmiş çubuğun uclarında temperatur sıfıra bərabərdir. Başqa sözlə, çubuqda istiliyi xarakterizə edən $u(x,t)$ funksiyası

$$\left.\begin{array}{l} u(x,t)\big|_{x=0} = u(0,t) = 0 \\ u(x,t)\big|_{x=l} = u(l,t) = 0 \end{array}\right\} \tag{9.10}$$

şərtlərini ödəyir. Əlavə olaraq tutaq ki, bu sərhəd şərtlərindən başqa, başlanğıc anda çubuqda istiliyin yayılmasını xarakterizə edən funksiya məlumdur:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u(x,0) = \varphi(x)\,. \tag{9.11}$$

Beləliklə, istilikkeçirmə tənliyi üçün qarışıq məsələ aşağıdakı kimi qoyula bilər:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{9.12}$$

tənliyinin (9.10) sərhəd və (9.11) başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapmalı.

Əvvəlcə bu məsələni xüsusi hal üçün həll edək:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9.13}$$

tənliyinin (9.10) sərhəd və (9.11) başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapmalı.

(9.13) tənliyinin (9.10) sərhəd şərtlərini ödəyən həllini

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

şəklində axtaraq. $u(x,t)$ funksiyasının törəmələrini tapıb (9.13) tənliyində yerinə yazsaq,

$$T'(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

və ya

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

münasibətini alarıq. Buradan çıxır ki, $\dfrac{X''(x)}{X(x)}$ və $\dfrac{T'(t)}{a^2T(t)}$ nisbətləri sabit olmalıdırlar:

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 .$$

Bu münasibətlərdən

$$T''(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0 ,$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

tənliklərini alarıq. Bu tənliklərin həlli uyğun olaraq

$$T(t) = Ae^{-\lambda^2 a^2 t} ,$$

$$X(x) = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x$$

şəklində olar. Sərhəd şərtlərini nəzərə alsaq,

$$X(0) = c_1 = 0 ; \quad X(l) = c_2 \sin\lambda l = 0$$

və $c_2 \neq 0$ olduğuna görə (əks halda $u \equiv 0$ olardı) çıxır ki, $\lambda l = n\pi$ olmalıdır. Burada n parametrinə ancaq tam və müsbət qiymətlər verməklə kifayətlənmək olar. n-nin bu qiymətlərinə uyğun gələn λ-nın qiymətlərini λ_n ilə işarə etsək, $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{l}$ alarıq. Onda sərhəd şərtlərini ödəyən xüsusi həllər

$$u_n(x,t) = A_n \sin\frac{n\pi}{l} x e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$$

şəklində olar. Bu həllərdən

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

sırasını düzəldək. Aşkardır ki, $u(x,t)$ funksiyası formal olaraq (9.10) sərhəd şərtlərini ödəyir. Bu funksiya üçün başlanğıc şərtləri nəzərə alsaq,

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

olar.

A_n əmsalları

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi \quad (n=1,2,\dots)$$

düsturu ilə tapılır. Göstərmək olar ki, əmsalları (9.11) düsturu ilə təyin olunan

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

sırasının cəmi olan $u(x,t)$ funksiyası (9.13) tənliyini və (9.14), (9.15) şərtlərini ödəyir.

Misal 9.1. $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0<x<l)$, $t>0$ tənliyinin,

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le\frac{l}{2} \ \textit{olduqda}, \\ l-x, & \frac{l}{2}\le x<l \ \textit{olduqda} \end{cases}$$

başlanğıc şərtlərini və

$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0$$

sərhəd şərtlərini ödəyən həllini tapmalı.

Həlli.

Verilmiş sərhəd şərtlərini ödəyən Koşi məsələsinin həllini

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}x$$

şəklində axtaraq, burada

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_0^{l/2} x\sin\frac{k\pi}{l}xdx+\int_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx\,.$$

Alınan inteqralları hissə-hissə inteqrallamaqla,

$$A_k=\frac{4l}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}$$

münastbətini alarıq. Beləliklə, tələb olunan həlli

$$u(x,t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}x$$

yaxud

$$u(x,t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}\sin\frac{k\pi}{2}e^{-\left[\frac{(2n+1)\pi}{l}\right]^2 t}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

şəklində tapırıq.

9.4. Ucları sabit temperaturda saxlanan çubuqda istiliyin yayılması

Tutaq ki, uclarında temperatur sabit olan çubuq verilmişdir. Bu çubuqda istiliyin yayılması məsələsi aşağıdakı kimi qoyulur:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

tənliyinin

$$u\big|_{x=0} = A,\ u\big|_{x=l} = B$$

sərhəd və

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x)$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapmalı.

Bu məsələnin həllini

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{9.14}$$

sırası şəklində axtaraq. Burada

$$T_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l u(\xi,t)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi \tag{9.15}$$

(9.15)-i hissə-hissə inteqrallasaq və $u(x,t)$ funksiyasının sərhəd şərtlərini ödəməsini nəzərə alsaq,

$$\frac{1}{2}T_n(t) = \frac{1}{n\pi}[A-(-1)^n B] - \frac{1}{(an\pi)^2}\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

münasibəti alınar. (9.15)-i t-yə nəzərən diferensiallamaqla axırıncı bərabərliyi nəzərə alsaq,

$$T_n'(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = \frac{2a^2 n\pi}{l^2}[A-(-1)^n B]$$

münasibətini və buradan

$$T_n(t) = A_n e^{\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} + 2\frac{A-(-1)^n B}{n\pi} \tag{9.16}$$

alarıq. (9.11) başlanğıc şərtini nəzərə alsaq,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x)$$

olar. Deməli,

$$T_n(t)=A_n+\frac{2}{n\pi}[A-(-1)^nB]=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi$$

və ona görə də

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi-\frac{2}{n\pi}[A-(-1)^nB] \tag{9.17}$$

olar.

Beləliklə, qoyulmuş məsələnin həlli (9.14) sırası şəklində, onun $T_n(t)$ əmsalları isə (9.16) düsturu ilə təyin olunar. (9.16) düsturuna daxil olan A_n əmsalları isə (9.17) düsturu ilə tapılır.

9.5. Ucları dəyişən temperaturda saxlanan çubuqda istiliyin yayılması

Ucları dəyişən temperaturda saxlanan çubuqda istiliyin yayılması məsələsi aşağıdakı kimi qoyulur:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2} \tag{9.18}$$

tənliyinin

$$u\big|_{x=0}=\varphi_1(t),\ u\big|_{x=l}=\varphi_2(t) \tag{9.19}$$

sərhəd və

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x) \tag{9.20}$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapmalı.

Bu məsələnin həllini də (9.14) sırası şəklində axtaraq. Burada da əvvəl apardığımız mühakiməni təkrar etsək, $T_n(t)$ üçün

$$T_n'(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t)=\frac{2a^2n\pi}{l^2}[\varphi_1(t)-(-1)^n\varphi_2(t)]$$

tənliyini, buradan isə

$$T_n(t)=A_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}+$$

$$+\frac{2a^2n\pi}{l^2}e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\int_0^l e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 \xi}[\varphi_1(\xi)-(-1)^n\varphi_2(\xi)]d\xi$$

alarıq. (9.20) başlanğıc şərtlərini nəzərə alsaq,

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

olar. Buradan da

$$T_n(0)=A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi$$

olmalıdır.

$T_n(t)$ və A_n-in bu qiymətlərini (9.14) sırasında yazsaq, tələb olunan məsələnin həllini alarıq.

9.6. Bircinsli olmayan istilikkeçirmə tənliyinin həlli

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \qquad (9.21)$$

bircinsli olmayan istilikkeçirmə tənliyinin

$$u\big|_{x=0}=\varphi_1(t),\ u\big|_{x=l}=\varphi_2(t) \qquad (9.22)$$

sərhəd və

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x) \qquad (9.23)$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həllinin tapılması məsələsini nəzərdən keçirək. Əvvəlcə bir xüsusi halı nəzərdən keçirək. Tutaq ki,

$$\varphi(x)=0\,,\quad \varphi_1(t)=0\,,\quad \varphi_2(t)=0\,.$$

Onda qoyulmuş məsələ aşağıdakı şəkildə olar:

(9.21) tənliyinin

$$u\big|_{x=0}=0\,,\; u\big|_{x=l}=0 \qquad (9.24)$$

sərhəd və

$$u\big|_{t=0}=0 \qquad (9.25)$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapmalı.

(9.21) tənliyinin (9.24) sərhəd şərtini ödəyən həllini

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (9.26)$$

sırası şəklində axtaraq. Tutaq ki, (9.21) tənliyinin sağ tərəfinə daxil olan $f(x,t)$ funksiyası $(0,l)$ intervalında sinuslar üzrə Furye sırasına ayrılır:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x\,.$$

Buradakı $f_n(t)$ əmsalları

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi$$

düsturu ilə hesablanır. $f(x,t)$ və $u(x,t)$-nin ifadələrini (9.21) tənliyində yazsaq,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\left[\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2u_n(t)+u_n'(t)-f_n(t)\right]=0$$

münasibətini alarıq. Buradan

$$u_n'(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 u_n(t)=f_n(t) \qquad (9.27)$$

olmalıdır. $u(x,t)$ funksiyasının (9.25) başlanğıc şərtlərini ödəməsi üçün

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x=0 \qquad (9.28)$$

münasibəti ödənilməlidir. Onda (9.27) tənliyinin (9.28) başlanğıc şərtini ödəyən həlli

$$u_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2(t-\xi)} f_n(\xi)d\xi \qquad (9.29)$$

şəklində olar. $u_n(t)$-nin bu qiymətini (9.26)-da nəzərə alsaq, baxılan məsələnin

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2(t-\xi)} f_n(\xi)d\xi\right]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

həllini alarıq.

Göstərmək olar ki, müəyyən şərtlər daxilində verilmiş məsələnin həllini bu məsələnin həllinə gətirmək olar. Bu məqsədlə

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)$$

əvəzləməsini aparaq. Burada $w(x,t)$ funksiyası məlum, $v(x,t)$ funksiyası isə

$$v(x,t)=\varphi_1(t)+\frac{x}{l}[\varphi_2(t)-\varphi_1(t)]$$

kimi təyin olunan funksiyadır.

9.7. Sonsuz çubuqda istiliyin yayılması məsələsi

Verilmiş

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

tənliyinin $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ oblastında elə həllini tapmalı ki,

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

başlanğıc şərtini ödəsin.

Məsələni həll etmək üçün dəyişənlərə ayırma üsulunu tətbiq edək, yəni tənliyin həllini

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

şəklində axtaraq. Onda

$$u_\lambda(x,t) = e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]$$

münasibəti alınır, burada sabitlər əvəzinə λ-dan asılı olan $A(\lambda)$ və $B(\lambda)$ funksiyaları götürülmüşdür.

$$\sum_\lambda e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]$$

cəmi də tənliyin həlli olduğundan, λ parametrinə görə $[0,\infty)$ üzrə inteqrallasaq

$$u(x,t) = \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda$$

olduğu alınır. Başlanğıc şərtinə əsasən

$$\varphi(x) = \int_0^\infty [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda .$$

Burada

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha d\alpha ,$$

$$B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha d\alpha ,$$

olduğunu nəzərə alsaq,

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(\alpha)\left(\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha-x)d\alpha\right)\right]d\alpha$$

olar. Bu isə qoyulmuş məsələnin həllidir. Burada müəyyən çevirmələr aparmaqla, ümumi həll üçün

$$u(x,t)=\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4\alpha^2 t}}d\alpha$$

olduğu alınır.

Puasson inteqralı adlanan bu düstur sonsuz çubuqda istiliyin yayılması üçün qoyulmuş məsələnin həllidir.

Misal 9.2. $\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tənliyinin,

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x)=\begin{cases}u_0, & x_1<x\le x_2 \quad olduqda,\\ 0, & x<x_1,\ x>x_2 \quad olduqda\end{cases}$$

şərtini ödəyən həllini tapın.

Həlli.

Çubuq sonsuz uzunluqlu olduğundan, verilmiş məsələnin həlli

$$u(x,t)=\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4\alpha^2 t}}d\alpha$$

Puasson inteqralı şəklində tapılır.

$\varphi(x)$ funksiyası (x_1, x_2) intervalında sabit u_0 temperpturuna bərabər, və bu intervaldan kənarda isə sıfıra bərabər olduğuna görə həll

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4\alpha^2 t}} d\alpha$$

şəklində olar. Alınan inteqralı

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\mu^2} d\mu$$

şəklində ehtimal inteqralına gətirmək olar.

Doğrudan da, $\frac{x-\alpha}{2\alpha\sqrt{t}} = \mu$, $d\alpha = -2\alpha\sqrt{t}d\mu$ əvəz etsək,

$$u(x,t) = -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-x_1}{2\alpha\sqrt{t}}}^{\frac{x-x_2}{2\alpha\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_1}{2\alpha\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu - \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_2}{2\alpha\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu$$

olar. Beləliklə, verilmiş məsələnin həlli

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-x_1}{2\alpha\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2\alpha\sqrt{t}}\right)\right]$$

düsturu ilə ifadə olunur.

10. LAPLAS TƏNLİYİ

10.1. Laplas tənliyi üçün əsas sərhəd məsələləri

Tutaq ki, Ω səthi ilə əhatə olunmuş bircinsli E cisimi verilmişdir. Bu cisimin müxtəlif nöqtələrində temperaturu ifadə edən $u = u(x, y, z, t)$ funksiyası

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{10.1}$$

istilikkeçirmə tənliyini ödəyir. Cisimdə istiliyin yayılması qərarlaşmış (proses stasionar) olarsa, başqa sözlə, cisimdə istiliyin yayılması zamandan asılı olmayıb yalnız cisimin nöqtələrinin koordinatlarından asılıdırsa, onda $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ olar və (10.1) tənliyi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{10.2}$$

şəklinə düşər.

(10.2) tənliyi ***Laplas tənliyi***, bu tənliyi ödəyən funksiya isə ***harmonik funksiya*** adlanır. Qeyd etmək lazımdır ki,

$u = (x^2 - y^2) + Bxy + Cx + Dy$ (A, B, C, D istənilən sabitlərdir)

və eləcə də

$$u = \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

funksiyaları $r = 0$ olan (x_0, y_0) nöqtəsindən başqa hər yerdə

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Laplas tənliyini ödəyir. Laplas tənliyi ikitərtibli xətti bircinsli diferensial tənlikdir.

Laplas tənliyi $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ polyar koordinatlarda

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0$$

şəklində, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ silindrik koordinatlarda

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

şəklində, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$ sferik koordinatlarda isə

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0$$

şəklində olur.

Laplas tənliyinin həll etmək üçün əlavə şərtlər verilir. Laplas tənliyinə gətirilən aşağıdakı kimi sərhəd məsələlərinə baxılır.

Dirixle məsələsi. E cisiminin daxilində (10.2) tənliyini ödəyən və onun Ω səthinin $M(x, y, z)$ nöqtələrində verilmiş $f(M)$ qiymətlərini alan $u(M) = u(x, y, z)$ funksiyasını tapmalı.

Bu məsələni aşağıdakı kimi də ifadə etmək olar:

E oblastının daxilində harmonik və onun Ω səthi üzərində

$$u\big|_{\Omega} = f(M)$$

sərhəd şərtini ödəyən $u(M)$ funksiyasını tapmalı.

Müstəvi oblastlara baxıldıqda u funksiyası ikidəyişənli ($u(x, y)$ və ya $u(r,\varphi)$) olur və Laplas tənliyi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (10.3)$$

və ya polyar koordinatlda

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0 \qquad (10.4)$$

şəklində yazılır.

(10.3) tənliyi üçün Dirixle məsələsi aşağıdakı kimi qoyulur:

Qapalı Γ müstəvi əyrisinin daxilində (10.3) Laplas tənliyini və onun üzərində

$$u\big|_{\Gamma}=f(x,y)$$

sərhəd şərtini ödəyən $u(x,y)$ funksiyasını tapmalı.

Birölçülü oblastlar üçün Laplas tənliyi

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0$$

kimi yazılır və onun həlli

$$u(x,y)=Ax+B$$

şəklində xətti funksiyadır. Bu halda, $[a,b]$ parçası üçün Dirixle məsələsi $u\big|_{x=a}=u_a$ və $u\big|_{x=b}=u_b$ sərhəd şərtləri vasitəsi ilə qoyulur və onun həlli

$$u(x)=\frac{u_b-u_a}{b-a}x-\frac{bu_a-au_b}{b-a}$$

funksiyasıdır.

Laplas tənliyi üçün Dirixle məsələsi qoyulduqda axtarılan funksiyanın oblastın sərhəd nöqtələrində qiymətləri verilir. Sərhəd məsələsi üçün oblastın sərhəd nöqtələrinin $\vec{n}$ normalı istiqamətində $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ törəməsinin qiymətləri də verilə bilər. Bu halda, Laplas tənliyi üçün ikinci sərhəd məsələsi alınır. Bu məsələ ***Neyman məsələsi*** adlanır.

Neyman məsələsi. E oblastının daxilində (10.2) Laplas tənliyini və onun Ω səthi üzərində

$$u\big|_{\Omega} = f(M)$$

sərhəd şərtini ödəyən $u(M)$ funksiyasını tapmalı.

Bu məsələlərdən bir qədər fərqli olan üçüncü sərhəd məsələsi də mövcuddur.

Üçüncü sərhəd məsələsi. E oblastının daxilində (10.2) Laplas tənliyini və onun Ω səthi üzərində

$$\left(u + \varphi \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right)\Bigg|_{\Omega} = f(M)$$

sərhəd şərtini ödəyən $u(M)$ funksiyasını tapmalı.

Laplas tənliyi üçün qeyd olunan sərhəd məsələləri ***daxili sərhəd məsələləri*** adlanır.

10.2. Dairə üçün Dirixle məsələsinin həlli

Tutaq ki, Laplas tənliyi üçün belə bir Dirixle məsələsi qoyulmuşdur: mərkəzi koordinat başlanğıcında olan R radiuslu dairə daxilində harmonik və onun çevrəsi üzərində verilmiş qiyməti alan $u(x, y)$ funksiyasını tapmalı.

Məsələni həll etmək üçün müstəvi üzərində ($or\varphi$) polyar koordinat sistemini nəzərdən keçirək. Bu sistemdə qoyulmuş məsələni polyar koordinatlarla yazılmış (10.4) Laplas tənliyi üçün belə ifadə etmək olar: $0 \le r < R$ dairəsində (10.4) tənliyinin həlli olan və

$$u\big|_{r=R} = u(R,\varphi) = f(\varphi) \qquad (10.5)$$

sərhəd şərtini ödəyən $u(r,\varphi)$ funksiyasını tapmalı.

Məsələni Furye üsulu ilə həll edək. (10.4) tənliyinin həllini

$$u(r,\varphi)=v(r)\Phi(\varphi) \tag{10.6}$$

şəklində axtaraq. Funksiyanın bu ifadəsini (10.4) tənliyində yazdıqda

$$\frac{r^2v''(r)+rv'(r)}{v(r)}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\lambda$$

bərabərliyi alınar.

Buradan $v(r)$ və $\Phi(\varphi)$ funksiyalarını tapmaq üçün

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0,$$

$$r^2v''(r)+rv'(r)-\lambda v(r)=0$$

kimi adi diferensial tənliklər alınır.

Birinci tənliyin ümumi həlli

$$\Phi(\varphi)=A\cos\sqrt{\lambda}\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\varphi \tag{10.7}$$

şəklində yazılır (A və B ixtiyari sabitlərdir).

Şərtə əsasən $\Phi(\varphi)$ funksiyası 2π dövrlü dövri funksiya olmalıdır. Odur ki, $\sqrt{\lambda}=n$ götürmək olar. Onda (10.7) həllini

$$\Phi(\varphi)=A\cos n\varphi+B\sin n\varphi$$

şəklində yazmaq olar.

$\lambda=n^2$ qiymətində ikinci tənlik

$$r^2v''(r)+rv'(r)-n^2v(r)=0$$

şəklində yazılır. Bu Eyler tənliyidir və onun həllini $v(r)=r^{\alpha}$ şəklində axtarsaq, $v(r)=r^{n}$ və $v(r)=r^{-n}$ şəklində iki həll alarıq.

$n>0$ olduğuna görə $v(r)=r^{-n}$ həlli koordinat başlanğıcında (yəni $r=0$ olduqda) sonsuzluğa çevrilir. Deməli, bu həlli götürmək olmaz. Onda tənliyin həlli

$$u(r,\varphi) = r^n (A\cos n\varphi + B\sin n\varphi)$$

olduğuna görə həm həll və həm də A, B sabitləri n-dən asılı olar, yəni həll

$$u_n(r,\varphi) = r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

şəklində olar. Onda tənliyin ümumi həllini

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

kimi yazmaq olar.

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \; A_n = a_n, \; B_n = b_n \quad (n = 1,2,\dots)$$

isarə etməklə

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \qquad (10.8)$$

a_n və b_n əmsallarını təyin etmək üçün (10.5) sərhəd şərtindən istifadə edək. Onda

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Buradan alınır ki, $a_n R^n$ və $b_n R^n$ ədədləri verilmiş $f(\varphi)$ funksiyasının Furye əmsallarıdır:

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt.$$

Bu qiymətləri (10.8) sırasında yerinə yazdıqda

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(t)+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{n}\cos n(t-\varphi)\right]dt$$

həlli alınır.

Müəyyən çevirmə vasitəsi ilə alınan həlli

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(t-\varphi)+r^2}dt$$

şəklində yazmaq olar. Bu inteqrala ***Puasson inteqralı*** deyirlər. Deməli, bu məsələnin həlli Puasson inteqralı ilə təyin olunur.

10.3. Yarımmüstəvi üçün Dirixle məsələsinin həlli

Tutaq ki,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{10.9}$$

Laplas tənliyi üçün aşağıdakı Dirixle məsələsi qoyulmuşdur: yuxarı $R^{+}=\{-\infty<x<\infty, y>0\}$ yarımmüstəvidə (10.9) Laplas tənliyinin həlli olan və

$$u\Big|_{y=0}=u(x,0)=f(x)\quad -\infty<x<\infty \tag{10.10}$$

sərhəd şərtini ödəyən məhdud $u(x,y)$ funksiyasını tapmalı.

Məsələni həll etmək üçün hələlik məchul olan $a(\lambda)$ və $b(\lambda)$ funksiyaları daxil olan

$$u_{\lambda}(x,y)=[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]e^{-\lambda y}$$

funksiyasına baxaq. Bu funksiya ixtiyari $\lambda>0$ ədədi üçün yuxarı yarımmüstəvidə məhduddur və (10.9) tənliyini ödəyir.

(10.9) tənliyi xətti bircinsli olduğuna görə

$$u(x,y)=\int_0^\infty [a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]e^{-\lambda y}d\lambda \qquad (10.11)$$

funksiyası da həmin tənliyin həlli olar.

$a(\lambda)$ və $b(\lambda)$ funksiyalarını elə seçək ki, (10.11) funksiyası üçün (10.10) sərhəd şərti də ödənilsin:

$$u(x,0)=f(x)=\int_0^\infty [a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]e^{-\lambda y}d\lambda \ .$$

Alınan bərabərliyi $f(x)$ funksiyasının Furye inteqralına

$$f(x)=\int_0^\infty \left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi\right)\cos\lambda x+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\right)\sin\lambda x]\right]d\lambda$$

ayrılışı ilə müqayisə etsək,

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi\ ,\ b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\ . \quad (10.12)$$

Bu qiymətləri (10.11) bərabərliyində yazdıqda (10.9) tənliyinin sərhəd şərtlərini ödəyən

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\left[\int_0^\infty e^{-\lambda y}\cos\lambda(\xi-x)d\lambda\right]d\xi \ .$$

həlli alınır.

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos xtdt=\frac{a^2}{a^2+x^2}$$

məlum bərabərliyinə əsasən tapılan həlli daha qısa yazmaq olar.

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\frac{yd\xi}{y^2+(\xi-x)^2} \ .$$

Bu bərabərliyi

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+x)\frac{yd\xi}{y^2+t^2} \qquad (10.13)$$

kimi də yazmaq olar. (10.13) ifadəsi ***Puasson-Koşi inteqralı*** adlanır.

Misal 10.1. Uzunluğu l olan simin uclarında istiliyin yayılması u_0, u_l (u_0, u_l sabitlərdir) olduqda, bu simdə istiliyin stasionar paylanmasını tapın.

Həlli.

Bu məsələ birölçülü hal üçün Dirixle məsələsinə gətirilir:

$$\frac{d^2u}{dt^2}=0$$

tənliyinin

$$u\big|_{x=0}=u_0\ ,\ u\big|_{x=l}=u_l$$

sərhəd şərtlərini ödəyən həllini tapmalı.

Tənliyin ümumi həlli

$$u=c_1x+c_2$$

olar (c_1, c_2 ixtiyari sabitlərdir). Sərhəd şərtlərinə əsasən

$$c_1\cdot 0+c_2=u_0, \quad c_1\cdot l+c_2=u_l,$$

olar. Buradan $c_1=\dfrac{u_l-u_0}{l}$, $c_2=u_0$ alarıq. Onda

$$u=\frac{u_l-u_0}{l}x+u_0$$

Misal 10.2. Laplas tənliyinin, $1\le x^2+y^2\le 4$ halqasında, $u\big|_{x^2+y^2=1}=0$, $u\big|_{x^2+y^2=4}=x+2\ln 2$ sərhəd şərtlərini ödəyən həllini tapın.

Həlli.

Əvvəlcə verilmiş məsələni polyar koordinatlarda yazaq:

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0,$$

$$u(1,\varphi)=0,\ u(2,\varphi)=2\cos\varphi+2\ln 2.$$

Furye üsulunu tətbiq edək. Laplas tənliyinin həllini

$$u(r,\varphi)=R(r)\cdot\Phi(\varphi)$$

şəklində axtaraq, burada $\Phi(\varphi)$ və $R(r)$ funksiyaları uyğun olaraq,

$$\Phi''(\varphi)+k^2\Phi(\varphi)=0,$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)-k^2R(r)=0$$

tənliklərinin həllidirlər. $k=0$ olduqda

$$\Phi_0(\varphi)=c_1+c_2\varphi,$$

$$R_0(r)=c_3+c_4\ln r,$$

$k>0$ olduqda isə

$$\Phi(\varphi)=A\cos k\varphi+B\sin k\varphi,$$

$$R(r)=cr^k+dr^{-k}$$

olar. Axtarılan funksiyanın φ-yə nəzərən 2π dövrlü olmasından alınır ki, $c_2=0$ olmalı, k isə tam ədəd olmalıdır. $u(1,\varphi)=0$ şərtinə əsasən $c_3=0$, $c+d=0$ olar. Beləliklə, Laplas tənliyinə aid sərhəd şərtlərindən birincisini ödəyən u_n xüsusi həllər ardıcıllığı

$$u_0(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}\ln r,$$

$$u_n(r,\varphi)=Sh(n\ln r)(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)\ \ (n=1,2,\dots)$$

şəklində olar.

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}Sh(n\ln r)(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)$$

funksiyasına baxaq. Bu funksiya A_0, A_n, B_n -nin istənilən qiymətlərində Laplas tənliyini və sərhəd şərtlərindən birincisini ödəyir. A_0, A_n, B_n əmsallarını elə seçək ki, $u(r,\varphi)$ funksiyası sərhəd şərtlərinin ikincisini də ödəsin, yəni

$$u(2,\varphi)=\frac{A_0}{2}\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}Sh(n\ln 2)(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)=2\ln 2+2\cos\varphi.$$

Aydındır ki, φ -nin istənilən qiymətində bu bərabərliyin ödənilməsi üçün

$$\frac{A_0}{2}\ln 2=2\ln 2,\ Sh(n\ln 2)A_1=2,\ B_1=0,\ A_n=B_n=0\ \ (n=2,3,\dots)$$

olmalıdır. Buradan $A_0=4$, $A_1=4$, $B_1=0$ olar. Deməli, axtarılan funksiya

$$u(r,\varphi)=\ln r^2+8Sh(\ln r)\cos\varphi$$

şəklində olar.

(r,φ) koordinatlarından (x,y) koordinatlarına keçsək,

$$u(x,y)=\ln(x^2+y^2)+4x\frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2}$$

olar.

Misal 10.3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ Laplas tənliyinin, $0\le x\le 1$, $y\ge 0$ zolağında, $u(0,y)=u(1,y)=0$, $u(x,0)=1-x$, $u(x,\infty)=0$ sərhəd şərtlərini ödəyən həllini tapın.

Həlli.

Laplas tənliyinin həllini

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

şəklində axtaraq. Onda

$$X''(x)+\lambda^2 X(x)=0,$$

$$Y''(y)-\lambda^2 Y(y)=0,$$

tənliklərini alarıq. Bu tənliklərin həlləri uyğun olaraq

$$X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x,$$

$$Y(y)=C_1e^{\lambda y}+D_1e^{-\lambda y}$$

olar. Bu ifadələri əvəzləmədə yazaq. Onda

$$u(x,y)=(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)\left(C_1e^{\lambda y}+D_1e^{-\lambda y}\right).$$

Alınan funksiya $u(0,y)=u(1,y)=0$ sərhəd şərtlərini ödədiyinə görə $A=0$, $\lambda=n\pi$ ($n=1,2,\dots$) olar. n-in hər bir qiymətinə $\lambda=\lambda_n$ uyğun olduğuna görə tənliyin $u_n(x,y)$ xüsusi həlləri

$$u_n(x,y)=\left(C_ne^{n\pi y}+D_ne^{-n\pi y}\right)\sin n\pi x$$

olar ($BC_1=C$; $BD_1=C$). Onda ümumi həll

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_ne^{n\pi y}+D_ne^{-n\pi y}\right)\sin n\pi x$$

şəklində olar. Burada, $u(x,0)=1-x$, $u(x,\infty)=0$ şərtlərini nəzərə alsaq,

$$C_n = 0 \ (n=1,2,\dots);$$

$$1-x=\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin n\pi x$$

alınar. Buradan isə,

$$D_n = 2\int_0^1 (1-x)\sin n\pi x dx = \frac{2}{n\pi} \ (n=1,2,\dots)$$

olar.

Beləliklə,

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-n\pi y}\sin n\pi x$$

verilmiş məsələnin həlli olar.

11. LAPLAS ÇEVRİLMƏSİ VƏ ONUN TƏTBİQLƏRİ

11.1. Başlanğıc funksiya və Laplas çevrilməsi

Tutaq ki, $f(t)$ həqiqi oxda təyin olunmuş və aşağıdakı şərtləri ödəyən funksiyadır:

1. İstənilən sonlu parçada hissə-hissə kəsilməyəndir, yəni onun sonlu sayda birinci növ kəsilmə nöqtəsi var;

2. Arqumentin mənfi qiymətlərində, yəni $t<0$ olduqda $f(t)\equiv 0$ olur;

3. Elə sabit $M>0$ və $S_0\geq 0$ ədədləri mövcuddur ki, t arqumentinin bütün $t\geq 0$ qiymətlərində

$$\left|f(t)\right|\leq Me^{S_0 t},\ t\geq 0 \qquad (11.1)$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Bu üç şərti ödəyən funksiyalar ***başlanğıc funksiya*** və ya ***orijinal*** adlanır.

S_0 ədədi $f(t)$ funksiyasının ***artım göstəricisi*** adlanır.

Əgər $f_1(t), f_2(t),\ldots, f_n(t)$ – artım göstəriciləri $S_1, S_2,\ldots, S_n$ olan orijinallardırsa, onda $f(t)=c_1f_1(t)+c_2f_2(t)+\cdots+c_nf_n(t)$, $c_i\in\mathbb{C}$ funksiyası da artım göstəricisi $S_0=\{S_1,S_2,\ldots,S_n\}$ olan orijinaldır.

Tutaq ki, $f(t)$ – artım göstəricisi S_0 olan orijinaldır. Onda aşağıdakı funksiyalar orijinallardır:

a) $\left|f(t)\right|$ artım göstərici S_0;

b) $f_1(t)=f(\alpha\cdot t)$, $\alpha>0$, artım göstərici $\alpha\cdot S_0$;

c) $f_2(t)=e^{\lambda t}(t)$, $\lambda\in\mathbb{C}$, artım göstərici

$$S=\begin{cases} S_0+\operatorname{Re}\lambda, & S_0+\operatorname{Re}\lambda>0 \quad olarsa, \\ 0, & S_0+\operatorname{Re}\lambda>0 \quad olarsa; \end{cases}$$

d) $f_4(t)=\begin{cases} 0, & t<\tau \quad olarsa \\ f(t-\tau), & t\geq\tau \quad olarsa \end{cases}$, artım göstərici S_0, $\tau>0$;

e) $f_4(t)=t^z\cdot f(t)$, $z\in\mathbb{C}$, artım göstərici S_0;

f) $g(t)=\int\limits_0^t f(z)dz$, $0\leq t<\infty$, artım göstərici S_0;

p kompleks parametrindən asılı olan

$$F(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)dt,\ p=\sigma+i\tau \qquad (11.2)$$

şəklində qeyri-məxsusi inteqralı $f(t)$ orijinalının ***surəti*** (***Laplas inteqralı***, $L-$***surəti***) adlanır.

$f(t)$ orijinalından $F(p)$ surətinə keçid əməliyyatı ***Laplas çevrilməsi*** adlanır.

$f(t)$ orijinalı və $F(p)$ surəti arasındakı uyğunluq

$$f(t)\doteqdot F(p),\quad L[f(t)]=F(p),\quad f(t)\leftarrow\!\!\div F(p)$$

kimi yazılır.

Verilmiş $f(t)$ başlanğıc funksiyanın $F(p)$ Laplas çevrilməsini və əksinə, verilmiş Laplas çevrilməsinə görə $f(t)$ başlanğıc funksiyanın tapılması məsələləri ilə ***operasiya hesabı*** məşğul olur. Bu nəzəriyyənin əsasını ingilis mühəndis-energetiki Hevisayd qoymuşdur.

Verilmiş məsələnin həllini kifayət qədər sadələşdirən operasiya hesabı bir çox məsələlərdə geniş tətbiq olunur. Belə ki, operasiya hesabında diferensiallama və inteqrallama əməlləri cəbri əməllərlə, diferensial tənliklər isə uyğun cəbri tənliklərlə əvəz olunur və onun tapılmış həllinə görə diferensial tənliyin axtarılan həlli qurulur.

Teorem 1. (Varlıq teoremi) Tutaq ki, $f(t)$ başlanğıc funksiyadır. Onda (11.2) inteqralı $\operatorname{Re} p = \sigma > S_0$ yarımmüstəvisində mütləq yığılandır və $F(p)$ funksiyası həmin yarımmüstəvidə analitik funksiyadır.

Ən sadə başlanğıc funksiya

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \ \ olduqda \\ 0, & t < 0 \ \ olduqda \end{cases}$$

şəklində müəyyən olunan Hevisayd funksiyasıdır. Bu funksiyaya ***vahid funksiya*** da deyirlər. Aydındır ki, $\varphi(t)$ funksiyası 1–3 şərtlərini ödəyirsə, onda

$$\varphi(t) \cdot \eta(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \geq 0 \ \ olduqda \\ 0, & t < 0 \ \ olduqda \end{cases}$$

funksiyası da başlanğıc funksiya olar.

Misal 11.1.

$$f(t) = \begin{cases} e^{2t} \sin 3t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

funksiyasının başlanğıc funksiya olub-olmamasını araşdırmalı.

Həlli.

Göstərək ki, 1–3 şərtləri ödənilir.

1. İxtiyari sonlu $[t_1, t_2]$ parçasında $\int\limits_{t_1}^{t_2} e^{2t} \sin 3t dt$ inteqralı var.

2. $f(t)$ funksiyasının verilməsinə görə $t < 0$ qiymətlərində $f(t) = 0$ olur.

3. Hər bir t üçün $\left|e^{2t}\sin 3t\right| \le e^{2t}$ bərabərsizliyi ödənilir. Burada $S_0 = 2$, M əvəzinə istənilən vahiddən böyük ədədi götürmək olar.

Deməli, şərtlərin hər biri ödənildiyinə görə verilmiş funksiya başlanğıc funksiyadır.

Misal 11.2. $f(t) = b^t \eta(t)$, $b > 0$ funksiyasının başlanğıc funksiya olub-olmamasını araşdırmalı.

Həlli.

1. İstənilən $0 < t_1 < t_2 < \infty$ üçün

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} b^t \eta(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} b^t dt = \frac{b^{t_2} - b^{t_1}}{\ln b}$$

sonlu ədəddir.

2. $b^t \eta(t) = \begin{cases} b^t, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ münasibəti doğrudur.

3. $\left|b^t \eta(t)\right| \le b^{t \ln b}$

münasibətinə əsasən, $n \ge 1$ və $S_0 = \left|\ln b\right|$ qəbul etsək, 3-cü şərtin ödənildiyi alınır, yəni $f(t) = b^t \eta(t)$ funksiyası başlanğıc funksiyadır.

Misal 11.3. $f(t) = e^{t^2} \eta(t)$ funksiyasının başlanğıc funksiya olub-olmamasını araşdırmalı.

Həlli.

$f(t) = e^{t^2} \eta(t)$ funksiyası üçün ilk iki şərtin ödənilməsi aşkardır. Arqumentin ixtiyari $t > 0$ qiymətlərində

$$f(t) = e^{t^2} \eta(t) = e^{t^2}$$

olduğuna görə

$$|f(t)| < Me^{S_0 t}$$

münasibətinin doğruluğu mümkün deyil. Ona görə də verilmiş funksiya başlanğıc funksiya deyil.

Misal 11.4. $f(t) = e^{2t}$ funksiyasının Laplas çevrilməsini tərifdən istifadə etməklə tapın.

Həlli.

Aydındır ki, $f(t) = e^{2t}$ funksiyası başlanğıc funksiyadır. $M > 1$, $S_0 = 2$. Ona görə də $\operatorname{Re} p > 2$ yarımmüstəvisində

$$F(p) = \int_{\infty}^{+\infty} e^{2t} e^{-pt} dt = \int_{\infty}^{+\infty} e^{(2-p)t} dt = -\frac{1}{p-2} e^{-(p-2)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-2}$$

analitik funksiyası var. Deməli,

$$f(t) = e^{2t} \risingdotseq \frac{1}{p-2} = F(p).$$

11.2. Bəzi elementar funksiyaların Laplas çevrilməsi

Laplas çevrilməsinin tərifinin tətbiqi ilə bəzi elementar funksiyaların Laplas çevrilməsini tapaq:

1. Hevisayd funksiyasının Laplas çevirməçi $\frac{1}{p}$ -yə bərabərdir:

$$L[\eta(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

2. $y = \sin t$ funksiyasının Laplas çevrilməsi $\frac{1}{p^2+1}$ -ə bərabərdir:

$$L[\sin t] = \int_0^\infty e^{-pt}\sin t dt = -\frac{e^{-pt}(-p\sin t - \cos t)}{p^2+1}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{p^2+1}.$$

3. $y = \cos t$ funksiyasının Laplas çevrilməsi $\dfrac{p}{p^2+1}$-ə bərabərdir:

$$L[\cos t] = \int_0^\infty e^{-pt}\cos t dt = -\frac{e^{-pt}(\sin t - p\cos t)}{p^2+1}\Bigg|_0^\infty = \frac{p}{p^2+1}.$$

4. $y = e^{\alpha t}$ funksiyasının Laplas çevrilməsi $\dfrac{1}{p-\alpha}$-ya bərabərdir:

$$L[e^{\alpha t}] = \frac{1}{p-\alpha}, \quad \mathrm{Re}(p-\alpha) > 0.$$

Doğrudan da,

$$L[e^{\alpha t}] = \int_0^\infty e^{-pt}e^{\alpha t}dt = -\frac{1}{p-\alpha}e^{-(p-\alpha)t}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{p-\alpha}.$$

5. $y = t^n$ funksiyasının Laplas çevrilməsi $\dfrac{n!}{p^{n+1}}$-ə bərabərdir:

$$L[t^n] = \int_0^\infty e^{-pt}t^n dt = -\frac{t^n e^{-pt}}{p}\Bigg|_0^\infty + \frac{n}{p}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-pt}dt = \frac{n}{p}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-pt}dt$$

və ya

$$L[t^n] = \frac{n}{p}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-pt}dt.$$

Bu bərabərliyi n dəfə ardıcıl tətbiq etməklə alırıq ki,

$$L[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

İndi isə fərz edək ki, $f(t) \leftarrow\!\!\!\div F(p)$ məlumdur. $f(at)$ $(a>0)$ funksiyasının surətini tapaq:

$$L[f(at)] = \int_0^\infty e^{-pt} f(at)dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-pt} f(at)d(at) = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Deməli,

$$L[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

olduğu alınır.

Bu düsturun köməyi ilə $\sin at$, $\cos at$, e^{at} surətlərini tapmaq olar:

$$\sin t \leftarrow\!\!\!\div \frac{1}{p^2+1} \text{ olduğundan}$$

$$\sin at \leftarrow\!\!\!\div \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1} = \frac{a}{p^2+a^2} \qquad (*)$$

Analoji qayda ilə

$$\cos at \leftarrow\!\!\!\div \frac{p}{p^2+a^2}$$

və

$$e^{at} \leftarrow\!\!\!\div \frac{1}{p-a}$$

olduğunu yaza bilərik.

Misal 11.5. $f(t) = \sin 3t$ funksiyasının Laplas çevrilməsini tapın.

Həlli.

$f(t) = \sin at$ funksiyasının Laplas çevrilməsi düsturuna əsasən

$$\sin 3t \leftarrow \frac{3}{p^2+9}$$

olar.

11.3. Laplas çevrilməsinin xassələri

Laplas çevrilməsinin əsas xassələrini müəyyən edən aşağıdakı teoremləri nəzərdən keçirək və baxılan bütün funksiyaların orijinal olduğunu fərz edək.

Teorem 2 (Xəttilik teoremi). $L[f_k(t)] = F_k(p), \quad \operatorname{Re} p > \alpha_k$ $(k = 1,2,\dots,k)$ olduqda, ixtiyari A_k sabit ədədləri üçün

$$L\left[\sum_{k=1}^{n} A_k f_k(t)\right] = \sum_{k=1}^{n} A_k L[f_k(t)], \ \operatorname{Re} p > \max \alpha_k, \ 1 \le k \le a \quad (11.3)$$

olar.

Misal 11.6. $f(t) = \sin at$ funksiyasının Laplas çevrilməsini tapın.

Həlli.

$\sin at = \frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat})$ olduğundan (11.3) bərabərliyinə əsasən

$$L[\sin at] = L\left[\frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat})\right] = \frac{1}{2i} L\left[e^{iat}\right] - \frac{1}{2i} L\left[e^{-iat}\right] =$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{p - ai} - \frac{1}{2i} \frac{1}{p + ai} = \frac{a}{p^2 + a^2}.$$

Teorem 3 (Oxşarlıq teoremi). $L[f(t)] = F(p), \ \operatorname{Re} p > S_0$ olduqda ixtiyari sabit $a > 0$ ədədi üçün

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \ \operatorname{Re} p > aS_0 \quad (11.4)$$

bərabərliyi doğrudur.

Misal 11.7. $f(t)=\cos at$ funksiyasının Laplas çevrilməsini tapın.

Həlli.

$L[\cos t]=\dfrac{p}{p^2+a^2}$ olduğundan (11.4) bərabərliyinə əsasən

$$L[\cos at]=\frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1}=\frac{p}{p^2+a^2}$$

olar.

Teorem 4 (Köçürmə teoremi). $L[f(t)]=F(p),\ \operatorname{Re}p>S_0$ olduqda, ixtiyari a ədədi üçün

$$L\left[e^{-at}f(t)\right]=F(p+a),\ \operatorname{Re}(p+a)>S_0 \qquad (11.5)$$

olar.

Hiperbolik funksiyaların tərifindən və bu teoremdən istifadə etməklə

$$sh\,at \leftarrow\!\!\div \frac{a}{p^2-a^2}\ ,$$

$$ch\,at \leftarrow\!\!\div \frac{p}{p^2-a^2}\ ,$$

$$e^{-at}\sin bt \leftarrow\!\!\div \frac{b}{(p+a)^2+b^2}\ ,$$

$$e^{-at}\cos bt \leftarrow\!\!\div \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$$

olduğunu alarıq.

Misal 11.8. $f(t)=e^{-t}\cos 3t+\frac{2}{3}e^{-t}\sin 3t$ funksiyasının Laplas çevrilməsini tapın.

Həlli.

$$e^{-t}\cos 3t \leftarrow\!\!\div \frac{p+1}{(p+1)^2+9^2},$$

$$e^{-t}\sin 3t \leftarrow\!\!\div \frac{p+3}{(p+1)^2+9^2}$$

məlum olduğundan, teorem 2-yə görə

$$F(p)=\frac{p+1}{(p+1)^2+9}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{(p+1)^2+9}$$

və ya

$$F(p)=\frac{p+3}{p^2+2p+10}$$

olar.

Teorem 5 (Keçikmə teoremi). $L\left[f(t)\right]=F(p),\ \operatorname{Re}p>S_0$ olduqda,

$$f_\tau(t)=\begin{cases}0, & t<\tau\\ f(t-\tau), & t\geq\tau\end{cases}$$

funksiyasının Laplas çevrilməsi

$$L\left[f_\tau(t)\right]=e^{-p\tau}F(p) \qquad (11.6)$$

olar.

Misal 11.9. $f_\tau(t)=\begin{cases}\sin(t-b), & t>b\\ 0, & t<b\end{cases}$ funksiyasının surətini tapın.

Həlli.

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & t>b\\ 0, & t<b\end{cases}$$ funksiyası üçün $\sin t \leftarrow\!\!\div \dfrac{1}{p^2+1}$

olduğundan (*) düsturuna görə

$$f_\tau(t)=\sin(t-b)\cdot\eta(t-b)\leftarrow\!\!\div \frac{e}{p^2+1}$$

olar.

Teorem 6 (Törəmənin surəti). Başlanğıc $f(t)$ funksiyasının bütün $f^{(k)}(t),(k=1,2,\dots,n)$ törəmələri orijinaldırsa və $f(t)\leftarrow\!\!\div F(p)$ ödənilirsə, onda istənilən k natural ədədi üçün

$$f^{k)}(t)\leftarrow\!\!\div p^kF(p)-p^{k-1}f(0)-p^{k-2}f'(0)-\ldots-f^{k-1}(0) \quad (11.7)$$

bərabərliyi doğrudur.

Xüsusi halda, $f(0)=f'(0)=...=f^{(n-1)}(0)=0$ olarsa,

$$f^{(n)}(t)\leftarrow\!\!\div p^n\cdot F(p) \quad (11.8)$$

olar.

Misal 11.10. $f(t)=\cos^2 t$ funksiyasının surətini tapın.

Həlli.

$f(t)\leftarrow\!\!\div F(p)$ qəbul edək. Onda başlanğıc $f(t)$ funksiyasının törəməsi qaydasına əsasən $f'(t)\leftarrow\!\!\div pF(p)-f(0)$

$$f'(t)=-2\cos t\sin t=-\sin 2t\leftarrow\!\!\div \frac{2}{p^2+4}$$

və $f(0)=1$ olduğundan

$$-\frac{2}{p^2+4}=pF(p)-1$$

olar. Buradan

$$pF(p)=1-\frac{2}{p^2+4}=\frac{p^2+2}{p^2+4}$$

və ya

$$F(p)=\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$$

alınar. Deməli,

$$\cos^2 t \leftarrow\!\!\!\div \frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$$

Teorem 7 (Surətin törəməsi). Əgər $f(t) \leftarrow\!\!\!\div F(p)$ olarsa, istənilən n natural ədədi üçün

$$(-t)^n f(t) \leftarrow\!\!\!\div F^{(n)}(p) \qquad (11.9)$$

bərabərliyi doğru olar.

Misal 11.11. $f(t)=t^2\cos t$ funksiyasının surətini tapın.

Həlli.

$$\cos at \leftarrow\!\!\!\div \frac{p}{p^2+a^2}$$

olduğuna (11.9) düsturunu tətbiq etməklə

$$\left(\frac{p}{p^2+a^2}\right)' \leftarrow\!\!\!\div t\cos t$$

və ya

$$\frac{1-p^2}{(p^2+1)^2} \leftarrow\!\!\!\div -t\cos t\,,$$

$$\left(\frac{p}{p^2+1}\right)''=\left(\frac{1-p^2}{(p^2+1)^2}\right)'=\frac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$$

olduğundan

$$t^2\cos t \leftarrow\!\!\div \frac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$$

olar.

Teorem 8 (Orijinalın inteqrallanması). Əgər $f(t) \leftarrow\!\!\div F(p)$ olarsa, onda

$$\int_0^t f(t)dt \leftarrow\!\!\div \frac{1}{p}\cdot F(p) \qquad (11.10)$$

olar.

Misal 11.12. $f(t) = \int_0^t e^x dt$ funksiyasının surətini tapın.

Həlli.

Məlumdur ki,

$$e^t \leftarrow\!\!\div \frac{1}{p-1} \quad ,$$

onda (11.10) düsturuna əsasən

$$\int_0^t e^x dx \leftarrow\!\!\div \frac{1}{p-1}\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p-1} = \frac{1}{p(p-1)}$$

alınır.

Teorem 9 (Surətin inteqrallanması). Əgər $f(t)$ funksiyasının $f(t) \leftarrow\!\!\div F(p)$ Laplas çevrilməsi üçün $\int_p^\infty F(u)du$ qeyri-məxsusi inteqralı yığılan olarsa, onda

$$\frac{f(t)}{t} \leftarrow\!\!\div \int_p^\infty F(u)\, du \qquad (11.11)$$

bərabərliyi doğru olar.

Misal 11.13. $f(t)=\dfrac{e^t-1}{t}$ funksiyasının surətini tapın.

Həlli.

(11.11) bərabərliyinə əsasən

$$\frac{e^t-1}{t} \leftarrow\!\!\div \int_p^\infty \left[\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right]dp = \left[\ln\frac{p-1}{p}\right]\Bigg|_p^\infty = \ln\frac{p-1}{p}$$

olar. Deməli,

$$\frac{e^t-1}{t} \leftarrow\!\!\div \ln\frac{p-1}{p}$$

Surətin inteqrallanması qaydasını tətbiq etməklə bəzi qeyri-məxsusi inteqralları da hesablamaq olar.

Tutaq ki, $f(t) \leftarrow\!\!\div F(p)$ və $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt$ qeyri-məxsusi inteqralı yığılandır. Onda

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(p)dp \qquad (11.12)$$

bərabərliyinin doğruluğunu asanlıqla görmək olar.

Misal 11.14. $\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt,\ (a>0,\ b>0)$ qeyri-məxsusi inteqralını hesablayın.

Həlli.

$$e^{-at} \leftarrow\!\!\div \frac{1}{p+a} \quad \text{və} \quad e^{-bt} \leftarrow\!\!\div \frac{1}{p+b}$$

olduğundan (11.3) bərabərliyinə əsasən

$$e^{-at}-e^{-bt} \leftarrow\!\!\div \frac{1}{p+a}-\frac{1}{p+b}$$

olar. Bu asılılığa (11.12) bərabərliyini tətbiq etsək,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt=\int_0^\infty\left(\frac{1}{p+a}-\frac{1}{p+b}\right)dp=\ln\frac{p+a}{p+b}\Bigg|_0^\infty=\ln\frac{b}{a}$$

olar.

Teorem 11.10 (Bağlama teoremi). Əgər $f_1(t)\leftarrow\!\!\!\div F_1(p)$ və $f_2(t)\leftarrow\!\!\!\div F_2(p)$ olarsa, onda

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \leftarrow\!\!\!\div F_1(p)\cdot F_2(p)$$

münasibəti doğru olar.

Misal 11.15. $\psi(t)=\int_0^t (t-\tau)e^\tau d\tau$ funksiyasının surətini tapın.

Həlli.

$\psi(t)$ funksiyası $f_1(t)=t$ və $f_2(t)=e^t$ funksiyalarının bağlısıdır. $t\leftarrow\!\!\!\div\frac{1}{p^2}$ və $e^t\leftarrow\!\!\!\div\frac{1}{p-1}$ olduğundan (11.13) bərabərliyinə əsasən

$$\psi(t)=\int_0^t (t-\tau)e^\tau d\tau e^{-at}\leftarrow\!\!\!\div\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p-1}=\frac{1}{p^2(p-1)}$$

olar.

11.4. Laplas çevrilməsinin tərsi

Laplas çevrilməsini bəzi məsələlərin həllinə tətbiq edərkən surəti verilmiş başlanğıc funksiyanın tapılması tələb olunur. Bu da Laplas çevrilməsinin tərsinin varlığı və tapılması məsələsi ilə bağlıdır.

Misal 11.16. Sürəti $F(p)=\frac{5}{p^2+4}-\frac{20p}{p^2+9}$ olan funksiyanın başlanğıc funksiyasını tapın.

Həlli.

Verilmiş funksiyanı

$$F(p)=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{p^2+4}-20\cdot\frac{p}{p^2+9}$$

kimi yazaq. $\sin\alpha t$, $\cos\alpha t$ funksiyalarının Laplas çevrilməsindən və teorem 2-dən istifadə etməklə

$$f(t)=\frac{5}{2}\sin 2t-20\cos 3t$$

bərabərliyini yazmaq olar.

Misal 11.17. Surəti $F(p)=\frac{p+1}{p^2+2p+5}$ olan funksiyanın başlanğıc funksiyasını tapın.

Həlli.

Verilmiş surət funksiyasını

$$F(p)=\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}$$

şəklində yazaq. Onda məlum bərabərliyə əsasən

$$f(t)=e^{-t}\cos 2t$$

olar.

Teorem 11.11 (Mellin teoremi). Tutaq ki, $\operatorname{Re}p>S_0$ yarımmüstəvisində analitik olan $F(p)$ funksiyası $[0,\infty)$ yarımoxunun istənilən sonlu hissəsində hissə-hissə hamar olan və artım göstəricisi S_0 olan $f(t)$ funksiyasının Laplas çevrilməsidir. Onda $f(t)$ funksiyasının kəsilməz olduğu ixtiyari nöqtədə

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp, \quad x>S_0 \tag{11.13}$$

bərabərliyi doğru olar. Bu düstura ***Mellin düsturu*** deyilir.

Teorem 11.12. $L[f(t)]=F(p), \quad \operatorname{Re} p>\alpha_0$

və

$$L[\varphi(t)]=\Phi(p) \ \ \operatorname{Re} p>\beta_0$$

olduqda

$$L[f(t)\varphi(t)]=H(p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(u)\Phi(p-u)du$$

olar $(x>\alpha_0, \ \operatorname{Re} p>x+\beta_0)$.

Teorem 11.13. Tutaq ki, $F(p)$ funksiyası genişlənmiş kompleks müstəvidə analitikdir və onun Loran ayrılışı

$$F(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{p^k}, \quad F(\infty)=0$$

şəklindədir, yəni $p=\infty$ onun düzgün nöqtəsidir. Onda $F(p)$ funksiyasının orijinalı

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \quad olduqda \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_{n+1}\dfrac{t^k}{k!}, & t>0 \quad olduqda \end{cases} \tag{11.14}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Misal 11.18. $F(p)=\sin\frac{1}{p}$ funksiyasının orijinalını tapın.

Həlli.

Verilmiş funksiyanın orijinalını (11.14)-in tətbiqi ilə hesablayaq.

$$F(p)=\sin\frac{1}{p}=\frac{1}{p}-\frac{1}{3!\,p^3}+\frac{1}{5!\,p^5}-\dots$$

funksiyası teorem 11.13-ün bütün şərtlərini ödəyir. Onda (11.14) bərabərliyinə görə

$$f(t)=1-\frac{1}{3!}\cdot\frac{t^2}{2!}+\frac{1}{5!}\frac{t^4}{4!}-\dots$$

olar.

Teorem 11.14. Polyusları $p_1, p_2, \dots p_n$ ədədləri olan düzgün $F(p)$ kəsr-rasional funksiyasının orijinalı

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\underset{(p_k)}{çıx}[F(p)e^{pt}] \tag{11.15}$$

kimi hesablanır.

Tutaq ki, $F(p)$ funksiyası ortaq kökü olmayan $A(p)$ və $B(p)$ çoxhədlilərinin nisbəti düzgün kəsr olan $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ şəklindədir və $p_k\,(k=1,2,\dots,n)$ ədədləri onun sadə polyuslarıdır. Onda məlum qaydaya görə $e^{pt}F(p)$-nin sadə p_k polyusuna nəzərən çıxıqı

$$\underset{(p_k)}{çıx}\,[F(p)e^{pt}]=\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}$$

kimi olar və $F(p)$ funksiyasının orijinalı

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t} \tag{11.16}$$

düsturu ilə hesablanar. Bu ***ayrılma teoremi*** adlanır.

Misal 11.19. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)(p-2)(p-3)}$ funksiyasının orijinılını tapın.

Həlli.

Verilmiş $F(p)$ funksiyasında

$$A(p)=1,\ B(p)=(p-1)(p-2)(p-3)$$

və

$$p_1=1,\quad p_2=2,\quad p_3=3$$

ədədləri $F(p)$ kəsrinin sadə polyuslarıdır. Onda $F(p)$ funksiyasının orijinalı (11.16) bərabərliyi ilə hesablanar.

$$B'(p)=(p-2)(p-3)+(p-1)(p-3)+(p-1)(p-2)=$$
$$=3p^2-12p+11$$

olduğundan

$$f(t)=\frac{1}{2}e^t-e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t}=\frac{1}{2}(e^t-2e^{2t}+e^{3t})$$

olar.

ƏDƏBİYYAT

1. Бахвалов Н.С, Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: "Бином", 2004.
2. Вержбицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: "Высшая школа", 2001
3. Вержбицкий В.М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. М.: "ОНИКС",2005.
4. Мокрова Н.В. Основы численных методов: Учебное пособие /Н.В.Мокрова, Л.Е.Суркова. Под редакцией В.М.Володина; Федеральное агентство по образованию; Моск. гос. ун-т инж. экологии, ф-т АИТ, кафедра "Прикладная математика и информатика." –М.: МГУИЭ, 2006.
5. Кувайскова Ю.Е. Численные методы. Лабораторный практикум: учебное пособие /Ю.Е.Кувайскова. – Ульяновск: УлГТУ, 2014.
6. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002.
7. Волков Е. А. Численные методы. - СПб.: Лань, 2004.
8. Распопов В.Е., Клунникова М.М., Сапожников В.А. Численный анализ. – Красноярск, 2005.
9. Məmmədov N.Y., Musayev Ə.M. Ali riyaziyyat kursu (I hissə). ADNSU, Bakı, 2017.
10. Məmmədov N.Y., Musayev Ə.M. Ali riyaziyyat kursu (II hissə). ADNSU, Bakı, 2017.
11. Məmmədov N.Y., Musayev Ə.M. Ali riyaziyyat kursu (III hissə). ADNSU, Bakı, 2018.

Ələmdar Süleyman oğlu Həsənov
(Fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent)
Məmməd İbad oğlu Seyidov
(Texnika elmləri namizədi, dosent)

Ali riyaziyyatın xüsusi bölmələri

Dərs vəsaiti

Yığılmağa verilmişdir: 02.11.2018
Çapa imzalanmışdır: 06.12.2018
.
Formatı: 60×84 1/16
Fiziki çap vərəqi: 14,00
Sifariş 27. Sayı 500

«Ecoprint» şirkətinin mətbəəsində çap olunub